Jeux de coalitions hédoniques à concepts de solution multiples

Thibaut Vallée, Grégory Bonnet

Normandie Université, UNICAEN, GREYC, CNRS UMR 6072, France
thibaut.vallee@unicaen.fr,gregory.bonnet@unicaen.fr

RÉSUMÉ. *Dans un système d'agents autonomes, ces derniers peuvent être amenés à se demander avec qui coopérer sachant que chaque agent préfère interagir avec certains agents plutôt que d'autres. Ce problème est étudié par la formation de coalitions hédoniques qui caractérise les solutions stables au regard des préférences des agents par des concepts de solution. Toutefois, ces derniers ne modélisent qu'un seul a priori sur le comportement commun des agents. Par exemple, la stabilité au sens de Nash modélise des agents qui veulent tous rejoindre les coalitions qu'ils préfèrent sans se soucier des autres. Il pourrait alors être intéressant de concevoir des agents hétérogènes dans leurs définitions des solutions stables. Pour ce faire, nous proposons deux nouveaux modèles de jeux de coalition hédoniques. L'un où chaque agent détermine le concept de solution qu'il désire satisfaire, l'autre où les agents expriment non seulement leurs préférences sur les autres, mais aussi des préférences sur les concepts de solution.*

ABSTRACT. *In multiagent systems, agents may be led to ask themselves with whom to cooperate, knowing that each of them expresses its own preferences. This problem is studied in hedonic games with solution concepts characterizing the stability of outcomes with respect to the agents' preferences. However, this framework considers a single a priori about agents' common behaviour. For instance, Nash stability models agents which all want to join the coalitions they prefer without any considerations about the others. Thus, it might also interesting to consider agents which are heterogeneous in their definition of stable solutions. For this purpose, we propose two news hedonic game models. The first one where agents decide the solution concept that they follow, the second one where agents express preferences on the coalitions and the solution concepts.*

MOTS-CLÉS : *coalitions, modèles de comportement agent, théorie des jeux.*

KEYWORDS: *behavior models, coalitions, game theory.*

DOI:10.3166/RIA.32.169-195

1. Introduction

Dans un système d'agents autonomes, il est fréquent que ces derniers soient amenés à devoir décider avec qui coopérer et ainsi former des coalitions. Les jeux de coalitions hédoniques modélisent ce problème en considérant des agents hétérogènes, au sens où ses derniers expriment des préférences sur les groupes d'agents qu'ils peuvent rejoindre (Dreze, Greenberg, 1980). Une solution d'un tel jeu est une partition stable : aucun agent n'a d'intérêt à quitter la coalition qui lui a été affectée au regard d'un critère, appelé concept de solution, qui est un a priori sur le comportement des agents. Par exemple, la stabilité au sens de Nash suppose que chaque agent va chercher à rejoindre une coalition déjà formée s'il la préfère à celle à laquelle il a été affecté. Or, dans un système où les agents sont hétérogènes, ceux-ci n'appliquent pas nécessairement les mêmes règles de stabilité. Il est en effet envisageable que, dans un même jeu, un agent applique la stabilité au sens de Nash et que, dans le même temps, un autre agent plus respectueux des autres ne quitte sa coalition que si cela ne nuit à personne. Par exemple, dans un problème d'appariement pour jeux vidéos en ligne où les joueurs expriment des préférences sur les autres joueurs avec lesquels ils désirent interagir, nous pouvons raisonnablement croiser des joueurs individualistes qui préfèrent quitter une partie si l'appariement ne leur convient pas, tandis que d'autres vont se montrer plus respectueux de leurs partenaires.

Un autre exemple peut être celui d'une application de co-voiturage. Au regard d'un trajet commun, chaque agent dispose de préférences, représentant ses intérêts, vis-à-vis des passagers avec qui ils peuvent partager une voiture. À ce stade, ceci peut être modélisé par un jeu hédonique canonique. Toutefois, les agents peuvent aussi avoir des préférences sur la manière dont ils décident individuellement ou collectivement d'organiser les voitures. Par exemple, un agent peut décider de monter dans une voiture même si le(s) passager(s) ne le désire(nt) pas. D'autres agents peuvent décider de rejoindre une voiture que si le(s) passager(s) de cette dernière accepte(nt) d'être rejoint. D'autres encore peuvent changer de voiture si cela est préférable pour tout le monde. Or, ces comportements ne sont pas capturés par les relations de préférences des jeux hédoniques canoniques.

En effet, les travaux de recherche actuels considèrent des coalitions régies par des stratégies individuelles homogènes et ne considèrent pas des agents ayant des stratégies différentes. Pour répondre à un tel cas de figure, nous proposons dans cet article deux nouveaux modèles de jeux de coalitions hédoniques. Le premier, appelé *jeu de coalitions hédonique à concepts de solution multiples*, se distingue de la littérature en permettant à chaque agent de considérer un concept de solution qui lui est propre. Dans le second modèle, appelé *jeu de coalitions hédonique à double profil*, les agents expriment cette fois des préférences sur un ensemble de concepts de solution, et donc chaque agent peut alors exprimer plusieurs concepts de solution qui leur sont propres. Toutefois, ces modèles requièrent une redéfinition de la stabilité d'une solution globale à tous les agents. Ainsi, nous proposons une nouvelle notion de stabilité qui minimisent les *concessions* des agents sur les concepts de solution – c'est-à-dire une distance au concept de solution préféré – afin de trouver une solution non vide.

Après avoir introduit en section 2 les jeux de coalitions hédoniques canoniques, nous présentons en section 3 les jeux de coalitions hédoniques à concepts de solution multiples. Nous étendons ensuite dans la section 4 ce modèle aux jeux de coalitions hédoniques à double profil. Nous consacrons les sections 3.2 et 4.2 à des analyses formelles de ces modèles. Les sections 3.3 et 4.3 présentent une analyse de la complexité algoritmique des problèmes de décisions qui associées. Les sections 3.4 et 4.4 présentent, quant à elles, des analyses empiriques de ces deux modéles.

2. Jeux hédoniques canoniques

Lorsqu'un ensemble d'agents doit coopérer temporairement dans le but de réaliser des objectifs qui leur sont propres, l'une des problématiques est de décider avec qui coopérer. Il s'agit d'un problème de formation de coalitions (ou jeu de coalitions) consistant à trouver un partitionnement des agents qui les satisfait tous. De nombreux modèles de jeux de coalitions ont été étudiés dans la littérature (Aziz, Brandt, Seedig, 2013 ; Bogomolnaia, Jackson, 2002 ; Dreze, Greenberg, 1980 ; Elkind, Wooldridge, 2009). Certains s'intéressent à des modèles quantitatifs où les agents cherchent à maximiser leurs utilités, d'autres – les jeux de coalitions hédoniques – s'intéressent à des modèles qualitatifs (Dreze, Greenberg, 1980 ; Elkind, Wooldridge, 2009) où chaque agent évalue sa satisfaction en fonction de la coalition à laquelle il appartient. Dans cet article, nous nous intéressons aux jeux hédoniques.

DÉFINITION 1 (HG). — *Un* jeu de coalitions hédonique *est défini comme un tuple* $HG = \langle N, (\succeq_i)_{a_i \in N} \rangle$ *où* $N = \{a_1, \ldots, a_n\}$ *est l'ensemble des agents, et* $\succeq_i$ *désigne les préférences de l'agent* a_i *vis-à-vis des coalitions, c'est-à-dire un préodre total (avec indifférence) sur l'ensemble* $\mathcal{N}_i = \{C \subseteq N : a_i \in C\}$ *des coalitions auxquelles l'agent* a_i *peut apartenir.*

Les jeux hédoniques sont généralements étudiés, en particulier sur la complexité des problèmes de décision qu'ils posent, selon des classes associées aux hypothèses sur les préférences des agents (jeux additifs, jeux fractionnels, réseaux hédoniques par exemple). Bien que quelques travaux s'intéressent aux aspects dynamiques de ces jeux (Ghaffarizadeh, Allan, 2013), un jeu de coalitions canonique est généralement vu comme un problème statique : les préférences des agents n'évoluent pas en cours de résolution du jeu.

Trouver la solution d'un jeu de coalitions consiste à trouver une partition stable, c'est-à-dire qu'aucun agent ne peut ou ne veut dévier de sa coalition actuelle. Les concepts de solution caractérisent des propriétés que doit satisfaire toute partition stable. Par exemple, la Pareto-optimalité est le concept de solution regroupant toutes les partitions telles qu'aucun agent ne puisse quitter sa coalition actuelle pour une autre coalition qu'il préfère, sans dégrader la solution pour au moins un autre agent. De nombreux concepts de solution ont été proposés et étudiés dans la littérature (Aziz, Brandt, Seedig, 2013 ; Peters, Elkind, 2015 ; Sung, Dimitrov, 2007).

Tableau 1. Principaux concepts de solution canoniques

Concept de solution canonique	**Propriété**
Rationnalité Individuelle (IR)	$\underline{\forall a_i \in N}, C_i(\Pi) \succeq_i \{a_i\}$
Stabilité au sens de Nash (NS)	$\underline{\forall a_i \in N}, \nexists C \in \Pi \cup \{\emptyset\}$: $C \cup \{a_i\} \succ_i C_i(\Pi)$
Stabilité Individuelle (IS)	$\underline{\forall a_i \in N}, \nexists C \in \Pi \cup \{\emptyset\}$: $C \cup \{a_i\} \succ_i C_i(\Pi)$ $\wedge \forall a_j \in C, C \cup \{a_i\} \succeq_j C$
Stabilité Individuelle Contractuelle (ICS)	$\underline{\forall a_i \in N}, \nexists C \in \Pi \cup \{\emptyset\}$: $C \cup \{a_i\} \succ_i C_i(\Pi)$ $\wedge \forall a_j \in C, C \cup \{a_i\} \succeq_j C$ $\wedge \forall a_k \in C_i(\Pi), a_k \neq a_i,$ $C_i(\Pi) \setminus \{a_i\} \succeq_k C_i(\Pi)$
Stabilité Contractuelle de Nash (CNS)	$\underline{\forall a_i \in N}, \nexists C \in \Pi \cup \{\emptyset\}$: $C \cup \{a_i\} \succ_i C_i(\Pi)$ $\wedge \forall a_k \in C_i(\Pi), a_k \neq a_i,$ $C_i(\Pi) \setminus \{a_i\} \succeq_k C_i(\Pi)$
Stabilité au sens du Cœur (CS)	$\underline{\forall a_i \in N}, \nexists C \in \mathcal{N}_i$: $C \succ_i C_i(\Pi)$ $\wedge \forall a_j \in C, C \succeq_j C_j(\Pi)$
Optimalité (O)	$\underline{\forall a_i \in N}, \nexists C \in \mathcal{N}_i$: $C \succ_i C_i(\Pi)$
Pareto-Optimalité (PO)	$\nexists \Pi_2 : \underline{\forall a_i \in N}, C_i(\Pi_2) \succeq_i C_i(\Pi)$ $\wedge \exists a_j \in N, C_j(\Pi_2) \succ_j C_j(\Pi)$

Dans cet article, nous considérons un jeu hédonique statique. Pour un ensemble N d'agents, nous désignons l'ensemble des partitions possibles de N par la notation $\mathcal{P}_N$. Pour une partition $\Pi \in \mathcal{P}_N$, $C_i(\Pi)$ désigne la coalition de l'agent a_i dans cette partition. Une partition Π est stable au sens d'un concept de solution X si et seulement si elle satisfait la propriété qui caractérise X. Nous considérons ici les différents concepts de solution canoniques [1] présentés dans le tableau 1. De manière intéressante, les concepts de solution peuvent être définis en combinant différentes caractérisations de déviations autorisées (Sung, Dimitrov, 2007). Par exemple, la *stabilité contrac-*

1. Pour les lecteurs peu familiers des jeux hédoniques, le sens des différents concepts canoniques est le suivant : IR signifie que l'agent dévie s'il préfère être seul ; NS qu'il dévie s'il existe une coalition qu'il préfère dans la partition courante ; IS qu'il dévie vers une coalition de la partition qu'il préfère s'il y est accepté ; ICS qu'il dévie vers une coalition de la partition qu'il préfère s'il y est accepté et que cela ne soit pas au détriment des agents qu'il quitte ; CNS qu'il dévie vers une coalition de la partition qu'il préfère si cela n'est pas au détriment des agents qu'il quitte ; CS signifie qu'un groupe d'agents dévie collectivement s'il peut former une nouvelle coalition que chaque membre du groupe préfère ; O que les agents dévient si la solution n'est pas la préférée pour chacun d'entre eux ; PO qu'ils dévient collectivement si cela est préférable pour au moins un agent et que cela ne soit pas au détriment d'un autre.

tuelle de Nash est le concept de solution autorisant un agent à dévier de sa coalition actuelle pour en rejoindre une qu'il préfère (stabilité de Nash), sous réserve que cette déviation ne dégrade pas la solution pour les autres membres de la coalition qu'il quitte (stabilité contractuelle). Ainsi, les déviations autorisées représentent des comportements d'agents et leurs caractérisations sont porteuses d'un a priori sur eux. Par exemple, la *stabilité de Nash* modélise des agents individualistes qui ne considèrent que leurs propres préférences, contrairement à la *stabilité individuelle contractuelle* qui est une prise en compte de la collectivité puisque l'agent ne déviera que si les autres l'acceptent.

3. Concepts de solution locaux

Si les concepts de solution sont porteurs d'a priori sur le comportement individuel des agents, ce sont surtout des *concepts de solution globaux* porteurs d'un a priori qui s'applique à tous les agents comme l'indiquent les termes soulignés dans le tableau 1. Afin de considérer des agents hétérogènes dans leur définition de la stabilité, nous proposons ici un jeu hédonique qui ne considère non plus le concept de solution comme une donnée externe au jeu, mais comme un paramètre du jeu exprimé par chaque agent sous forme de *concepts de solution locaux*.

3.1. Du global au local

Si les concepts de solution canoniques caractérisent des propriétés qui doivent être vraies *pour tous les agents*, nous exprimons ces propriétés du point de vue de chaque agent : un concept de solution local caractérise une propriété vraie *pour un agent fixé*.

DÉFINITION 2 (**$\mathbf{LX_i}$**). — *Soit $HG = \langle N, (\succeq_i)_{a_i \in N} \rangle$ un jeu de coalitions hédonique, X un concept de solution global et $a_i \in N$ un agent. Le* concept de solution local *LX_i caractérise l'ensemble des partitions $\Pi \in \mathcal{P}_N$ qui vérifient les propriétés de X pour l'agent a_i.*

Pour chaque concept canonique X, nous définissons LX_i comme le concept de solution local pour un agent $a_i \in N$ (résumés dans le tableau 2). Nous pouvons ainsi modéliser des jeux où une partition Π est stable du point de vue d'un agent a_i s'il n'existe pas de coalition qu'il désirerait rejoindre ($\Pi \in LNS_i$) et est stable du point de vue d'un autre agent a_j si toute déviation de sa part dégrade la solution pour au moins un autre agent ($\Pi \in LPO_j$).

DÉFINITION 3 (MHG). — *Un* jeu de coalitions hédonique à concepts de solution multiples *est un triplet $MHG = \langle N, (\succeq_i)_{a_i \in N}, LSC \rangle$ où $N = \{a_1, \ldots, a_n\}$ est l'ensemble des agents, $\succeq_i$ les préférences de l'agent a_i vis-à-vis des coalitions, et $LSC = \{LX_1, \ldots, LX_n\}$ l'ensemble des concepts de solution locaux des agents.*

Dans un MHG, une partition qui satisfait le concept de solution local d'un agent est dite *localement stable* du point de vue de cet agent.

Tableau 2. Concepts de solution locaux pour un agent $a_i \in N$

Concept local	**Propriété**
LIR_i	$C_i(\Pi) \succeq_i \{a_i\}$
LNS_i	$\nexists C \in \Pi \cup \{\emptyset\} : C \cup \{a_i\} \succ_i C_i(\Pi)$
LIS_i	$\nexists C \in \Pi \cup \{\emptyset\} : C \cup \{a_i\} \succ_i C_i(\Pi) \wedge \forall a_j \in C, C \cup \{a_i\} \succeq_j C$
$LICS_i$	$\nexists C \in \Pi \cup \{\emptyset\} : C \cup \{a_i\} \succ_i C_i(\Pi) \wedge \forall a_j \in C, C \cup \{a_i\} \succeq_j C$ $\wedge \forall a_k \in C_i(\Pi), a_k \neq a_i, C_i(\Pi) \setminus \{a_i\} \succeq_k C_i(\Pi)$
$LCNS_i$	$\nexists C \in \Pi \cup \{\emptyset\} : C \cup \{a_i\} \succ_i C_i(\Pi)$ $\wedge \forall a_k \in C_i(\Pi), a_k \neq a_i, C_i(\Pi) \setminus \{a_i\} \succeq_k C_i(\Pi)$
LCS_i	$\nexists C \in \mathcal{N}_i : C \succ_i C_i(\Pi) \wedge \forall a_j \in C, C \succeq_j C_j(\Pi)$
LO_i	$\nexists C \in \mathcal{N}_i : C \succ_i C_i(\Pi)$
LPO_i	$\nexists \Pi_2 \in \mathcal{P}_N : C_i(\Pi_2) \succ_i C_i(\Pi) \wedge \forall a_j \in N, C_j(\Pi_2) \succeq_j C_j(\Pi)$

DÉFINITION 4 (Stabilité locale). — *Soit un MHG. Une partition* Π *est* localement stable *du point de vue de l'agent* a_i *(noté* $\Pi \in LX_i$*) si elle satisfait le concept de solution local* LX_i

Comme chaque agent évalue la stabilité d'une partition selon son propre concept de solution, une solution globale doit être stable du point de vue de chaque agent. Une telle partition, qui est alors une solution globale d'un MHG, est dite *consensuellement stable*.

DÉFINITION 5 (Stabilité Consensuelle). — *Soit un MHG. Une partition* Π *est* consensuellement stable *(noté* $\Pi \in CoS$*) si* Π *satisfait le concept de solution local de chaque agent :*

$$CoS = \bigcap_{a_i \in N} LX_i$$

EXEMPLE 6. — Considérons le jeu $HG = \langle N, (\succeq_i)_{a_i \in N} \rangle$ avec $N = \{a_1, a_2, a_3\}$ et le profil de préférence suivant :

$$\succeq_1 = \{a_1, a_2\} \succ \{a_1\} \succ \{a_1, a_2, a_3\} \succ \{a_1, a_3\}$$

$$\succeq_2 = \{a_2, a_3\} \succ \{a_1, a_2, a_3\} \succ \{a_1, a_2\} \succ \{a_2\}$$

$$\succeq_3 = \{a_2, a_3\} \succ \{a_1, a_2, a_3\} \succ \{a_3\} \succ \{a_1, a_3\}$$

Avec trois agents, il y a cinq partitions :

$$\Pi_1 = \{\{a_1, a_2, a_3\}\}$$
$$\Pi_2 = \{\{a_1\}, \{a_2, a_3\}\}$$
$$\Pi_3 = \{\{a_1, a_3\}, \{a_2\}\}$$
$$\Pi_4 = \{\{a_1, a_2\}, \{a_3\}\}$$
$$\Pi_5 = \{\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}\}$$

Les tableaux 3, 4 et 5 montrent l'appartenance de ces partitions aux différents concepts de solution locaux que les agents a_1, a_2 et a_3 peuvent exprimer. Une ✓ signifie que la partition Π_i appartient au concept de solution LX_j. Notons que dans le tableau 3, Π_1 et Π_3 ne satisfont aucun des concepts de solution locaux de a_1. Donc, quel que soit ce que a_1 exprime, ces deux partitions ne peuvent pas être consensuellement stables.

Tableau 3. Partitions localements stables selon a_1

$\mathbf{LX_1}$	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5
LIR_1		✓		✓	✓
LNS_1		✓		✓	
LIS_1		✓		✓	
$LICS_1$		✓		✓	
$LCNS_1$		✓		✓	
LCS_1		✓		✓	
LO_1				✓	
LPO_1		✓		✓	

Tableau 4. Partitions localements stables selon a_2

$\mathbf{LX_2}$	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5
LIR_2	✓	✓	✓	✓	✓
LNS_2	✓	✓			
LIS_2	✓	✓			
$LICS_2$	✓	✓		✓	
$LCNS_2$	✓	✓			
LCS_2		✓			
LO_2		✓			
LPO_2		✓		✓	

Considérons le $MHG = \langle N, (\succeq_i)_{a_i \in N}, LSC \rangle$ avec le même ensemble d'agents, le même profil de préférence que dans HG et les concepts de solutions locaux $LSC = \{LNS_1, LIR_2, LPO_3\}$. Dans ce jeu, il existe deux partitions consensuellement stables : $CoS = \{\Pi_2, \Pi_4\}$.

□

Tableau 5. Partitions localements stables selon a_3

$\mathbf{LX_3}$	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5
LIR_3	✓	✓		✓	✓
LNS_3	✓	✓			
LIS_3	✓	✓		✓	
$LICS_3$	✓	✓		✓	
$LCNS_3$	✓	✓		✓	
LCS_3		✓			
LO_3		✓			
LPO_3		✓		✓	

3.2. Propriétés des MHG

Les concepts de solution locaux ont les mêmes propriétés que leurs équivalents globaux et, donc, ne les dénaturent pas. En premier lieu, les concepts de solution globaux satisfont des propriétés d'inclusion (Bogomolnaia, Jackson, 2002). Par exemple, $NS \subseteq IS \subseteq ICS$. Trivialement, au vu de leur définition, les concepts de solution locaux satisfont les mêmes propriétés, résumées dans la figure 1. Par exemple, le concept LNS_i ne tient pas compte des préférences des autres agents et considère uniquement des déviations vers une coalition déjà présente dans la partition courante. Ainsi, toute partition $\Pi \in LNS_i$ est également dans LIS_i, $LCNS_i$, $LICS_i$, LIR_i. L'hyperarête en pointillés indique les concepts de solution *irrationnels*, c'est-à-dire les concepts dont la satisfaction ne garantit pas à l'agent d'être dans une coalition a minima équivalente en termes de préférences à sa coalition singleton.

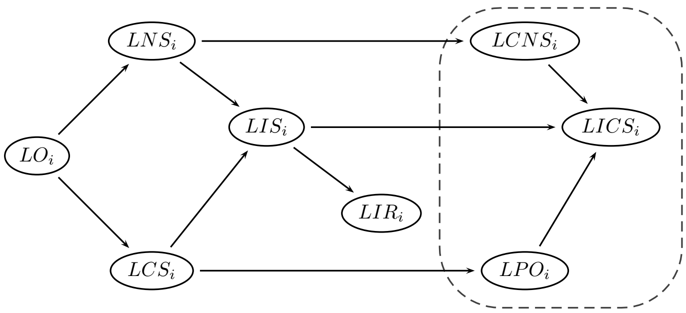

Figure 1. Relations d'inclusion entre LX_i

Considérons maintenant le cas où tout les agents expriment le même concept de solution local. De manière intuitive, dans un tel jeu, la satisfaction de la stabilité consensuelle est équivalente à la satisfaction du concept de solution global associé.

PROPRIÉTÉ 7. — *Soit un MHG. Soit X un concept de solution global. Si $\forall a_i, \in N, LX_i \in LSC$, LX_i est le concept de solution local associé à X, alors $\Pi \in CoS \iff \Pi \in X$.*

Nous présentons ici uniquement la preuve pour le cas de la Pareto-optimalité. Les preuves pour les autres concepts de solution globaux sont similaires.

PREUVE 8. — Soit un MHG tel que l'ensemble des agents expriment la Pareto-optimalité locale. L'ensemble CoS des partitions consensuellement stables est alors l'ensemble des partitions localement Pareto-optimale pour tous les agents :

$$CoS = \bigcap_{a_i \in N} LPO_i$$

Nous montrons ici que nous avons l'équivalence : $\Pi \in CoS \iff \Pi \in PO$

($\rightarrow$) Montrons dans un premier temps que, $\forall \Pi \in CoS$, nous avons $\Pi \in PO$.

Suppons qu'il existe une partition $\Pi \in \mathcal{P}_N$ tel que $\Pi \in CoS$ mais que $\Pi \notin PO$. Par définition de la Pareto-optimalité, $\Pi \notin PO$ implique que $\exists \Pi_2 \in \mathcal{P}_N, \exists a_i \in N$ tels que $C_i(\Pi_2) \succ_i C_i(\Pi)$ et que $\forall a_j \in N \setminus \{a_i\}, C_j(\Pi_2) \succeq_j C_j(\Pi)$. Ainsi, selon la définition de la Pareto-optimalité locale, nous avons $\Pi \notin LPO_i$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $\Pi \in CoS$.

($\leftarrow$) Montrons maintenant que, $\forall \Pi \in PO$, nous avons $\Pi \in CoS$.

Supposons qu'il existe une partition $\Pi \in \mathcal{P}_N$ telle que $\Pi \in PO$ mais que $\Pi \notin CoS$. Cela signifie qu'il existe un agent a_i tel que $\Pi \notin LPO_i$. Par définition de la Pareto-optimalité locale, $\Pi \notin LPO_i$ implique que $\exists \Pi_2 \in \mathcal{P}_N$ telle que $C_i(\Pi_2) \succ_i C_i(\Pi)$ et que $\forall a_j \in N \setminus \{a_i\}, C_j(\Pi_2) \succeq_j C_j(\Pi)$. Or, ceci est en contradiction avec l'hypothèse $\Pi \in PO$.

Ainsi, nous avons nécessairement l'équivalence $\Pi \in CoS \iff \Pi \in PO$. ■

La propriété 7 illustre un point important : les MHG sont une généralisation des jeux de coalitions hédoniques canoniques. En effet, tout jeu HG peut être modélisé par un MHG où chaque agents considère le même concept de solution. De plus, la propriété 7 implique qu'il existe des MHG où l'ensemble des partitions consensuellement stables peut être vide. L'exemple 9 illustre un tel jeu.

EXEMPLE 9. — Soit un MHG tel que $N = \{a_1, a_2\}$, $\succeq_1 = \{a_1\} \succ_1 \{a_1, a_2\}$, $\succeq_2 = \{a_1, a_2\} \succ_2 \{a_2\}$ et $LSC = \{LCS_1, LNS_2\}$. Ce jeu possède deux partitions : $\Pi_1 = \{\{a_1\}, \{a_2\}\}$ et $\Pi_2 = \{\{a_1, a_2\}\}$. Par définition, il n'existe pas de partition dans NS alors que $LCS_1 = \{\Pi_1\}$ et $LNS_2 = \{\Pi_2\}$. □

Enfin, un MHG et la stabilité consensuelle permettent de considérer comme stables des partitions qui ne satisfont aucun concept de solution canonique.

PROPRIÉTÉ 10. — *Il existe des MHG tels que* $\exists \Pi \in CoS$ *où, pour tout concept de solution canonique* X *indiqué dans le tableau 1,* $\Pi \notin X$.

L'exemple 11 illustre cette propriété.

EXEMPLE 11. — Considérons le jeu $MHG = \langle N, (\succeq_i)_{a_i \in N}, LSC \rangle$ avec $N = \{a_1, a_2, a_3\}$, $LSC = \{LIS_1, LICS_2, LIR_3\}$ et le profil de préférence suivant :

$$\succeq_1 = \{a_1, a_2, a_3\} \succ \{a_1, a_2\} \succ \{a_1\} \succ \{a_1, a_3\}$$

$$\succeq_2 = \{a_2, a_3\} \succ \{a_2\} \succ \{a_1, a_2, a_3\} \succ \{a_1, a_2\}$$

$$\succeq_3 = \{a_1, a_2, a_3\} \succ \{a_1, a_3\} \succ \{a_2, a_3\} \succ \{a_3\}$$

Ce jeu a trois partitions stables : $\{\{a_1, a_2, a_3\}\}$, $\{\{a_1\}, \{a_2, a_3\}\}$ et $\{\{a_1, a_2\}, \{a_3\}\}$. Si les deux premières satisfont des concepts de solution canoniques, la partition $\{\{a_1, a_2\}, \{a_3\}\}$ n'en satisfait aucun. Dans cette partition, la grande coalition est préférée par tous les agents à leur coalition respective mais, en exprimant la rationalité individuelle comme concept de solution local, l'agent a_3 désire juste être satisfait et ne cherche pas à dévier vers sa coalition optimale. De plus, les agents a_1 et a_2 pourraient former la grande coalition s'ils considéraient des déviations collectives, ce qui n'est pas le cas ici. Ainsi, la partition $\{\{a_1, a_2\}, \{a_3\}\}$ est stable car chaque agent attend que ce soient les autres qui dévient. □

Intéressons-nous maintenant à l'existence des partitions stables dans un MHG. Si tous les concepts de solution globaux ne garantissent pas l'existence d'une partition stable, tous les concepts de solution locaux garantissent l'existence d'une partition localement stable du point de vue de a_i.

PROPRIÉTÉ 12. — *Soit un MHG. Pour tout agent $a_i \in N$ et tout concept de solution local LX_i indiqué dans le tableau 2, il existe au moins une partition Π de N telle que $\Pi \in LX_i$.*

En effet, indépendamment de l'agent et du concept de solution local que cet agent exprime, les partitions contenant sa coalition optimale sont nécessairement localement stables.

PREUVE 13. — Soit un MHG, un agent $a_i \in N$, et $C_i^* \in \mathcal{N}_i$ l'une des coalitions telles qu'aucune autre coalition $C \in \mathcal{N}_i$ ne soit strictement préférée à C_i^* par a_i : $\forall C \in \mathcal{N}_i, C_i^* \succeq_i C$. C_i^* est la coalition optimale pour l'agent a_i. Par définition, de l'optimalité locale, toute partition Π contenant C_i^* est nécessairement localement optimale. Ainsi, $LO_i \neq \emptyset$. Par inclusion des concepts de solution, toute partition $\Pi \in LO_i$ appartient également aux autres concepts de solution locaux. Ainsi, quel que soit LX_i, cette partition Π est localement stable. ■

Remarquons que si nous avions considérés des concepts qui ne sont pas des sur-ensembles de l'optimalité locale, alors la Propriétés 12 ne serait plus vraie.

3.3. Complexité des MHG

La complexité algorithmique des jeux de coalitions hédoniques a été largement étudiée dans la literature (Ballester, 2004 ; Aziz, Brandt, Seedig, 2013 ; Peters, Elkind, 2015). Dans la plus grande majorité des cas, trouver une partition qui satisfait un concept de solution donné (telle que la stabilité au sens Nash ou la stabilité au sens du cœur) est un problème NP-complet (Peters, Elkind, 2015). Certaines sous-classes de jeux de coalitions hédoniques (tels que les réseaux hédoniques (Elkind, Wooldridge, 2009), les jeux hédoniques à préférences fractionnelles (Brandl *et al.*, 2015) ou les jeux hédoniques à préférences additives (Aziz, Brandt, Seedig, 2013)) émettent des hypothèses sur la représentation des profils de préférence des agents, et appartiennent à d'autres classes de complexité. Par exemple, décider de l'existence d'une partition stable au sens du cœur dans les réseaux hédoniques est un problème NP-difficile (Elkind, Wooldridge, 2009) tandis qu'avec une représentation de la forme $\mathcal{W}\beta$-préférences sans règle de départage, le problème est dans P (Peters, Elkind, 2015). Dans le cadre des MHG, comme les agents peuvent considérer des concepts de solution locaux irrationels, leurs préférences sont exprimées de manière complète bien que certaines puissent être considérées comme des IRCL.

Considérons les problèmes de décisions suivants :

$\mathbf{LX_i}$-EXISTENCE : Étant donnés un MHG et un agent $a_i \in N$, existe-t-il une partition $\Pi \in \mathcal{P}_N$ telle que $\Pi \in LX_i$?

$\mathbf{LX_i}$-APPARTENANCE : Étant donnés un MHG, un agent $a_i \in N$ et une partition $\Pi \in \mathcal{P}_N$, est-ce que Π satisfait le concept de solution LX_i?

COS-EXISTENCE : Étant donné un MHG, existe-t-il une partition $\Pi \in \mathcal{P}_N$ telle que $\Pi \in CoS$?

COS-APPARTENANCE : Étant donnés un MHG et une partition $\Pi \in \mathcal{P}_N$, est-ce que Π satisfait la stabilité consensuelle ?

La suite de cette section est consacrée aux preuves de complexité des problèmes énoncés ci-dessus. Le lecteur pourra trouver dans le tableau 6 en fin de section un résumé des résultats.

Considérons dans un premier temps le cas des concepts de solution locaux LX_i. Comme montré précédement (propriété 12), indépendament de l'agent a_i et de ses préférences, tout concept de solution local LX_i est nécessairement non-vide. En conséquence, le problème de décision LX_i-EXISTENCE est trivialement en $\mathcal{O}(1)$. Concernant le problème de l'appartenance, dans la grande majorité des cas (LIR_i, LNS_i, LIS_i, $LICS_i$, $LCNS_i$, LCS_i, LO_i), la vérification est décidable trivialement en un temps polynomial (Elkind, Wooldridge, 2009). Seule la Pareto-optimalité locale échappe à cette règle : le problème de décision LPO_i-APPARTENANCE est coNP-complet.

PROPRIÉTÉ 14. — *Soit* $MHG = \langle N, (\succeq_i)_{a_i \in N}, LSC\rangle$ *un jeu et* $a_i \in N$ *un agent tel que* $LPO_i \in LSC$. *Soit* $\Pi \in \mathcal{P}_N$ *une partition de* N. *le problème de décision* LPO_i-APPARTENANCE *est* coNP-complet.

La preuve est similaire à celle donnée par (Aziz, Brandt, Harrenstein, 2013) pour le cas de la Pareto-optimalité globale. Nous montrons que le problème est coNP-difficile par une réduction au problème de couverture exacte par ensembles de taille 3 (X3C), un problème de décision NP-complet bien connu. Pour rappel, X3C est défini comme ceci : étant donnés un ensemble X (avec $|X| = 3q$) et une collection $\mathbb{C}$ de sous-ensembles (de cardinalité 3) de X, existe-t-il un sous-ensemble $C' \subseteq \mathbb{C}$ tel que C'

soit une partition de X ? Pour des raisons de lisibilité, nous dénontons ici par C' une partition de X dans le problème X3C, tandis que Π dénote une partition de N dans le problème LPO_i-APPARTENANCE. De même, c_i désigne une coalition (sous-ensemble de N) dans le contexte d'un MHG.

PREUVE 15. — En premier lieu, le problème LPO_i-APPARTENANCE est dans coNP. En effet, toute partition Π_2 qui Pareto-domine localement une partition Π_1 peut servir en temps polynomial de certificat qu'une partition Π_1 n'est pas localement Pareto-optimale.

En second lieu, montrons que le problème LPO_i-APPARTENANCE est coNP-difficile. Pour cela, montrons qu'une instance $(X, \mathbb{C})$ de X3C peux être réduite au problème d'appartenance. Considérons le jeu $MHG = \langle N, (\succeq_i)_{a_i \in N}, LSC \rangle$ tel que $N = X$ et que, $\forall a_i \in N$, nous avons les préférences $c_1 \succ_i \ldots \succ_i c_k \succ_i N \succ_i \{a_i\}$ où $c_1 \succ_i \ldots \succ_i c_k$ est un ordre linéaire sur $\{c \in \mathbb{C} : a_i \in c\}$, l'ensemble des coalitions de N présentent dans $\mathbb{C}$. Toutes les autres coalitions contenant l'agent a_i sont considérées comme moins préféré à la coalition singleton de l'agent a_i. Considérons la partition $\Pi = \{N\}$ et un agent $a_i \in N$. Π est localement Pareto-dominée du point de vue de a_i si et seulement si, il existe un partition $C' \subseteq \mathbb{C}$ ($C' \neq N$) de X.

($\rightarrow$) Supposons dans un premier temps qu'il existe un sous-ensemble $C' \subseteq \mathbb{C}$, $C' \neq N$ tel que C' soit une partition de X. Par définition du profil de préférences, nous avons nécessairement $\forall a_j \in N$ un unique $c_j \in C'$ qui vérifie $c_j \succ_j N$. Ainsi par définition, Π est localement Pareto-dominée par C' et n'est donc pas localement Pareto-optimale du point de vue de a_i.

($\leftarrow$) Supposons maintenant qu'il n'existe pas de sous-ensemble $C' \subseteq \mathbb{C}$, $C' \neq N$ tel que C' soit une partition de X. Par définition du profil de préférences, il existe au moins un agent $a_j \in N$ tel que $\forall c \subseteq N, a_j \in c$, $\{N\} \succ_j c$. Ainsi par définition, Π est localement Pareto-optimale du point de vue de a_i.

Par conséquent, trouver une partition C' de X (problème NP-complet) est équivalent à trouver une partition Π_2 permettant de vérifier (en temps polynomial) que Π n'est pas Pareto-optimale. Le problème LPO_i-APPARTENANCE est donc coNP-complet. ∎

Considérons maintenant le cas de la stabilité consensuelle.

COROLLAIRE 16. — *Le problème de décision* COS-APPARTENANCE *est coNP-complet.*

PREUVE 17 (Intuition). — Par définition, une partition Π est consensuellement stable si $\forall a_i \in N, \Pi \in LX_i$. Par la propriété 14, LPO_i-APPARTENANCE est coNP-complet. Pour tous les autres concepts de solution locaux LX_i considérés, LX_i-APPARTENANCE est dans P. Comme nous n'émettons pas d'hypothèse sur les concepts de solution locaux de chaque agent, au pire des cas, tous les agents considérent la Pareto-optimalité locale. Rappelons que par la propriété 7, vérifier l'appartenance de Π à la stabilité consensuelle est alors équivalent à vérifier que Π est globalement Pareto-optimale, un problème de décisions coNP-complet (Aziz, Brandt, Harrenstein, 2013). ■

Comme nous l'avons montré précédement, si chaque concept de solution local pris indépendamment est nécessairement non-vide (propriété 12), il n'existe pas nécessairement une partition consensuellement stable. Décider de l'existence d'une partition satisfaisant la stabilité consensuelle nécessite de trouver une partition Π appartenant à tous les concepts de solution locaux considéré dans le MHG, ce qui est un problème dans Σ_2^P.

PROPRIÉTÉ 18. — *Le problème de décision* COS-EXISTENCE *est dans* Σ_2^P.

Afin de faciliter la compréhension de la preuve, nous rappelons que la hiérarchie polynomiale est définie par l'ensemble $\{\Sigma_k^P, \Pi_k^P, \Delta_k^P : k \geq 1\}$ avec $\Sigma_0^P = \Pi_0^P = \Delta_0^P = P$ et, pour tout $k \geq 0$, $\Sigma_{k+1}^P = NP(\Sigma_k^P)$, $\Pi_{k+1}^P = coNP(\Sigma_k^P)$ et $\Delta_{k+1}^P = P(\Sigma_k^P)$ (Stockmeyer, 1976). Remarquons en particulier que $NP = \Sigma_1^P$ et que $co - NP = \Pi_1^P$. Ainsi, la hiérarchie polynomiale peut être définie par une alternance de quantificateurs universels et existentiels. Un problème Σ_k^P peut être décrit par une formule de la forme $\exists X_1 \forall X_2 \exists X_3 \dots QX_k, f(X_1, \dots, X_k)$, f étant une formule propositionnnelle vérifiable en temps polynomial, et Q étant soit le quantificateur $\exists$ si k est impair, soit le quantificateur $\forall$ si k est pair. De même, un problème Π_k^P peut être décrit par une formule de la forme $\forall X_1 \exists X_2 \forall X_3 \dots QX_k f(X_1, \dots, X_k)$, Q étant soit le quantificateur $\exists$ si k est pair, soit le quantificateur $\forall$ si k est impair. La preuve suivante repose sur cette représentation de la hierachie polynomiale.

PREUVE 19. — Afin de prouver que le problème COS-EXISTENCE est dans Σ_2^P, nous montrons qu'il peut être réécrit par une formule de la forme $\exists X_1 : \forall X_2, f(X_1, X_2)$ où f est une formule propositionnelle pouvant être vérifiée en temps polynomial.

Considérons un $MHG = \langle N, (\succeq_i)_{a_i \in N}, LSC \rangle$. Décider de l'existence d'une partition consensuellement stable dans ce MHG signifie prouver que $\exists \Pi \in \mathcal{P}_N$: $\Pi \in CoS$. Or par définition de la stabilité consensuelle, ce problème est équivalent à trouver une partition Π qui satisfait le problème LX_i-APPARTENANCE pour tout $LX_i \in LSC$, soit équivalent à prouver que :

$$\exists \Pi \in \mathcal{P}_N : [\forall LX_i \in LSC, \Pi \in LX_i] \tag{1}$$

Subdivisons LSC en deux sous-ensembles de concepts de solution locaux : $LSC^A = \{LX_i \in LSC : LX \neq LPO_i\}$ et $LSC^B = \{LX_i \in LSC : LX = LPO_i\}$. LSC^B représente l'ensemble des concepts de Pareto-optimalité locale présents dans LSC. La Formule (1) peut être réécrite en :

$$\begin{aligned} \exists \Pi \in \mathcal{P}_N : [&\forall LX_i \in LSC^A, \Pi \in LX_i \\ &\wedge \forall LPO_i \in LSC^B, \Pi \in LPO_i] \end{aligned} \tag{2}$$

Comme pour tout concept de solution local $LX_i \neq LPO_i$, le problème d'appartenance LX_i-APPARTENANCE est dans P. Ainsi, la satisfaction par une partition Π de la première condition de la formule (2) peut être vérifiée en temps polynomial.

En revanche, vérifier la satisfaction de la seconde condition de la formule (2) est un problème coNP-complet puisque LPO_i-APPARTENANCE est coNP-complet. Nous pouvons cependant considérer la négation de ce problème de décision, c'est-à-dire vérifier qu'il n'existe pas de partition Π_2 qui Pareto-domine localement Π (noté $\Pi_2 \succ_i^P \Pi$) : $\forall \Pi_2 \in \mathcal{P}_N, \neg(\Pi_2 \succ_i^P \Pi)$. Ainsi, la formule 2 est équivalente à :

$$\begin{aligned} \exists \Pi \in \mathcal{P}_N : (\ \forall \Pi_2 \in \mathcal{P}_N, [\forall LX_i \in LSC^A, \Pi \in LX_i \\ \wedge \forall LPO_i \in LSC^B, \neg(\Pi_2 \succ_i^P \Pi)]\ ) \end{aligned} \tag{3}$$

Vérifier qu'une partition Π_2 ne Pareto-domine pas Π est un problème polynomial. Par conséquent, toutes les conditions de la formule (3) peuvent être vérifiées en temps polynomial. Ainsi, comme la Formule (3) est de la forme $\exists X_1 : \forall X_2, f(X_1, X_2)$ où f peut être vérifiée en temps polynomial, décider de l'existence d'une partition consensuellement stable – donc COS-EXISTENCE – est un problème dans Σ_2^P. ■

Remarquons que le problème COS-EXISTENCE présente plusieurs cas particuliers. Premièrement, en fonction des concepts de solution considérés par les agents, le problème de décision peut être facile à résoudre. Si tous les agents considèrent comme concept la rationalité locale, il existe trivialement toujours une solution. De même, si tous les agents considèrent la stabilité au sens du cœur locale, le problème devient équivalent à celui de la CS-EXISTENCE qui est NP-complet (Ballester, 2004 ; Elkind, Wooldridge, 2009). Plus généralement, si aucun agent ne considère la Pareto-optimalité locale alors le problème COS-EXISTENCE est « seulement » NP-complet. De manière intéressante, si tous les agents considèrent la Pareto-optimalité locale comme concept de solution alors le problème de décision devient trivial. En effet, cela est équivalent à décider de l'existence d'une solution Pareto-optimale dans un jeux hédonique canonique, ce qui est toujours vrai.

Les résultats de complexité précédents sont résumés dans le tableau 6. Ici, $\top$ désigne les cas où le problème LX_i-EXISTENCE est trivial car il existe toujours une solution.

Tableau 6. Classes de complexité des différents problèmes de décision

$\mathbf{LX_i}$	LX_i-EXISTENCE	LX_i-APPARTENANCE
LR_i	$\top$	P
LNS_i	$\top$	P
LIS_i	$\top$	P
$LCNS_i$	$\top$	P
$LICS_i$	$\top$	P
LCS_i	$\top$	P
LPO_i	$\top$	coNP-complet (Prop. 14)
LO_i	$\top$	P

COS-EXISTENCE	COS-APPARTENANCE
Σ_2^P (Prop. 18)	coNP-complet (corollaire 16)

3.4. Analyse empirique

De nombreux concepts canoniques n'ont en pratique que peu de solutions. Qu'en est-il des MHG ? Pour étudier cela empiriquement, nous considérons des MHG aléatoires avec une distribution uniforme des préférences et des concepts de solution locaux. Pour un nombre d'agents variant de 3 à 7, nous construisons 1000 jeux[2]. Notre étude porte sur (1) le nombre moyen de partitions consensuellement stables (comparé au nombre de partitions satisfaisant les concepts de solution canoniques), (2) la proportion de partitions consensuellement stables qui satisfont également les concepts de solution canoniques et (3) le taux moyen de MHG ayant au moins une partition consensuellement stable.

Tableau 7. Partitions stables selon le concept de solution et le nombre d'agents

$\|N\|$	3	4	5	6	7	
O	$0,084$	$0,007$	0	0	0	Concepts canoniques rationnels
NS	$0,343$	$0,219$	$0,158$	$0,095$	$0,054$	
CS	$1,024$	$1,12$	$1,177$	$1,241$	$1,3$	
IS	$1,09$	$1,399$	$1,892$	$2,836$	$4,86$	
IR	$1,968$	$3,269$	$6,44$	$13,745$	$31,882$	
CoS	$\mathbf{1,199}$	$\mathbf{1,547}$	$\mathbf{2,193}$	$\mathbf{3,14}$	$\mathbf{6,053}$	
CNS	$1,629$	$3,444$	$8,5$	$24,355$	$77,548$	Concepts canoniques irrationnels
PO	$2,949$	$6,869$	$18,35$	$54,126$	$171,896$	
ICS	$3,003$	$7,591$	$22,49$	$74,765$	$275,073$	
$\mathcal{B}_n$	5	15	52	203	877	

Le tableau 7 présente (par ordre quasi-croissant) le nombre moyen de partitions consensuellement stables (ligne $|CoS|$) ainsi que le nombre de solutions satisfaisant les concepts de solution globaux canoniques. La ligne $\mathcal{B}_n$ présente à titre indicatif le nombre de partitions pour n agents. Toujours à titre indicatif, le tableau 8 présente les écarts-types de nos résultats. Le point essentiel est que ce nombre de partitions stables est plus grand que presque tous ceux des concepts de solution rationnels (NS, IS, CS et O) et plus faible que ceux des concepts de solution irrationnels (CIS, CNS, PO). Seule la rationalité individuelle (IR) fait exception à cette règle.

La figure 2 présente la proportion de partitions stables qui satisfont aussi un concept de solution canonique. Une grande proportion des partitions stables est également Pareto-optimale ou individuellement contractuellement stable. Par exemple, 86 $\%$ des partitions stables à 7 agents sont également Pareto-optimales. Notre modèle est donc essentiellement une restriction à ces deux concepts tout en permettant parfois des solutions ne correspondant à aucun concept canonique (voir proriété 10 et groupe de données "Aucun" de la figure 2).

2. Nous sommes conscients des limites de cette étude, car, en considérant des préférences strictes tirées uniformément, n agents et m concepts de solution locaux, il y a $(m \times 2^{n-1}!)^n$ jeux différents, soit 7077888 jeux pour $n = 3$ et $m = 8$. Notons cependant qu'un grand nombre de ces jeux sont symétriques.

Tableau 8. Écarts types des résultats du tableau 7

$\|N\|$	3	4	5	6	7	
O	0.274	0.071	0	0	0	Concepts canoniques rationnels
NS	0.472	0.454	0.377	0.317	0.23	
CS	0.217	0.364	0.516	0.649	0.755	
IS	0.317	0.656	1.113	2.051	4.225	
IR	0.984	2.209	5.258	13.855	36.331	
CoS	**0.407**	**1.689**	**3.335**	**6.634**	**16.214**	
CNS	0.596	10.35	1.851	3.97	10.516	Concepts canoniques irrationnels
PO	1.034	2.246	5.246	14.219	42.537	
ICS	1.008	2.042	4.859	14.124	48.987	

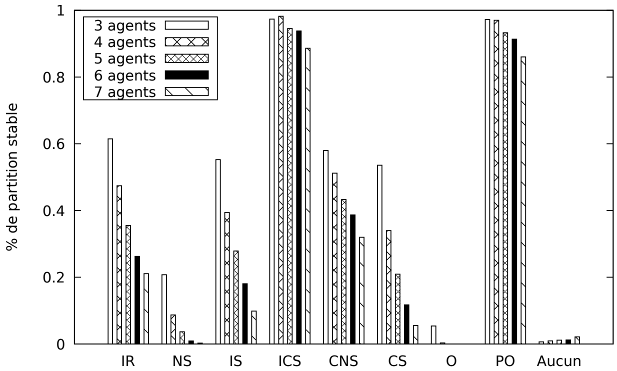

Figure 2. Taux de satisfaction des concepts de solution canoniques parmi les partitions consensuellement stables

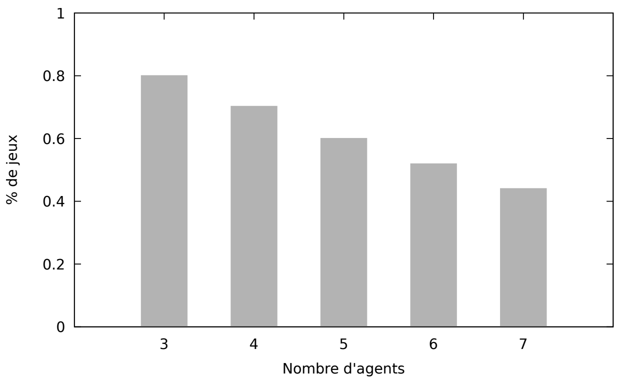

Figure 3. Taux de jeux ayant au moins une partition consensuellement stable en fonction du nombre d'agents

Enfin, la figure 3 indique la proportion de MHG ayant au moins une partition stable. Avec 3 agents, près de 80 % des jeux ont au moins une solution. Cette proportion décroit fortement et tombe à un peu plus de 40 % pour 7 agents. L'absence de solution stable peut s'expliquer par le fait que certains agents expriment des propriétés *trop restrictives*.

4. Des préférences sur les concepts

Ainsi, si l'absence de solution signifie que les règles de déviation des agents sont trop restrictives, alors le jeu aurait peut-être une solution si les agents pouvaient accepter de réduire leurs exigences en considérant d'autres concepts de solution locaux. Nous proposons donc ici une extension des MHG permettant aux agents de réduire leurs exigences vis-à-vis des propriétés que doit satisfaire une partition pour être stable, et ainsi aboutir à un véritable consensus.

4.1. Jeux de coalitions hédoniques à double profil

Dans ce nouveau modèle de jeu, nous proposons aux agents d'exprimer des préférences à la fois sur les coalitions auxquelles ils peuvent appartenir mais également vis-à-vis d'un ensemble de concepts de solutions locaux. Ce nouveau modèle – appelé *jeux de coalitions hédoniques à double profil* (ou HG2P) – a pour objectif de permettre aux agents, en l'absence de partition consensuellement stable, de *concéder* sur leurs préférences, c'est-à-dire accepter de considérer un autre concept de solution local moins préféré, et cela afin d'obtenir une solution.

DÉFINITION 20 (HG2P). — *Un* jeu de coalitions hédonique à double profil *est un tuple HG2P* $= \langle N, (\succeq_i^C)_{a_i \in N}, (\succeq_i^{LSC_i})_{a_i \in N}\rangle$ *où :*

– $N = \{a_1, \ldots, a_n\}$ *est l'ensemble des agents,*

– $\succeq_i^C$ *est la relation de préférence de l'agent* a_i *vis-à-vis des coalitions sous la forme d'un pré-ordre total avec indifférence sur* $\mathcal{N}_i$*,*

– $\succeq_i^{LSC_i}$ *est la relation de préférence de l'agent* a_i *vis-à-vis de* LSC_i *qui est un ensemble non-vide de concepts de solution locaux à l'agent* a_i*.*

EXEMPLE 21. — Considérons le jeu $HG2P = \langle N, (\succeq_i^C)_{a_i \in N}, (\succeq_i^{LSC_i})_{a_i \in N}\rangle$ avec $N = \{a_1, a_2, a_3\}$ et les profils de préférences[3] suivant :

$$\succeq_1^C = \{a_1, a_2\} \succ \{a_1\} \succ \{a_1, a_2, a_3\} \succ \{a_1, a_3\}$$

$$\succeq_2^C = \{a_2, a_3\} \succ \{a_1, a_2, a_3\} \succ \{a_1, a_2\} \succ \{a_2\}$$

$$\succeq_3^C = \{a_2, a_3\} \succ \{a_1, a_2, a_3\} \succ \{a_3\} \succ \{a_1, a_3\}$$

$$\succeq_1^{LSC_1} = \; LO \succ LNS \succ LCS \succ LIS \succ LCNS \succ LIR \succ LICS \succ LPO$$

3. Dans un souci de lisibilité, les indices sur les concepts de solution locaux et les opérateurs de comparaisons sont volontairement omis.

$$\succeq_2^{LSC_2} = LO \succ LNS \succ LIS \succ LCS \succ LIR \succ LCNS \succ LICS \succ LPO$$

$$\succeq_3^{LSC_3} = LO \succ LPO \succ LNS \succ LIS \succ LCNS \succ LICS \succ LCS \succ LIR$$

Dans ce jeu, chaque agent préfère strictement satisfaire l'optimalité locale comparée à tous les autres concepts de solution locaux. Par ailleurs, les agents a_1 et a_2 préfèrent satisfaire la stabilité au sens de Nash locale à la Pareto-optimalité locale, à l'inverse de l'agent a_3. □

Remarquons que, même si dans l'exemple 21 tous les agents considèrent tous les concepts de solution locaux donnés dans le tableau 2, ceci n'est pas nécessairement le cas. En effet, chaque agent est libre de ne pas considérer tous les concepts de solution locaux. Par exemple, un agent a_i qui désire garantir a minima une rationalité individuelle peut ne pas exprimer de préférence sur les concepts de solution irrationnels (CNS, PO, CIS). De plus, remarquons trivialement qu'un MHG est un cas particulier de HG2P où, pour tout agent a_i, $|LSC_i| = 1$. Il en est donc de même pour les jeux hédoniques canoniques.

Dans la suite, nous désignons par $LX_i \in LSC_i$ le fait que l'agent a_i considère le concept de solution local LX_i dans ses préférences vis-à-vis des concepts de solution locaux. Le rang d'un concept de solutions local LX_i (noté $r_i(LX_i)$) désigne la position de LX_i dans les préférences de a_i. Dans l'exemple 21, $r_1(LCS_1) = 3$. Lorsque le concept de solution LX_i n'est pas considéré par l'agent a_i – c'est-à-dire lorsque $LX_i \notin LSC_i$ –, nous considérons que $r_i(LX_i) = \infty$.

4.2. Stabilité et concessions

Afin de trouver une solution qui satisfait aux mieux les deux profils de préférences, les agents doivent trouver un concensus. Pour cela, nous proposons d'évaluer la stabilité d'une partition en fonction du nombre de *concessions* que chaque agent a à faire sur ses préférences vis-à-vis des concepts de solution.

DÉFINITION 22 (Vecteur de concessions). — *Soit un HG2P et* $\Pi \in \mathcal{P}_N$ *une partition de* N. *Le vecteur de* concessions *de* Π *est le vecteur* $\vec{c}(\Pi)$ *où :*

$$c_i(\Pi) = \begin{cases} r(LX_i^*) & \textit{si } \exists\, LX_i \in LSC_i \textit{tel que } \Pi \in LX_i \\ \infty & \textit{sinon} \end{cases}$$

avec $LX_i^* = \underset{LX_i \in LSC_i : \Pi \in LX_i}{\operatorname{argmin}} r(LX_i)$.

Intuitivement, le vecteur de concessions d'une partition représente combien de fois chaque agent doit choisir un concept de solution local qu'il préfère moins afin que la partition Π soit consensuellement stable. Par exemple, le tableau 9 donne les vecteurs de concessions des différentes partitions pour le HG2P de l'exemple 21. Remarquons que si, pour un agent $a_i \in N$, $c_i(\Pi) = \infty$ (ie. partition Π_1 dans le tableau 21) alors Π n'appartient à aucun des concepts de solution considérés par l'agent a_i et donc ne peut pas être consensuellement stable.

Tableau 9. Vecteur de concessions du HG2P de l'exemple 21

Π	$\vec{c}(\Pi)$
$\Pi_1 = \{\{a_1, a_2, a_3\}\}$	$[\infty, 2, 3]$
$\Pi_2 = \{\{a_1\}, \{a_2, a_3\}\}$	$[2, 1, 1]$
$\Pi_3 = \{\{a_1, a_3\}, \{a_2\}\}$	$[\infty, 5, \infty]$
$\Pi_4 = \{\{a_1, a_2\}, \{a_3\}\}$	$[1, 5, 2]$
$\Pi_5 = \{\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}\}$	$[6, 5, 8]$

Dans la suite, nous nommons concession de l'agent a_i la i-ème composante du vecteur de concessions. À partir des vecteurs de concessions, nous proposons un nouveau concept de solution *global* : la stabilité au sens de la *leximax-concession* ou leximax-stabilité. Ce concept est inspiré de la règle de sélection leximax définie par (Delecroix *et al.*, 2016) et du dernier cœur dans les jeux à utilité transférable (Shapley, Shubik, 1966). Il s'agit ici de chercher les partitions qui minimisent le nombre de concessions de l'agent ayant la concession maximale parmi tous les agents, puis la concession du second agent ayant la plus importante valeur, et ainsi de suite. Pour cela, les vecteurs de consessions sont ordonnés de manière décroissante et comparés selon l'ordre lexicographique. Une partition satisfait la leximax-stabilité si le vecteur de concessions correspondant n'est pas lexicographiquement dominé.

DÉFINITION 23 (Leximax-préférence). — *Soit un HG2P et* $\Pi, \Pi' \in \mathcal{P}_N$ *deux partitions de* N*. Soit* $[x_1, \ldots, x_n]$ *(resp.* $[y_1, \ldots, y_n]$*) les composantes de* $\vec{c}(\Pi)$ *(resp.* $\vec{c}(\Pi')$*) ordonnées de manière décroissante. La partition* Π *est* lexicographiquement préférée *à la partition* Π' *(noté* $\Pi \succ^{Lex} \Pi'$*) si, et seulement si,* $\exists k \in]1, n]$ *tel que :*

$$\forall i \in [1, k[: x_i = y_i \text{ et } x_k < y_k$$

DÉFINITION 24 (Leximax-stabilité). — *Soit un HG2P et* $\Pi \in \mathcal{P}_N$ *une partition de* N*.* Π *satisfait la* leximax-stabilité *– noté* $\Pi \in LexS$ *– si, et seulement si :*

(1) $\nexists\, a_i \in N$ *tel que* $c_i(\Pi) = \infty$*,*

(2) $\nexists\, \Pi' \in \mathcal{P}_N$ *tel que* $\Pi' \succ^{lex} \Pi$*.*

EXEMPLE 25. — Reprenons le HG2P de l'exemple 21. Dans ce jeu, les partitions Π_1 and Π_3 ne peuvent pas être consensuellement stables car elles ne satisfont aucun des concepts de solution locaux considérés par l'agent a_1. Parmi les trois autres partitions, nous avons les vecteurs de concessions ordonnés suivant :

$$\vec{c}(\Pi_2) = [2, 1, 1],\ \vec{c}(\Pi_4) = [5, 2, 1] \text{ et } \vec{c}(\Pi_5) = [8, 6, 5]$$

Ainsi, comme $\Pi_2 \succ^{lex} \Pi_4 \succ^{lex} \Pi_5$, la partition Π_2 est stable au sens de la Leximax-concession. □

Remarquons que, comme tout jeu de coalitions hédonique canonique peut être modélisé par un HG2P, un HG2P ne possède pas nécessairement de partition stable au sens de la leximax-concession. Cependant, comme certains concepts de solution canoniques dans un HG garantissent l'existence d'une solution, des conditions simples permettent d'assurer l'existence d'au moins une partition leximax-stable.

PROPRIÉTÉ 26. — *Soit $HG2P = \langle N, (\succeq_i^C)_{a_i \in N}, (\succeq_i^{LSC_i})_{a_i \in N} \rangle$ un jeu de coalitions hédonique à double profil. S'il existe un concept de solution global X^* tel que pour tout jeu hédonique HG, $X^* \neq \emptyset$ et que $\forall a_i \in N, LX_i^* \in LSC_i$, alors $LexS \neq \emptyset$.*

PREUVE 27. — Fixons un concept de solution global X^* tel que $\forall$HG, $X^* \neq \emptyset$. Soit LX_i^* le concept de solution local à l'agent a_i associé à X^*. Considérons $HG2P_1 = \langle N, (\succeq_i^C)_{a_i \in N}, (\succeq_i^{LSC_i})_{a_i \in N} \rangle$, un jeu tel que tous les agents considèrent LX_i^* dans leurs préférences vis-à-vis des concepts de solution : $\forall a_i \in N, LX_i^* \in LSC_i$.

Soit $HG_1 = \langle N, (\succeq_i^C)_{a_i \in N} \rangle$ le jeu de coalitions hédonique avec le même ensemble d'agents et le même profil de préférence vis-à-vis des coalitions. Par définition, nous avons $X^* \neq \emptyset$ pour le jeu HG_1. De plus, par la propriété 7, nous avons également :

$$\bigcap_{a_i \in N} LX_i^* \neq \emptyset$$

Ainsi, nous avons nécessairement $\forall a_i \in N, LX_i^* \neq \emptyset$. Soit $\Pi_1 \in \mathcal{P}_N$ une partition telle que $\forall a_i \in N, \Pi_1 \in LX_i^*$. Comme $\forall a_i \in N, LX_i^* \in LSC_i$, nous avons $c_i(\Pi_1) \neq \infty$. Ainsi, la partition Π_1 satisfait la premièree condition de la leximax-stabilité.

Supposons que Π_1 ne soit pas stable au sens de la leximax-concession. Par définition, cela signifie qu'il existe une partition $\Pi_2 \in \mathcal{P}_N$ telle que $\Pi_2 \succ^{lex} \Pi_1$. Comme $\infty \notin c_i(\Pi_1)$, nous avons nécessairement $\infty \notin c_i(\Pi_2)$ et donc Π_2 satisfait également la premièree condition de la leximax-stabilité. Ainsi, soit $\Pi_2 \in LexS$, soit il existe une partition $\Pi_3 \in \mathcal{P}_N, \Pi_3 \succ^{lex} \Pi_2$ qui est à son tour nécessairement leximax-stable.

Ainsi, si $\forall a_i \in N, LX_i^* \in LSC_i$, alors $LexS \neq \emptyset$. ■

Rappelons que, parmi les concepts canoniques que nous considérons, la rationalité individuelle, la Pareto-optimalité et la stabilité individuelle contractuelle garantissent l'existence d'une partition stable (Ballester, 2004 ; Bogomolnaia, Jackson, 2002 ; Sung, Dimitrov, 2007). Ainsi, même si cette condition peut sembler restrictive, il est raisonable en pratique que chaque agent a_i exprime au moins $LIR_i \in LSC_i$ en dernier rang de ses préférences. Cette hypothèse représente le fait que si les agents n'arrivent pas à trouver une solution les satisfaisant tous alors ils ne coopéreront pas et formeront leurs coalitions singletons.

Notons par aileurs, que si les agents ne considèrent pas le concept de solution local associé au même concept X^*, alors il n'existe pas nécessairement de solution. L'exemple 28 illustre un tel jeu.

EXEMPLE 28. — Considérons le jeu $HG2P = \langle N, (\succeq_i^C)_{a_i \in N}, (\succeq_i^{LSC_i})_{a_i \in N} \rangle$ avec $N = \{a_1, a_2\}$ et les profils de préférences [4] suivant :

$$\succeq_1^C = \{a_1, a_2\} \succ_1^C \{a_1\}$$

$$\succeq_2^C = \{a_2\} \succ_2^C \{a_1, a_2\}$$

$$\succeq_1^{LSC_1} = LPO_1 \succ_1^{LSC_1} LNS_1$$

$$\succeq_2^{LSC_2} = LNS_2 \succ_2^{LSC_1} LIR_2$$

Ici, l'agent a_1 considère dans ses préférences la Pareto-optimalité locale et l'agent a_2 la rationalité locale, deux concepts de solution dont les équivalents globaux garantissent l'existence d'une solution. Cependant, comme le montre le tableau 10, il n'existe pas de partition Π telle que $\forall a_i \in N, c_i(\Pi) \neq \infty$. Ce jeu n'a donc pas de partition leximax-stable.

Tableau 10. Satisfaction des concepts locaux

	$\{\{a_1\}, \{a_2\}\}$	$\{\{a_1, a_2\}\}$
LPO_1		✓
LNS_1		✓
LNS_2	✓	
LR_2	✓	
$\vec{c}(\Pi)$	$[\infty, 1]$	$[1, \infty]$

□

4.3. Complexité des HG2P

Comme pour les MHG, nous étudions ici la complexité des problèmes de décision liés aux HG2P. Considérons les deux problèmes suivants :

LEXS-EXISTENCE : Étant donné un HG2P, existe-t-il une partition $\Pi \in \mathcal{P}_N$ telle que $\Pi \in LexS$?

LEXS-APPARTENANCE : Étant donnés un HG2P, un agent $a_i \in N$, et une partition $\Pi \in \mathcal{P}_N$, est-ce que Π satisfait le concept de solution $LexS$?

Pour étudier ces problèmes, considérons dans un premier temps deux autres « sous-problèmes » de décision :

CONCESSION-EXISTENCE : Étant donnés un HG2P, un agent $a_i \in N$ et une partition $\Pi \in \mathcal{P}_N$, l'inégalité $c_i(\Pi) \neq \infty$ est-elle vérifiée ?

CONCESSION-VALUE : Étant donnés un HG2P, un agent $a_i \in N$, une partition $\Pi \in \mathcal{P}_N$ et un entier $k \in [1, |LSC_i|]$, l'égalité $c_i(\Pi) = k$ est-elle vérifiée ?

4. Dans un souci de lisibilité, les indices sur les concepts de solution locaux sont volontairement omis.

Intuitivement, le premier problème consiste à vérifier que la partition Π satisfait au moins l'un des concepts de solution locaux considérés par l'agent a_i, tandis que le second consiste à trouver le nombre exact de concessions que l'agent a_i doit faire pour que la partition Π soit localement stable.

LEMME 29. — *Le problème de décision* CONCESSION-EXISTENCE *est coNP-complet.*

L'intuition de la preuve est la suivante : montrer que $c_i(\Pi) \neq \infty$ revient à démontrer qu'il existe au moins un concept de solution local $LX_i \in LSC_i$ tel que $\Pi \in LX_i$. Or, si pour la majorité des concepts de solution cela peut être vérifié en temps polynomial, dans le cas de la Pareto-optimalité locale le problème est coNP-complet (voir la propriété 14). Par conséquent, au pire des cas, le problème de décision CONCESSION-EXISTENCE est coNP-complet.

LEMME 30. — *Le problème de décision* CONCESSION-VALUE *est* Σ_2^P.

PREUVE 31. — Considérons un $HG2P = \langle N, (\succeq_i^C)_{a_i \in N}, (\succeq_i^{LSC_i})_{a_i \in N} \rangle$, un agent $a_i \in N$, une partition $\Pi \in \mathcal{P}_N$ et un entier $k \in [1, |LSC_i|]$. Vérifier que l'égalité $c_i(\Pi) = k$ est vraie revient à vérifier la formule suivante :

$$\begin{aligned} &\exists LX_i^* \in LSC_i : r(LX_i^*) = k, \Pi \in LX_i^* \\ &\wedge \forall LX_i \in LSC_i : r(LX_i) < k, \Pi \notin LX_i \end{aligned} \tag{4}$$

Or, le problème de décision LPO_i-APPARTENANCE est coNP-complet (voir la propriété 14). Nous pouvons donc réécrire la formule 4 sous la forme $\exists X_1 : \forall X_2 f(X_1, X_2) \wedge \forall X_3, \forall X_4 f(X_3, X_4)$, ($f$ étant vérifiable en un temps polynomial). Si la seconde partie du problème est coNP-complet, la première est quant à elle Σ_2^P. Ainsi, pour un agent a_i et une partition Π, trouver la valeur exacte de $c_i(\Pi)$ est Σ_2^P. ■

Décider de ces deux « sous-problèmes » nous permet de décider des problèmes de LEXS-EXISTENCE et de LEXS-APEVPARTENANCE.

PROPRIÉTÉ 32. — *Le problème de décision* LEXS-EXISTENCE *est* Σ_2^P.

Intuitivement, prouver l'existence d'une partition stable au sens de la leximax-concession revient à montrer qu'il existe au moins une partition Π vérifiant le problème d'existence d'une concession CONCESSION-EXISTENCE pour tous les agents.

PREUVE 33. — Considérons un $HG2P = \langle N, (\succeq_i^C)_{a_i \in N}, (\succeq_i^{LSC_i})_{a_i \in N} \rangle$. Par définition de la leximax-stabilité, s'il existe une partition $\Pi \in LexS$, nous avons $\forall a_i \in N, c_i(\Pi) \neq \infty$. Par conséquent, décider de l'existence d'une partition stable au sens de la leximax-stabilité dans ce HG2P équivaut à montrer qu'il existe une partition $\Pi \in \mathcal{P}_N$ telle que, pour tout agent $a_i \in N$, nous avons l'inégalité $c_i(\Pi) \neq \infty$. Ainsi, nous devons vérifier que :

$$\exists \Pi \in \mathcal{P}_N : \forall a_i \in N, c_i(\Pi) \neq \infty \tag{5}$$

Comme montré par le lemme 29, pour un agent a_i donné, vérifier que $c_i(\Pi) \neq \infty$ est un problème coNP-complet. Rappelons que coNP $= \Pi_1^P$ et que nous pouvons réécrire un tel problème par une formule propositionnelle de la forme $\forall X_3, f(X_3)$, où f est vérifiable en temps polynomial. Ainsi, la formule 5 peut être réécrite en :

$$\exists \Pi \in \mathcal{P}_N : \forall a_i \in N, \forall X_3 f(X_3) \tag{6}$$

Notons que la formule 6 peut elle-même être écrite sous la forme $\exists X_1 : (\forall X_2, \forall X_3), f(X_1, X_2, X_3)$, correspondant à la définition d'un problème Σ_2^P. Ainsi, le problème de décision LEXS-EXISTENCE est Σ_2^P. ■

Remarquons encore qu'ici la complexité du problème est principalement due à la coNP-complétude du problème de décision LPO_i-APPARTENANCE. Cependant, pour tout agent $a_i \in N$ tel que $LPO_i \notin LSC_i$, vérifier que $c_i(\Pi) \neq \infty$ est facile. Par ailleurs, même si $LPO_i \in LSC_i$, vérifier que $\Pi \in LPO_i$ n'est nécessaire que si $\forall LX_i \in LSC_i, LX_i \neq LPO_i : \Pi \notin LX_i$, ce qui en pratique est assez rare. Rappelons également que sous certaines conditions raisonables, il existe nécessairement une partition stable au sens de la leximax-concession (voir la propriété 26). En conséquent, bien qu'au pire cas le problème de décision LEXS-EXISTENCE est Σ_2^P, il reste en pratique souvent facile.

Considérons maintenant le problème de l'appartenance LEXS-APPARTENANCE.

PROPRIÉTÉ 34. — *Le problème de décision* LEXS-APPARTENANCE *est* Π_3^P.

Intuitivement, comme une partition Π_2 telle que $\Pi_2 \succ^{Lex} \Pi$ est un certificat Σ_2^P que Π n'est pas stable au sens de la leximax-stabilité, le problème est coΣ_2^P soit Π_3^P.

PREUVE 35. — Considérons un $HG2P = \langle N, (\succeq_i^C)_{a_i \in N}, (\succeq_i^{LSC_i})_{a_i \in N} \rangle$ et une partition $\Pi \in \mathcal{P}_N$. La partition Π satisfait la leximax-stabilité s'il n'existe pas de partition $\Pi_2 \in \mathcal{P}_N$ lexicographiquement préférée à Π. Il est donc nécessaire de prouver que :

$$\begin{gathered} \forall a_i \in N, c_i(\Pi) \neq \infty \\ \wedge \forall \Pi_2 \in \mathcal{P}_N, \Pi_2 \neq \Pi, \Pi \succ^{lex} \Pi_2 \end{gathered} \tag{7}$$

Nous avons déjà montré que la première condition est un problème de vérification coNP-complet (voir le lemme 29). Intéressons-nous à la seconde condition et à la vérification de l'inégalité $\Pi \succ^{lex} \Pi_2$. Vérifier cette inégalité nécessite de calculer les deux vecteurs de concessions $c(\vec{\Pi})$ et $c(\vec{\Pi}_2)$. Or, calculer le vecteur de concession d'une partition revient à trouver le $k \in [1, |LX_i|]$ tel que $c_i(\Pi) = k$ pour tout agent $a_i \in N$. Ainsi, vérifier cette dernière égalité est Σ_2^P (voir le lemme 30).

Par conséquent, la seconde partie de la formule 7 est un problème de la forme $\forall X_1, \exists X_2 : \forall X_3, f(X_1, X_2, X_3)$, correspondant à la définition d'un problème Π_3^P. Ainsi, vérifier qu'une partition Π est stable au sens de la leximax-stabilité est un problème Π_3^P. ■

Nous avons donc montré qu'au pire cas il est difficile de vérifier l'existence d'une partition qui fasse consensus au regard des profils de préférences sur les concepts de solution. Par ailleurs, même sous des hypothèses garantissant l'existence d'une telle partition (propriété 26), il est difficile de trouver une solution. Cependant, cette complexité tient compte de cas où la solution stable doit satisfaire les concepts de solutions les moins préférés de tous les agents. De tels cas sont-ils fréquents en pratique ? Si ce n'est pas le cas, trouver une solution pourrait être en général plus facile. Pour cette raison, nous proposons une analyse empirique des concessions faites par les agents.

4.4. Analyse empirique des concessions

Comme dans la section 4.4, nous présentons ici une étude empirique des HG2P en considérant des jeux aléatoires, c'est-à-dire où chaque agent a_i tire uniformément ses préférences sur les coalitions $\mathcal{N}_i = \{C \subseteq N : a_i \in C\}$ et sur les concepts de solution locaux $LSC_i = \{LIR_i, LNS_i, LIS_i, LICS_i, LCNS_i, LCS_i, LO_i, LPO_i\}$.

Notons ici que tous les agents considèrent tous les concepts de solution locaux présentés dans le tableau 2. Ainsi, il existe nécessairement dans nos expérimentation une partition stable au sens de la leximax-concession. Cependant, notre étude porte ici sur la qualité des vecteurs de concessions nécessaires à la satisfaction de la leximax-stabilité.

La figure 4 présente la proportion des vecteurs de concessions pour 5 agents sur 10000 jeux aléatoires. Nous ne considérons ici que des vecteurs anonymes : le vecteur de concessions $[2, 3, 1, 2, 1]$ est équivalent au vecteur $[3, 2, 2, 1, 1]$ par exemple. Nous pouvons voir qu'environ 60 % des jeux sont sans concession (jeux où toutes partitions leximax-stables Π à un vecteur de concessions de la forme $\vec{c}(\Pi) = [1, \dots, 1]$). Nous retrouvons ainsi la proportion de partitions consensuellement stables dans les MHG – comme illustré sur la figure 3. Par ailleurs, 30 % des jeux ne nécessitent qu'une seule concession de la part d'un unique agent. De manière globale, un peu plus de 98 % des jeux nécessitent au plus que 2 agents concèdent une fois leurs préférences. Les autres vecteurs de concessions sont quant à eux des cas anecdotiques. Par exemple, seul 1 jeu sur 10000 nécessite que 2 agents concèdent 2 fois sur leurs préférences pour trouver une partition leximax-stable.

La figure 5 présente les concessions moyennes des agents et leur écart type sur 1000 jeux. Bien qu'augmentant légèrement avec le nombre d'agents, elles varient entre $0,08$ et $0,11$ pour un nombre d'agents variant entre 3 et 7 agents. Ainsi, de manière générale, un agent n'est contraint à concéder sur ses préférences que dans 1 jeu sur 10. L'augmentation de l'écart type indique que plus les agents sont nombreux, plus ils doivent concéder sur leurs préférences pour obtenir une partition leximax-stable. Toutefois, 98 % des jeux avec 5 agents n'ont au plus que deux concessions. Ce chiffre tombe à 89 % sur les jeux à 7 agents.

Ainsi, si théoriquement, il est possible de trouver un jeu tel que tous les agents concédent au maximum sur leurs préférences, il apparaît que ces cas sont extrêmement rares [5]. Par ailleurs, dans leur grande majorité, les jeux de coalitions hédoniques à

5. Nous n'avons jamais observé ce cas dans nos expérimentations.

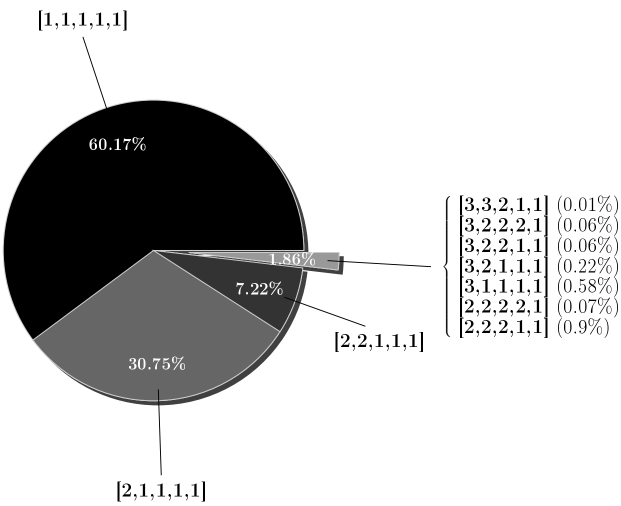

Figure 4. Proportions des concessions

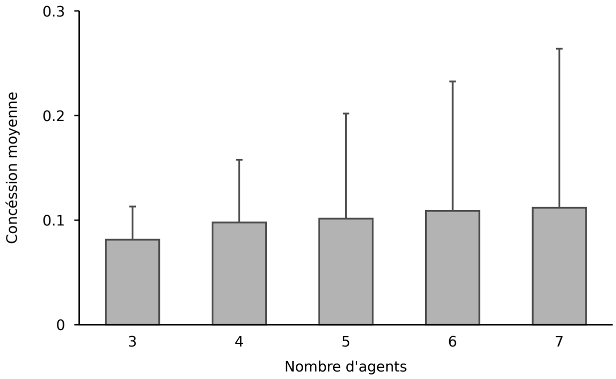

Figure 5. Concessions moyennes par agent

double profil ont une partition leximax-stable qui requiert un très faible nombre de concessions.

5. Conclusion et perspectives

Dans cet article, nous considérons un problème de la formation de coalitions hédoniques où des agents hétérogènes expriment des concepts de solution différents. Pour ce faire, nous proposons les *jeux de coalitions hédoniques à concepts de solution multiples* (MHG) qui utilisent des *concepts de solution locaux* et les *jeux de coalitions hédoniques à double profil* (HG2P) où les agents expriment des préférences entre ces concepts locaux. Trouver une partition stable revient à trouver un consensus entre les concepts de solution locaux des agents (*stabilité consensuelle*, en maximisant la satisfaction des préférences vis-à-vis de ces derniers (*leximax-concession*). Nous avons montré que les concepts de solution locaux satisfont les mêmes propriétés que leurs équivalents globaux, en particulier les propriétés d'inclusion, et stabilisent des partitions qui n'appartiennent à aucun concept global canonique. Nous avons caractérisé les classes de complexité des problèmes de décision liées à ces deux nouvelles classes de jeux hédoniques. Enfin, nos expériences montrent que, si quelques rares jeux nécessitent plusieurs concessions pour avoir une solution, la majorité des jeux ont une solution où seulement un ou deux agents doivent concéder d'un rang dans leurs préférences.

Ce travail ouvre plusieurs perspectives sur les expérimentations, les modèles en eux-mêmes et aussi leur intégration dans un cadre plus large.

En premier lieu, il nous semble important de compléter les expérimentations. En effet, les résultats obtenus sont nécessairement dépendants des hypothèses que nous avons faites : nombre d'agents réduit et tirage uniforme des préférences. Or, dans un contexte plus réaliste, il semble nécessaire de considérer plus d'agents et surtout de considérer des relations de préférences structurées, qu'elles portent sur les agents (relations de préférences additives par exemple) ou sur les concepts de solution. Intuitivement, il peut être intéressant de se servir des relations d'inclusion entre concepts pour déduire une relation de préférence ayant du sens : un agent préférera toujours l'optimalité individuelle à la stabilité contractuelle de Nash par exemple.

D'un point de vue plus formel, il serait intéressant d'étudier les implications stratégies liées à l'introduction d'un nouveau profil de préférence. Certes, ce dernier s'exprime sur les concepts de solution mais, comme le profil de préférence classique, il a une influence sur la solution globale. Ainsi, un agent pourrait-il exprimer stratégiquement des préférences sur les concepts de solution de manière à tirer parti de la stabilité consensuelle ou de la leximax-stabilité ?

En termes de perspectives plus larges, ce travail s'inscrit au sein d'un projet portant sur la modélisation d'agents éthiques. L'objectif à long terme est de permettre aux agents d'exprimer des préférences sur des concepts de solution qui ne seraient pas des concepts classiques (contrairement à ce qui a été présenté dans cet article) mais qui exprimeraient une éthique des vertus ou des valeurs humaines (Schwartz, 2012), intégrable dans une architecture d'agent éthique comme celle de (Cointe *et al.*, 2016). Par exemple, nous pourrions modéliser des concepts altruistes, identiques à une Pareto-optimalité si ce n'est que l'agent altruiste ne considérerait pas ses propres préférences. Pour ce faire, il serait pertinent de généraliser les MHG en caractérisant les concepts de solution locaux non pas comme une propriété d'un seul tenant mais comme une combinaison de règles de déviation élémentaires, comme (Sung, Dimitrov, 2007).

Remerciements

Ce travail a été réalisé dans le cadre du projet ANR ETHICAA (ANR-13-CORD-0006). Nous remercions par ailleurs Gaëtan Richard pour ses conseils avisés.

Bibliographie

Aziz H., Brandt F., Harrenstein P. (2013). Pareto optimality in coalition formation. *Games and Economic Behavior*, vol. 82, p. 562 - 581.

Aziz H., Brandt F., Seedig H. G. (2013). Computing desirable partitions in additively separable hedonic games. *Artificial Intelligence*, vol. 195, p. 316–334.

Ballester C. (2004). NP-completeness in hedonic games. *Games and Economic Behavior*, vol. 49, n° 1, p. 1–30.

Bogomolnaia A., Jackson M. O. (2002). The stability of hedonic coalition structures. *Games and Economic Behavior*, vol. 38, n° 2, p. 201–230.

Brandl F., Brandt F., Strobel M. (2015). Fractional hedonic games: Individual and group stability. In *14th AAMAS*, p. 1219–1227.

Cointe N., Bonnet G., Boissier O. (2016). Ethical judgment of agents' behaviors in multi-agent systems. In *15th AAMAS*, p. 1106–1114.

Delecroix F., Morge M., Nachtergaelle T., Routier J.-C. (2016). Multi-party negotiation with preferences rather than utilities. *Int. J. of Cloud Computing*, vol. 12, n° 2, p. 27.

Dreze J. H., Greenberg J. (1980). Hedonic coalitions: Optimality and stability. *Econometrica*, p. 987–1003.

Elkind E., Wooldridge M. (2009). Hedonic coalition nets. In *8th AAMAS*, p. 417–424.

Ghaffarizadeh A., Allan V. H. (2013). History based coalition formation in hedonic context using trust. *Int. J. of AI & Applications*, vol. 4, n° 4, p. 1–8.

Peters D., Elkind E. (2015). Simple causes of complexity in hedonic games. In *24th IJCAI*, p. 617–623.

Schwartz S. H. (2012). An overview of the Schwartz theory of basic values. *Online Readings in Psychology and Culture*, vol. 2, n° 1, p. 11.

Shapley L. S., Shubik M. (1966). Quasi-cores in a monetary economy with nonconvex preferences. *Econometrica*, p. 805–827.

Stockmeyer L. J. (1976). The polynomial-time hierarchy. *Theoretical Computer Science*, vol. 3, n° 1, p. 1–22.

Sung S. C., Dimitrov D. (2007). On myopic stability concepts for hedonic games. *Theory and Decision*, vol. 62, n° 1, p. 31–45.