Modélisation multiniveau du bien-être social dans un SMA ⋆

Application aux problèmes d'affectation et d'appariement

Antoine Nongaillard [1], **Sébastien Picault** [1,2]

1. Univ. Lille, CNRS, Centrale Lille, UMR 9189 – CRIStAL (équipe SMAC)
Centre de Recherche en Informatique Signal et Automatique de Lille, France
prenom.nom@univ-lille.fr

2. Bioepar, INRA, Oniris, Nantes

RÉSUMÉ. *Les Systèmes Multi-Agents (SMA) permettent de définir et de comparer empiriquement des mesures de bien-être social agrégeant des préférences individuelles, tout en protégeant leur caractère privé. Ces travaux ont permis l'élaboration de protocoles de résolution pour les problèmes d'affectation de ressources ou d'appariement. Or, l'émergence récente de SMA* multiniveau *offre l'opportunité d'aller plus avant dans cette démarche, en représentant explicitement des points de vue intermédiaires entre l'individu et le collectif. Nous proposons ici une modélisation permettant le choix de métriques pertinentes pour le bien-être de chaque groupe d'agents. Elle permet d'exprimer dans un formalisme homogène des problèmes d'affectation ou d'appariement variés, mais aussi de traiter de même des variantes difficilement formalisables de façon classique. Enfin, nous esquissons des principes généraux pour la construction de solveurs distribués pour ce type de modélisation.*

ABSTRACT. *Multiagent Systems (MAS) allow for empirical comparisons between social welfare metrics, but with a preservation of the privacity of invidual preferences, leading to solving protocols for assignment or matching problems. The recent multi-level MAS offer an explicit representation of intermediate viewpoints between the individual and the collective levels. We propose a multi-level welfare model to define relevant welfare metrics for each agent group. Not*

⋆. Le présent article fait partie intégrante de la sélection des meilleures contributions soumises aux vingt-quatrième Journées Francophones sur les Systèmes Multi-Agents (JFSMA 2016) qui s'est tenue à Saint Martin du Vivier, à proximité de Rouen (FR) du 5 au 7 octobre 2016.

Revue d'intelligence artificielle – n° 6/2017, 709-734

only matching and assignment problems are handled through the same formalism, but subtle variations can also be addressed. Finally, we outline the general principles for distributed solvers within this modeling.

MOTS-CLÉS : *théorie du choix social, modélisation multiniveau, problèmes d'appariement et d'affectation.*

KEYWORDS: *social choice theory, multi-level modeling, assignment and matching problems.*

DOI:10.3166/RIA.31.709-739

1. Introduction

Les problèmes d'affectation de ressources et d'appariement entre agents constituent deux grandes familles génériques de problèmes, qui ont fait l'objet d'études approfondies par des méthodes variées, tant du point de vue de leur modélisation que de leur résolution. Ils ont en outre fait l'objet de déclinaisons extrêmement spécifiques pour répondre à des contextes d'application nombreux et hétérogènes, entraînant de fait un foisonnement d'algorithmes qui rivalisent d'efficacité face à des instances de plus en plus complexes.

Dans cet article, nous proposons une modélisation multi-agent et multiniveau de ces problèmes. Nous faisons l'hypothèse que chaque élément du système à modéliser, y compris les divers niveaux d'organisation ou d'observation pertinents pour décrire le fonctionnement de ce système, est représenté par un agent, et que chacun de ces agents dispose d'une fonction lui permettant de calculer sa satisfaction individuelle à partir de son environnement, ses contraintes propres et des agents avec qui il est en relation. Les objectifs et les contraintes de chaque élément du système sont donc définis explicitement, même s'ils restent privés, c'est-à-dire connus uniquement de l'agent concerné. Nous souhaitons montrer qu'une telle modélisation permet non seulement d'englober dans un même formalisme les problèmes d'affectation de ressources et d'appariement entre agents, mais aussi de représenter plus facilement des cas dont la formalisation est compliquée. Par ailleurs, bien que cet article se focalise sur les questions de modélisation et de représentation de ces problèmes, nous esquissons les principes d'une méthode de résolution distribuée basée la satisfaction de chaque agent vis-à-vis de ses contraintes propres, et autorisant également une certaine confidentialité des informations.

L'article est organisé comme suit. Dans la section suivante, nous rappelons la définition des problèmes d'affectation et d'appariement ainsi que quelques méthodes de modélisation et de résolution parmi les plus classiques. Nous montrons les limites de leur expressivité et nous présentons notre contribution et nos objectifs. Nous exposons ensuite (section 3) la façon dont nous avons construit un modèle de mesure de bien-être multiniveau qui prend intrinsèquement en compte la structure du groupe d'agents. Nous illustrons à travers plusieurs exemples la capacité de cette approche à exprimer une composition complexe de points de vue et de préférences collectives (section 4). Après quoi, nous montrons d'une part le lien formel qui peut être établi entre la définition des problèmes d'affectation et d'appariement et notre modélisation multiniveau, et d'autre part, comment ce dernier permet d'intégrer facilement des variantes de ces problèmes ou des contraintes supplémentaires qui d'ordinaire sont difficiles à prendre en compte (section 5). Nous esquissons également les principes d'algorithmes de résolution (section 6). Avant de conclure, nous discutons de manière approfondie des avantages et limitations de notre approche ainsi que des questions qui restent en suspens à ce stade et appellent des travaux ultérieurs.

2. Positionnement et contribution

Rappelons qu'un problème d'affectation de ressources consiste à déterminer une distribution d'un ensemble de ressources sur un ensemble d'individus, en cherchant à optimiser un objectif basé sur l'agrégation de mesures individuelles. Un problème d'appariement consiste à former des groupes d'individus en optimisant un objectif basé sur l'agrégation des évaluations formulées par chaque individu à l'égard des autres membres de leur groupe. La description formelle de ces deux familles de modèles est donnée dans la section 5, où nous établissons le lien explicite avec notre propre formalisme.

2.1. Les approches classiques centralisées

Bien que les problèmes d'affectation et d'appariement présentent des similarités, ils sont toujours abordés comme étant de nature distincte, en particulier en raison de la possibilité ou non pour les « ressources » d'exprimer des préférences vis-à-vis des autres membres de leur groupe. La notion de ressource est claire dans un problème d'affectation. Dans un problème d'appariement, chaque agent à apparier est considéré comme une « ressource ». Ces problèmes sont de ce fait résolus par des familles d'algorithmes propres à chacun, voire à chaque sous-problème spécifique.

Ces familles peuvent être modélisées à travers divers paradigmes, parmi lesquels les problèmes de satisfaction de contraintes (CSP), l'optimisation multi-objectif (qui vise à trouver des solutions de compromis entre divers objectifs potentiellement contradictoires), ou l'optimisation multicritère (qui cherche à optimiser une métrique composite).

En termes de résolution, les méthodes les plus courantes sont centralisées et à information complète, c'est-à-dire que toutes les préférences ou contraintes sont publiques et manipulées par un solveur global. Parmi les algorithmes les plus connus en la matière, on peut citer bien évidemment l'algorithme hongrois pour l'affectation de ressources (Kuhn, 1955) et l'algorithme de Gale-Shapley pour l'appariement (Gale, Shapley, 1962).

Ces méthodes s'attachent en général à identifier les solutions optimales en valeur absolue, en faisant l'hypothèse forte d'une information complète et publique. Les mécanismes permettant d'atteindre une solution depuis un point de départ donné ne sont pas une préoccupation de ces méthodes.

2.2. Les approches distribuées

Depuis quelques années, ces problèmes ont également fait l'objet d'une modélisation au sein du paradigme multi-agent. Peut se poser dans les SMA la problématique de l'allocation de ressources ou de tâches au sein d'une population d'agents : les SMA constituent alors simplement un domaine d'application (Chevaleyre *et al.*, 2006 ; Airiau, Endriss, 2013 ; Weerdt *et al.*, 2011), pour lequel il semble naturel de chercher des méthodes de résolution distribuées (Macarthur *et al.*, 2011). D'autre part, les SMA peuvent être utilisés comme cadre de résolution distribuée pour les problèmes d'allocation ou d'appariement.

Certaines de ces approches sont une simple distribution du calcul (Netzer *et al.*, 2015 ; Brito, Meseguer, 2005) et ne s'intéressent donc pas à proprement parler aux *comportements* à donner aux agents pour atteindre une solution, mais plutôt à un protocole à mettre en place (par exemple sous une hypothèse de rationalité individuelle) ainsi qu'à la caractérisation des solutions qui s'ensuivent (Pareto-optimalité, absence d'envie...).

L'*éco-résolution* (Drogoul, Dubreuil, 1991) s'intéresse au contraire à une résolution générique de ces problèmes par des comportements inspirés de l'éthologie (agression, fuite, etc.) et a été appliquée avec succès à des problèmes durs comme le taquin. Néanmoins, la pertinence de la métaphore biologique se paie d'une difficulté à instancier ces comportements dans chaque domaine d'application, ainsi qu'à spécifier l'ordonnancement des agents, de sorte que la mise en œuvre de l'éco-résolution peut s'avérer très complexe dans un cas réel (Sohier *et al.*, 1998).

D'autres méthodes plus récentes cherchent à renforcer le caractère privé des préférences et des contraintes : par exemple des algorithmes distribués garantissant la confidentialité de ces informations ont été proposés par Nongaillard et Mathieu (2011) pour les problèmes d'affectation et par Everaere *et al.* (2012) pour les problèmes d'appariement. En outre, l'approche multi-agent se prête particulièrement bien à l'explicitation du point de vue de chacun des acteurs impliqués dans la résolution. Cette modélisation plus « naturelle » facilite l'acquisition de l'expertise relative aux préférences et contraintes, et offre une ouverture vers des optimisations multicritères ou multi-objectif. En contrepartie se pose le problème de la mesure de satisfaction, qui ne peut être qu'individuelle (le niveau des agents) ou collective (le niveau du SMA).

Néanmoins, ces approches sont avant tout une *distribution* sous forme d'agents des préférences individuelles et de la résolution de l'affectation ou de l'appariement. Or, les SMA permettent d'aller bien au-delà de cette seule distribution en prenant en compte des aspects relationnels (par exemple sous forme de réseaux d'accointances pour spécifier quels agents peuvent négocier), comportementaux (en introduisant des stratégies variées dans le choix des partenaires de la négociation ou des ressources à mettre en jeu, ou encore des effets de mémoire), et organisationnels (par l'introduction explicite de groupes d'agents partageant certains intérêts). La prise en compte de ces facteurs dans la formulation classique des problèmes d'affectation ou d'appariement est rare puisque cela suppose déjà une forme de distribution qui est exclue des méthodes globales.

2.3. Contribution

La proposition que nous présentons ici se veut une exploration de la prise en compte d'une structuration multiniveau du SMA pour la modélisation des problèmes d'affectation ou d'appariement. La simulation multiniveau, qui consiste depuis les travaux précurseurs de (Servat, 2000) à introduire dans un SMA des agents représentant divers niveaux d'organisation ou d'observation de ce SMA, se sont fréquemment appuyés sur des approches récursives, que ce soit à travers des plateformes comme SWARM (Minar *et al.*, 1996) ou des modèles commes les systèmes holoniques (Fischer *et al.*, 2003). Néanmoins, le caractère strictement hiérarchique de ces approches peut constituer une hypothèse limitante forte (Rodríguez, 2005, p. 120). À l'inverse, une approche non hiérarchique comme AGRE (Ferber *et al.*, 2005) repose sur une autre hypothèse restrictive, celle d'une séparation forte entre environnements physiques et environnements sociaux. Les méta-modèles multiniveaux récents (Morvan *et al.*, 2011 ; Picault, Mathieu, 2011 ; Drogoul *et al.*, 2013 ; Siebert *et al.*, 2010), en s'attachant à étudier d'autres couplages possibles entre niveaux d'organisation ou d'observation, ont pris une importance croissante au sein des SMA ces dernières années. De leur cadre d'origine en simulation, ils commencent à essaimer vers d'autres domaines jusqu'à la résolution distribuée de contraintes (Maudet *et al.*, 2014). Il y a donc lieu de penser qu'ils peuvent également s'appliquer à d'autres types de problèmes, notamment pour représenter des stades intermédiaires entre les « individus » et le système global.

Dans cet article, nous proposons donc une modélisation multiniveau de ces problèmes et posons les bases d'une méthode de résolution, qui permettent l'explicitation des objectifs et des contraintes de chaque élément du système, une résolution distribuée basée sur la satisfaction par chaque agent de ses contraintes propres, et la prise en compte d'une certaine confidentialité des informations. Nous souhaitons par notre modélisation augmenter l'étendue des contraintes et préférences qui peuvent être exprimées à chaque niveau d'organisation, via la possibilité de construire des métriques composites. Notre objectif à plus long terme est également d'expliciter des mécanismes permettant aux agents de construire un chemin entre une situation initiale et une solution aux propriétés désirables.

3. Modèle proposé

3.1. Cadre formel multiniveau

Dans cette section, nous présentons le cadre de modélisation multiniveau dans lequel nous nous plaçons. Nous considérons en particulier que toutes les entités nécessaires (« individu », « ressource », « groupe »...) sont représentées par des agents liés par des relations d'appartenance. Cette relation n'est pas nécessairement hiérarchique, dans la mesure où, selon les problèmes, il peut arriver par exemple qu'une ressource soit partagée par plusieurs individus ou que des personnes fassent partie de plusieurs groupes.

Ces caractéristiques nous ont portés à choisir une formalisation issue d'une version simplifiée du métamodèle de simulation PADAWAN (Picault, Mathieu, 2011), qui a déjà fait l'objet d'une adaptation pour la résolution distribuée de contraintes dans le cadre de la généralisation cartographique (Maudet *et al.*, 2014). Dans le contexte présent, nous ne nous intéressons pas aux relations spatiales entre agents. Aussi, nous pouvons considérer que lorsqu'un agent peut héberger d'autres agents, l'environnement dans lequel ces derniers sont situés peut être décrit de façon minimale en utilisant le pattern *AgentSet* tel que défini par Mathieu *et al.* (2015), c'est-à-dire un simple conteneur d'agents dépourvu de représentation spatiale explicite.

Nous utiliserons donc dans la suite les définitions suivantes. L'ensemble de tous les agents est noté $\mathbb{A}$, et $a_1 \sqsubset a_2$ désigne le fait que l'agent a_1 est **hébergé** par l'agent a_2 (ou a_2 est l'hôte de a_1). Les agents pouvant désigner aussi bien des individus que des ressources ou des groupes, la relation $\sqsubset$ exprime les liens d'appartenance (en général a_1 et a_2 sont de types différents mais cela n'est pas une obligation). On autorise un agent à être hébergé simultanément par plusieurs autres agents (pour pouvoir représenter l'appartenance à des groupes multiples). La relation $\sqsubset$ induit un *graphe d'hébergement* entre agents, orienté et qui par hypothèse doit être sans cycles (figure 1). Cette relation s'entend entre les *instances* d'agents, mais si l'on dispose de *types* (i.e. sous-ensembles de $\mathbb{A}$), on peut évidemment décrire des règles d'hébergements valables entre ces types (par exemple, une *personne* peut être hébergée par une *maison* mais pas l'inverse). Dans un problème d'affectation, les ressources sont « hébergées » par les agents auxquels elles sont allouées. Par exemple, face à un problème d'affectation d'invités à des tables, les ressources sont les invités qui sont « hébergés » aux tables. De manière similaire, dans un problème d'appariement comme par exemple le problème des mariages stables, les ressources que sont les individus sont « hébergés » par des couples.

On définit également les *hôtes* de a comme $hosts(a) = \{a_i \in \mathbb{A} | a \sqsubset a_i\}$ et réciproquement $content(a) = \{a_j \in \mathbb{A} | a_j \sqsubset a\}$ (le *contenu* de a). Ainsi dans l'exemple donné figure 1, on a $content(a) = \{c_1, c_2, c_3\}$ et $hosts(a) = \{b_1, b_2\}$.

Cette structuration du SMA par les relations d'hébergement nous amène à une modélisation particulière du bien-être des agents.

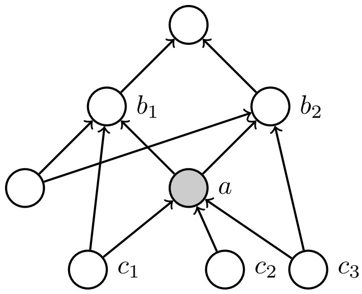

Figure 1. Exemple de graphe d'hébergement entre agents. La flèche représente la relation $\sqsubset$. L'agent a est hébergé par b_1 et par b_2, et héberge lui-même les agents c_1, c_2 et c_3

3.2. Modélisation du bien-être

Les notions de satisfaction et de bien-être social que nous utilisons sont dérivées de celles introduite par (Arrow, 1963 ; Sen, 1970), mais leur définition a été étendue pour prendre en compte les différents aspects liés au cadre multiniveau. De manière analogue à (Simonin, Ferber, 2000) qui décompose le calcul de la satisfaction individuelle sur différents paramètres selon ses perceptions, le point de vue que nous adoptons consiste à calquer le calcul du bien-être sur les relations d'hébergement du SMA. Pour cela nous décomposons le bien-être (*welfare*) $w(a)$ d'un agent en trois facteurs pouvant s'agréger de façon variable selon le domaine, et qui représentent respectivement l'agent en tant qu'*individu situé* ($\sigma(a)$), en tant que *voisin d'autres agents* ($\mu(a)$) et en tant qu'*hôte* ($\gamma(a)$).

$$w(a) = f_a(\sigma(a), \mu(a), \gamma(a))$$

La fonction f_a, qui détermine comment ces trois facteurs se combinent, peut être choisie arbitrairement en fonction de la situation à modéliser. L'absence de cycle dans le graphe d'hébergement permet un calcul cohérent des valeurs de bien-être en effectuant les calculs par *niveaux*.

3.2.1. En tant qu'individu

La contribution $\sigma(a)$ (pour « *situation* ») représente la *satisfaction de l'agent a en tant qu'individu placé dans une certaine structure*. Cette valeur peut donc être calculée d'après l'état de l'agent a mais aussi en fonction des caractéristiques *perçues* de ses hôtes et de leurs propres « ancêtres » (ainsi que l'illustre la figure 2) définis comme suit au moyen de la clôture transitive de $\sqsubset$:

$$\mathcal{H}(a) = \{h \in \mathbb{A} | a \sqsubset h \vee \exists h' \in \mathcal{H}(a), h' \sqsubset h\}$$

Ainsi par exemple, dans un problème d'affectation d'individus à des groupes au sein d'organisations, la satisfaction d'une personne dépend de son état propre, des caractéristiques de son rôle dans le groupe, du groupe lui-même, mais aussi de l'organisation dont ce groupe fait partie, etc. La satisfaction en tant qu'individu ne nécessite pas de tenir compte de tous les niveaux, mais c'est possible de le faire si nécessaire selon le problème étudié. Dans un souci de maintien d'autonomie et de confidentialité de l'agent conformément au modèle PADAWAN ((Picault, Mathieu, 2011)), nous n'avons pas voulu faire l'hypothèse qu'un agent puisse percevoir la structure interne des agents qu'il héberge.

On peut donc calculer cette valeur en agrégeant, au moyen d'un opérateur *propre à l'agent* a $\bigoplus^a$ (à définir pour chaque cas concret), les caractéristiques $\chi_a(h)$ perçues par a des agents qui l'hébergent directement ou transitivement :

$$\sigma(a) = \bigoplus_{h \in \{a\} \cup \mathcal{H}(a)}^{a} \chi_a(h)$$

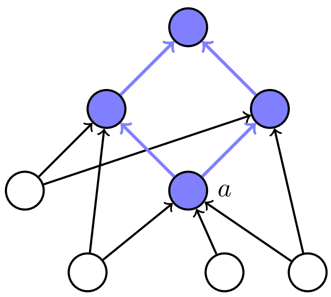

Figure 2. Agents permettant de calculer $\sigma(a)$: a et ses hôtes directs ou indirects

3.2.2. En tant que voisin

La contribution $\mu(a)$ (pour « *membership* ») représente la *satisfaction de l'agent* a *en tant que membre d'un groupe*, autrement dit en relation avec des externalités liées à la présence d'autres agents dans le même hôte. Il faut donc cette fois tenir compte des caractéristiques perçues par a de ses *voisins* dans chacun de ses hôtes (figure 3), soit :

$$\mathcal{N}(a) = \bigcup_{h \in hosts(a)} content(h) \backslash \{a\}$$

et les agréger au moyen d'un opérateur, propre à l'agent a, que nous notons $\circledcirc^a$:

$$\mu(a) = \circledcirc_{n \in \mathcal{N}(a)}^{a} \chi_a(n)$$

3.2.3. En tant qu'hôte

La contribution $\gamma(a)$ (pour « *group representation* ») représente la satisfaction de l'agent a *en tant que représentant d'un groupe*, en l'occurrence en lien avec les

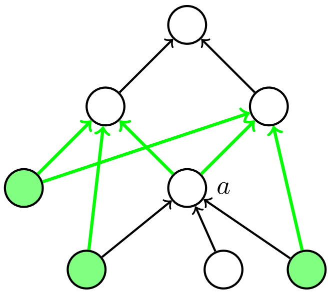

Figure 3. Agents permettant de calculer $\mu(a)$: voisins de a dans chacun de ses hôtes

agents hébergés par a (i.e. $content(a)$, figure 4). Cette satisfaction en tant que groupe est avant tout une façon de mesurer le *bien-être collectif* des agents hébergés par a, autrement dit elle consiste à agréger au moyen d'un opérateur pertinent, propre à l'agent a (noté $\bigoplus^a$), les caractéristiques perçues de ces agents :

$$\gamma(a) = \bigoplus_{m \in content(a)}^{a} \chi_a(m)$$

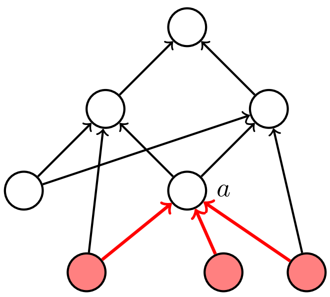

Figure 4. Agents permettant le calcul de $\gamma(a)$: agents hébergés par a

La plupart des problèmes s'intéressent à une évaluation ascendante des bien-être, en partant de ceux des « individus » pour les agréger successivement par niveau de regroupement. Dans ce cas, les caractéristiques perçues pertinentes pour le calcul de γ se réduisent au bien-être individuel des agents hébergés : $\forall m \in content(a), \chi_a(m) = w(m)$.

3.3. Mise en œuvre

Le cadre général que nous venons de définir permet d'une part une représentation homogène de toutes sortes de problèmes d'affectation ou d'appariement en vertu de la *structuration des agents* en termes d'hébergement. D'autre part, il offre la possibilité de définir des *mesures de bien-être associées à chaque groupe*, au moyen d'opérateurs d'agrégation propres à exprimer de façon précise la façon dont un groupe, en raison de sa nature spécifique, peut mesurer son bien-être en fonction du bien-être de ses membres.

Tandis que dans les approches classiques des problèmes d'appariement, seuls deux niveaux (l'individu et le collectif) sont envisagés, ici au contraire il est possible de considérer une multiplicité de niveaux intermédiaires. Le bien-être de ces derniers est calculé en fonction de leur situation dans la structure du SMA, et les trois composantes de ce bien-être (individuel, de voisinage et de groupe) peuvent être combinées de façon arbitrairement complexe. Rappelons que dans les approches classiques au contraire, le bien-être collectif est calculé de façon globale au moyen d'une fonction d'agrégation unique appliquée à toutes les valeurs de bien-être individuel. En utilisant de façon simplifiée nos opérateurs d'agrégation, il est donc possible de se ramener à la modélisation classique des problèmes d'affectation ou d'appariement, comme nous le montrons dans la section 5.

Nous allons maintenant présenter deux exemples de problèmes dans lesquels nous montrons ce que notre approche apporte de particulier pour modéliser finement les situations à traiter.

4. Applications

4.1. Un premier exemple

Le premier problème que nous nous proposons d'aborder par notre méthode est un problème d'affectation (*Assignment Problem*), consistant à placer des invités à des tables dans un restaurant. Dans ce contexte trois familles d'agents sont utilisées : $\mathcal{G}$ ou `Guest` (les invités à placer), $\mathcal{T}$ ou `Table` (des groupes d'invités) et $\mathcal{R}$ ou `Restaurant` (le système dans son ensemble). La figure 5 illustre un graphe d'hébergement correspondant à une affectation d'agents dans ce problème. Afin de mettre en lumière les points clefs de notre proposition, nous procédons tout d'abord aux simplifications suivantes :

1. Toutes les fonctions f_a (responsables de l'agrégation des trois composantes du bien-être individuel) sont de simples sommes.

2. Les fonctions σ et μ des tables et du restaurant sont nulles, i.e. ces agents sont insensibles à leur situation propre ainsi qu'aux caractéristiques de leurs voisins.

3. Les fonctions χ_r et χ_t du restaurant et des tables pour les agents qu'ils hébergent se réduisent au bien-être individuel de ces derniers (les fonctions γ correspondantes sont donc l'agrégation des bien-être individuels).

4. La fonction χ_g de chaque invité g mesure ses affinitiés envers les autres agents (autrement dit $\chi_g(a)$ représente l'affinité de l'agent g pour l'agent a). Elle est amenée à jouer un rôle clef dans le calcul du bien-être de chaque invité en tant que voisin, en fonction des autres agents présents à sa table.

Dans ce cadre fortement simplifié, nous voulons d'abord illustrer le fait que la maximisation du bien-être collectif, ici celui du restaurant, entraîne des affectations fort différentes selon les opérateurs d'agrégation choisis à chaque niveau, ne serait-ce que pour le calcul de $\gamma(a)$ qui représente le bien-être de l'agent a en tant qu'hôte. Il existe en effet de nombreuses manières d'agréger au niveau collectif des valeurs individuelles de bien-être : avec notre approche cette étape se répète à chaque niveau. Dans l'exemple ci-après, nous envisageons les opérateurs suivants :

– pour les invités : $\circledcirc^{\mathcal{G}} \in \{\max, \min\}$, ce qui revient à dire que la satisfaction d'un invité induite par ses voisins de table dépend soit du « meilleur », soit du « pire » d'entre eux (attitude optimiste vs. pessimiste) ; on fixe par ailleurs $\bigoplus^{\mathcal{G}} = \sum$ (on additionne les caractéristiques perçues des hôtes) ;

– pour les tables : $\bigoplus^{\mathcal{T}} \in \{\sum, \prod\}$, on calcule donc soit un bien-être utilitaire bien adapté pour représenter la satisfaction moyenne, soit un bien-être de Nash qui représente un compromis plus équilibré ;

– pour le restaurant : $\bigoplus^{\mathcal{R}} \in \{\min, \sum\}$, autrement dit on calcule soit un bien-être égalitaire vis-à-vis du bien-être des tables (en cherchant à maximiser le bien-être de la table la moins satisfaite, on contribue à réduire les inégalités de satisfaction entre tables), soit un bien-être utilitaire.

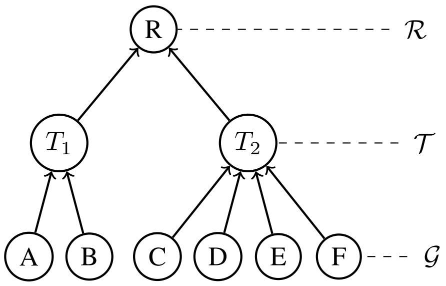

Figure 5. Graphe d'hébergement correspondant à l'exemple d'affectation étudié

Nous avons, sur une instance de petite taille (6 invités A, B, C, D, E, F pour 2 tables T1 et T2 de 2 et 4 places respectivement), calculé les affectations optimales pour chacune des 8 combinaisons d'opérateurs possibles, pour des matrices d'affinités générées aléatoirement. Le tableau 1 donne un exemple de matrice d'affinités pour laquelle il existe des affectations optimales différentes pour chaque combinaison d'opérateurs. Les affinités autres que celles explicités dans cette table sont nulles. Nous avons fait également le choix de donner aux agents la possibilité de valuer leur préférence pour la petite table (T1) alors qu'ils sont considérés comme indifférents vis-à-vis de la table T2.

Sur cette base, prenons l'exemple de l'affectation des agents A et B à la table T1, et de C, D, E, F à la table T2 (figure 5) avec la première combinaison d'opérateurs ($\circledcirc^{\mathcal{G}} = \max$, $\bigoplus^{\mathcal{T}} = \sum$, $\bigoplus^{\mathcal{R}} = \min$).

Selon les hypothèses énoncées précédemment, le bien-être individuel de l'agent A est donné par :

$$w(A) = \sigma(A) + \mu(A) + \gamma(A)$$

Tableau 1. Exemple d'affinités entre agents conduisant à des solutions distinctes pour les combinaisons d'opérateurs utilisées. Cette matrice $(\alpha_{i,j})$ est telle que : $\forall i, j \quad \chi_i(j) = \alpha_{i,j}$

	A	B	C	D	E	F	T1
A	0	3	7	8	8	8	8
B	8	0	2	3	8	3	6
C	8	6	0	8	3	5	10
D	3	6	9	0	1	3	5
E	7	1	2	4	0	9	1
F	8	2	8	4	10	0	10

Comme les agents ne sont sensibles qu'au fait d'être placé à T_1, on a ici :

$$\sigma(A) = \bigoplus(\chi_A(A), \chi_A(T_1), \chi_A(R)) = 0 + 8 + 0$$

.

B étant le seul voisin de A, on a : $\mu(A) = \circledcirc(\chi_A(B)) = 3$.

Enfin, $\gamma(A) = 0$ puisque A n'héberge aucun agent ; d'où $w(A) = 11$.

De même on a : $\sigma(C) = \bigoplus(\chi_C(C), \chi_c(T_2), \chi_C(R)) = 0 + 0 + 0$. C a pour voisins D, E et F, d'où : $\mu(C) = \circledcirc(\chi_C(D), \chi_C(E), \chi_C(F)) = \max(8, 3, 5) = 8$. Enfin, $\gamma(C) = 0$ d'où $w(C) = 8$.

Pour la table T_1, on a $w(T_1) = \sigma(T_1) + \mu(T_1) + \gamma(T_1) = \gamma(T_1)$ suite à nos hypothèses. Or $\gamma(T_1) = \bigoplus(w(A), w(B)) = w(A) + w(B) = 11 + 14 = 25$.

De même on obtient $w(R) = \gamma(R) = \min(w(T_1), w(T_2)) = 25$.

Les valeurs d'affinités du tableau 1, trouvées par simple exploration aléatoire, donnent des affectations optimales toutes différentes présentées dans le tableau 2. Les calculs des affectations optimales ont été faites par exploration exhaustive. Cette méthode n'est destinée qu'à illustrer la capacité du modèle à prendre en compte des vues variés à chaque niveau, parce que cette diversité induit des solutions optimales différentes.

Cet exemple minimal montre d'emblée le caractère intrinsèquement *multi-objectif* qui résulte d'une modélisation multiniveau du bien-être social.

Par ailleurs ce problème d'affectation se généralise aisément aux situations non bijectives, dans lesquelles le nombre de places disponibles dans le restaurant est soit inférieur, soit supérieur au nombre d'invités. Le traitement de ces cas ne nécessite pas de changer les modalités de calcul de bien-être, alors que dans des méthodes centralisées à information complète les algorithmes mis en œuvre sont très différents.

Au contraire, il est facile d'enrichir le modèle en affinant les facteurs qui entrent dans le calcul du bien-être : par exemple, calculer la part individuelle du bien-être d'une table (σ) en fonction du nombre de places laissées libres ; ou encore, pénaliser

Tableau 2. Affectations optimales des invités aux tables pour chaque combinaison des opérateurs d'agrégation étudiés.

$\circledcirc^{\mathcal{G}}$	$\bigoplus^{\mathcal{T}}$	$\bigoplus^{\mathcal{R}}$	Solutions T1	T2
max	Σ	min	A, C	B, D, E, F
max	Σ	Σ	C, D	A, B, E, F
max	Π	min	A, F	B, C, D, E
max	Π	Σ	A, B	C, D, E, F
min	Σ	min	B, D	A, C, E, F
min	Σ	Σ	E, F	A, B, C, D
min	Π	min	B, C	A, D, E, F
min	Π	Σ	B, E	A, C, D, F

les individus non placés (i.e. dont l'hôte est le restaurant et non une table) ou leur donner des préférences variables sur le fait d'être seul à une table. La décomposition que nous proposons pour le bien-être social en composantes dépendantes des relations d'hébergement entre agents permet une très grande liberté dans la construction des métriques.

D'ailleurs, ce cadre se prête également à la modélisation de problèmes d'appariement comme le très célèbre problème des mariages stables : il faut pour cela agentifier la notion de *couple*. Un couple est stable si le bien-être résultant de ses membres actuels (γ) est supérieur à celui qui résulterait du changement d'un de ses membres.

Il faut préciser également que la diversité d'opérateurs d'agrégation que nous tenons pour constitutive du modèle n'est pas une vue de l'esprit. Certes, il existe des situations dans lesquelles les opérateurs sont les mêmes à tous les niveaux : dans ce cas, la notion même de niveau n'a guère de sens et l'on peut se ramener aux méthodes classiques. En revanche, dans nombre de problèmes concrets, la prise en compte de mécanismes d'agrégation spécifiques pour chaque niveau peut être vu comme une politique d'optimisation reflétant un objectif propre à chaque niveau, comme nous l'illustrons dans l'exemple ci-après.

4.2. Un exemple plus complexe

Le deuxième exemple que nous proposons s'appuie sur la capacité de notre modèle à représenter des points de vue propres à chaque famille d'agents, ainsi que la possibilité d'appartenir à différents hôtes simultanément.

En l'occurrence, nous considérons ici des individus ($\mathcal{I}$) pouvant s'inscrire dans diverses associations ($\mathcal{A}$). Ces associations peuvent se regrouper en fédérations ($\mathcal{F}$) et être financées soit par des municipalités ($\mathcal{M}$), soit par des régions ($\mathcal{R}$). Les objectifs de ces agents sont évidemment très différents : les individus cherchent à maximiser leur participation aux associations proposant les activités qu'ils préfèrent, dans la limite de leur temps et de leur budget disponibles. Les associations et les fédérations cherchent à faire valoir leur taille (nombre d'inscrits) pour accroître leur demande budgétaire auprès de leurs financeurs : les municipalités et les fédérations. Les municipalités visent à répartir selon une certaine forme d'équité le budget disponible entre les associations, tout comme les régions cherchent à le faire entre les municipalités et les fédérations. Une situation-type est décrite par le graphe d'hébergement de la figure 6.

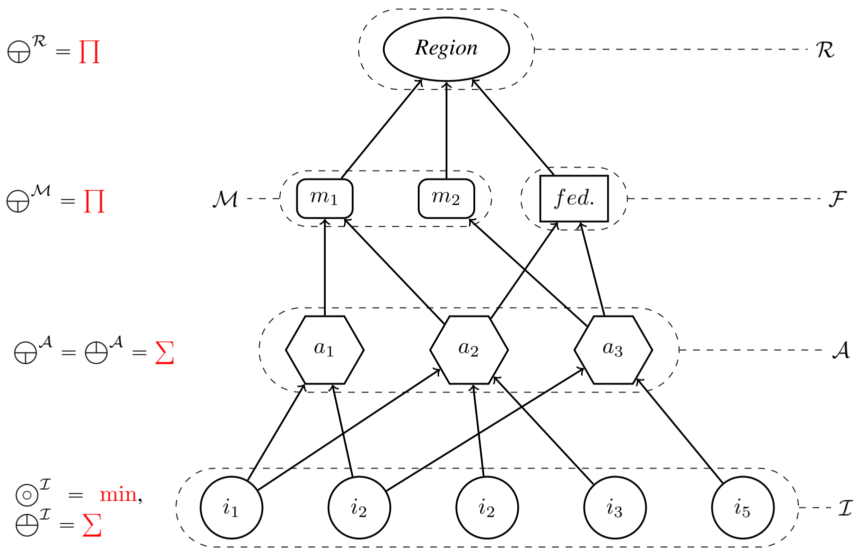

Figure 6. Graphe d'hébergement représentant un tissu associatif classique : individus ($\mathcal{I}$) inscrits dans des associations ($\mathcal{A}$) financées par des municipalités ($\mathcal{M}$), regroupées éventuellement en fédérations ($\mathcal{F}$), ces deux dernières entités régies elles-même au niveau de la région ($\mathcal{R}$)

On peut considérer ici que la répartition des subventions suit un bien-être de Nash pour éviter l'accaparement du budget par les structures les plus grosses tout en prenant en compte la taille des structures, d'où : $\oplus^{\mathcal{R}} = \oplus^{\mathcal{M}} = \prod$. Une association à l'inverse, si elle ne cherche qu'à faire valoir le nombre de ses membres (sans se soucier de leur satisfaction), peut utiliser $\chi_a(i) = 1$ pour tout inscrit i avec simplement $\oplus^{\mathcal{A}} = \sum$. La force d'une association dépend évidemment de son appartenance à une fédération, donc pour chacun de ses hôtes h elle calcule $\chi_a(h) = 1$ si $h \in \mathcal{F}$ et $\chi_a(h) = 0$ sinon, avec $\oplus^{\mathcal{A}} = \sum$. Les individus quant à eux sont principalement motivés par un équilibre entre la participation à leurs activités préférées (avec un système d'affinités par exemple) et le coût de ces activités (il faut donc prévoir une matrice c_{ia} reflétant le coût pour l'individu i d'avoir pour hôte l'association a) ; on peut utiliser encore $\oplus^{\mathcal{I}} = \sum$. Mais en outre, ils sont fortement sensibles à leurs voisins, i.e. les autres individus inscrits dans les mêmes associations (avec là encore par exemple un système d'affinités et une agrégation $\circledcirc^{\mathcal{I}}$ soit optimiste avec $\max$, soit pessimiste avec $\min$).

On voit ici que *la diversité des objectifs de chaque agent se traduit par une diversité des métriques utilisées, au sein d'une structure où tous les agents sont par ailleurs homogènes*. Cette uniformisation permet selon nous de dégager des principes généraux de résolution qui doivent permettre de traiter des situations très différentes, contrairement aux approches classiques, centralisées ou non, dans lesquels chaque type de problème s'accompagne d'une méthode de résolution spécifique. En effet, nous pensons qu'il est possible de développer des méthodes de résolution intrinsèquement multi-agents, i.e. s'appuyant sur des perceptions et des interactions locales entre agents, et le paramétrage de comportements génériques par des éléments de contexte.

Avant de présenter ces aspects, nous souhaitons compléter les exemples donnés ci-dessus en montrant plus formellement comment les problèmes d'affectation et d'appariement peuvent s'exprimer dans notre cadre multiniveau.

5. Lien formel avec les problèmes d'affectation et d'appariement

5.1. Du problème d'affectation à son modèle multiniveau

Nous considérons ici le problème d'affectation généralisé (*Generalized Assignment Problem*, noté GAP (Kellerer *et al.*, 2004)) dans lequel on considère un ensemble de n objets $\mathcal{O} = \{o_1, \ldots, o_n\}$ et un ensemble de m paniers $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_m\}$. Chaque panier b_i est caractérisé par une capacité maximale t_i. Chaque affectation d'un objet o_j à un panier b_i génère un profit p_{ij} pour un coût/poids ω_{ij} [1]. L'affectation ou non d'un objet o_i à un panier b_j est représentée par une variable booléenne x_{ij}.

Une affectation des objets aux paniers représente une solution réalisable lorsque la somme des poids des objets affectés à chaque panier n'excède pas sa capacité. L'objectif est de maximiser le profit généré par l'affectation de toutes les ressources aux paniers. Ce problème peut être formulé de manière classique par le programme en nombres entiers suivants :

$$\text{on cherche à maximiser} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_{ij}$$

$$\text{avec :} \begin{cases} \forall i \in \{1, \ldots, m\} & \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij} x_{ij} \leqslant t_i \\ \forall j \in \{1, \ldots, n\} & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \\ \forall i \in \{1, \ldots, m\}, \forall j \in \{1, \ldots, n\} & x_{ij} \in \{0, 1\} \end{cases}$$

On notera tout particulièrement que *tout objet doit être impérativement affecté* (à un seul panier, les objets n'étant pas considérés comme partageables) et que, sous

1. Ce poids est usuellement noté w_{ij}, toutefois ici nous utiliserons la notation ω_{ij} pour éviter une confusion avec le bien-être d'un agent a, $w(a)$

cette expression à base de contraintes, une solution est soit valide, soit invalide, *sans aucune forme de gradualité*.

Ce problème peut être formulé via notre modélisation multiniveau. Dans ce cadre, il faut considérer une modélisation à trois niveaux : tout d'abord le système (un agent S), qui hébergera des paniers ($\mathcal{B}$), qui hébergeront eux-mêmes des objets ($\mathcal{O}$), de sorte que le système est structuré comme celui décrit figure 5. Nous pouvons maintenant déterminer l'ensemble des opérateurs nécessaires pour effectuer le calcul de bien-être correspondant au GAP.

Le bien-être du système ne prend en compte que sa situation en tant qu'hôte de paniers (puisqu'il n'a lui-même ni hôte, ni voisins) :

$$\begin{aligned} w(S) &= f_S(\sigma(S), \mu(S), \gamma(S)) \\ &= \gamma(S) \\ &= \bigoplus_{a \in content(S)}^{S} \chi_S(a) \end{aligned}$$

Si tous les objets sont affectés, le bien-être du système équivaut à la somme des bien-être de chacun des paniers. Si au contraire un objet n'est pas affecté à un panier, la solution n'est pas valide au sens du GAP, donc le bien-être du système doit être nul. Pour intégrer ces éléments dans une approche multiniveau, il faut donc d'abord s'interroger en termes de graphe d'hébergement, et notamment répondre à la question : « *où sont les objets non affectés ?* ».

Dans la mesure où les agents ont vocation à interagir pour résoudre le problème d'affectation, ainsi que nous le présenterons dans la section suivante, il est assez raisonnable de considérer que les objets qui ne sont pas hébergés par des paniers, le sont par le système lui-même. Moyennant d'imposer aux objets hébergés par le système d'avoir un bien-être nul, on peut définir :

$$\bigoplus_{a \in content(S)}^{S} \chi_S(a) = \begin{cases} 0 & \text{si} \min\limits_{a \in content(S)} \chi_S(a) = 0 \\ \sum\limits_{a \in content(S)} \chi_S(a) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{avec : } \forall a \in content(S), \chi_S(a) = w(a)$$

De manière similaire, le bien-être d'un panier ne prend en compte ni sa situation en tant qu'individu situé, ni son voisinage : seul le bien-être des objets qu'il héberge est pris en compte (autrement dit, le bien-être d'un panier ne dépend que de son contenu). On a donc :

$$\forall b \in \mathcal{B}, w(b) = f_{\mathcal{B}}(\sigma(b), \mu(b), \gamma(b)) = \gamma(b) = \bigoplus_{o \in content(b)}^{\mathcal{B}} \chi_b(o)$$

La valeur de bien-être d'un panier doit être nulle si la contrainte de capacité (par rapport au poids perçu des objets) n'est pas respectée, sinon elle doit prendre en compte le profit perçu par le panier pour chacun des objets qui lui sont affectés.

Un panier doit donc percevoir deux caractéristiques des objets qu'il peut héberger : leur coût ou poids ω et le profit qu'il en retire p. On peut donc poser :

$$\forall b \in \mathcal{B}, \forall o \in content(b), \qquad \chi_b(o) = (\omega_{bo}, p_{bo})$$

L'agrégation par chaque panier des caractéristiques perçues des objets hébergés peut donc s'écrire comme suit :

$$\bigoplus_{o \in content(b)}^{\mathcal{B}} \chi_b(o) = \begin{cases} 0 & \text{si} \sum\limits_{o \in content(b)} \omega_{bo} \geqslant t_b \\ \sum\limits_{o \in content(b)} p_{bo} & \text{sinon} \end{cases}$$

Finalement, au niveau d'un objet, le bien-être ne prend en compte que le fait d'être affecté dans un panier ou non, autrement dit le seul bien-être en tant qu'agent situé :

$$\forall o \in \mathcal{O}, w(o) = f_{\mathcal{O}}(\sigma(o), \mu(o), \gamma(o)) = \sigma(o) = \bigoplus_{h \in \mathcal{H}(o)}^{\mathcal{O}} \chi_o(h)$$

Comme nous l'avons signalé, on supposera que tout objet non affecté à un panier est hébergé par le système lui-même. Lorsque ce cas se présente, le bien-être de l'objet doit être nul pour annuler celui du système :

$$\forall o \in \mathcal{O}, hosts(o) \not\subset \mathcal{B} \Rightarrow w(o) = 0$$

Autrement dit il suffit de poser :

$$\forall o \in \mathcal{O}, \chi_o(h) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad h = S \\ 1 & \text{si} \quad h \in \mathcal{B} \end{cases} \quad \text{et} \quad \bigoplus^{\mathcal{O}} = \max$$

Ainsi, la manière dont ces opérateurs sont construits ont pour effet d'annuler le bien-être du système $w(S)$ si l'une des contraintes n'est pas respectée. En posant :

$$\forall o_i \in \mathcal{O}, b_j \in \mathcal{B}, \quad x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad o_i \sqsubset b_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

on voit que lorsque les contraintes sont respectées, le bien-être du système correspond exactement à l'expression à maximiser dans le GAP :

$$w(S) = \sum_{j=1}^{n} w(b_j) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} p_{ij} x_{ij}$$

5.2. Variations sur le problème d'affectation

Comme nous l'avons vu, le problème d'affectation généralisé dans sa formulation classique est particulièrement contraignant puisque tout objet doit être affecté et que la somme des poids doit rester inférieure au budget. Il ne permet pas d'exprimer qu'une solution est plus ou moins proche d'une solution valide. Si l'on souhaite modifier un tant soit peu les caractéristiques du problème, il faut reformuler l'ensemble des contraintes, ce qui entraîne en général une modification de la méthode de résolution elle-même.

Nous allons étudier ici comment notre modélisation peut au contraire aider à prendre en compte des changements dans la spécification du problème, sans nécessiter une refonte complète de l'existant. Pour cela nous allons aborder trois situations :

1. l'existence d'objets « facultatifs », c'est-à-dire pouvant ne pas être affecté sans invalider la solution ;

2. l'introduction d'une forme de gradualité pour pénaliser, sans l'annuler, le bien-être d'un système où certaines contraintes ne sont pas respectées ;

3. l'existence de combinaisons d'objets qui présentent un profit additionnel pour le panier qui les possède simultanément (par exemple parce qu'ils peuvent jouer un rôle complémentaire)

Pour commencer, la gestion d'objets pouvant ne pas être affectés à un panier est triviale à partir du cas décrit ci-avant. Soit $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$ l'ensemble de ces objets facultatifs, il suffit de poser :

$$\forall o \in \mathcal{O}', \sigma(o) = 1$$

pour que le bien-être du système ne s'annule plus lorsqu'il héberge l'un de ces objets.

Néanmoins, pour éviter de créditer le bien-être du système de ces objets facultatifs non affectés, il faut les retirer du calcul de bien-être agrégé de $\gamma(S)$ en ne comptant que le bien-être des paniers :

$$\bigoplus_{a \in content(S)}^{S} \chi_S(a) = \begin{cases} 0 & \text{si} \min\limits_{a \in content(S)} \chi_S(a) = 0 \\ \sum\limits_{a \in content(S) \cap \mathcal{B}} \chi_S(a) & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour ce qui est de la gradualité des solutions, on peut introduire une fonction donnant le coût $\Pi(n)$ pour n objets non affectés, et récrire l'opérateur d'agrégation calculant $\gamma(S)$:

$$\bigoplus_{a \in content(S)}^{S} \chi_S(a) = \sum_{a \in content(S) \cap \mathcal{B}} \chi_S(a) - \Pi(|content(S) \cap (\mathcal{O} \backslash \mathcal{O}')|)$$

Enfin, on peut envisager un problème où certains objets offrent un profit complémentaire lorsqu'ils sont affectés dans le même panier (ou inversement si l'affectation de deux objets au même panier réduit leur profit). Dans une approche classique, cela complique la formulation du profit à maximiser puisque ce dernier n'est plus linéaire. Dans notre modélisation multiniveau, les couplages qui peuvent exister entre objets sont traduits par l'existence d'une fonction $\mu(o)$ non nulle, c'est-à-dire l'existence d'un bien-être *en tant que voisins d'autres objets* (par exemple sur la base d'affinités comme nous l'avons présenté dans la section 4.1).

Pour que ces relations liées au voisinage soient exploitées par les paniers, ceux-ci doivent les intégrer dans les caractéristiques perçues des objets :

$$\forall b \in \mathcal{B}, \forall o \in content(b), \qquad \chi_b(o) = (\omega_{bo}, p_{bo}, \mu(o))$$

et les agréger à leur profit :

$$\bigoplus_{o \in content(b)}^{\mathcal{B}} \chi_b(o) = \begin{cases} 0 & \text{si} \sum\limits_{o \in content(b)} \omega_{bo} \geqslant t_b \\ \sum\limits_{o \in content(b)} (p_{bo} + \mu(o)) & \text{sinon} \end{cases}$$

Ces quelques exemples, que l'on pourrait multiplier à l'envi pour tenir compte de caractéristiques de plus en plus précises et « réalistes » des problèmes modélisés, permettent d'illustrer deux avantages majeurs de notre modélisation :

– son *caractère homogène* d'une part, puisque le cadre multiniveau englobe toutes les variations que l'on souhaite apporter au problème initial ;

– sa *forte modularité* d'autre part : au lieu de modifier un ensemble global d'équations exprimant les extrêma recherchés et les contraintes du système, ces calculs sont répartis entre divers groupes d'agents, et dans chaque agent entre plusieurs composantes indépendantes, de sorte que les modifications à apporter n'affectent qu'une partie du système sans remettre en cause sa structure et les principes qui président au calcul du bien-être à chaque niveau.

5.3. Du problème d'appariement à son modèle multiniveau

Passons maintenant au problème d'appariement, défini (notamment sous la forme du problème des mariages stables par exemple par Knuth (1971)) comme suit : on considère deux ensembles d'éléments : SM $=< \mathcal{X}, \mathcal{Y} >$, où $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont les deux ensembles de n éléments que l'on cherche à associer. À chaque élément a de ces deux ensembles est associé une relation de préférence notée $\succ_a$ sur les éléments de l'autre ensemble. On notera donc $x_1 \succ_{y_1} x_2$ le fait que l'élément y_1 préfère être associé à l'élément x_1 plutôt qu'à l'élément x_2. On considère un problème d'appariement où les listes de préférences sont complètes, sans indifférence ni ex-aequo.

Dans un tel contexte, un appariement est souvent défini comme une application :

$$\mu_{\text{M}} : \mathcal{X} \cup \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$$

telle que :

$$\forall x \in \mathcal{X}, \mu_{\mathrm{M}}(x) \in \mathcal{Y} \text{ et } \forall y \in \mathcal{Y}, \mu_{\mathrm{M}}(y) \in \mathcal{X}$$

L'élément associé à l'élément z dans l'appariement M est donc donné par $\mu_{\mathrm{M}}(z)$.

L'objectif d'un problème d'appariement classique est de trouver un appariement *complet*, c'est-à-dire où μ_{M} est défini pour tout $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$, et *stable*, c'est-à-dire ne contenant pas de couple dit "*bloquant*". Un couple $(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ est bloquant si :

$$y \succ_x \mu_{\mathrm{M}}(x) \text{ et } x \succ_y \mu_{\mathrm{M}}(y)$$

Autrement dit, un appariement M est stable si il n'existe pas d'élément x qui préférerait être associé avec un élément y plutôt qu'à son partenaire selon M : $\mu_{\mathrm{M}}(x)$ et réciproquement que l'élément y préférerait être associé à x plutôt qu'à son propre partenaire $\mu_{\mathrm{M}}(y)$.

Ce problème peut être formulé via notre modélisation multiniveau. Dans ce cadre, il faut à nouveau considérer une modélisation à trois niveaux : tout d'abord le système (un agent S), qui héberge des couples ($\mathcal{C}$), qui hébergent eux-mêmes les individus ($\mathcal{I}$). Nous pouvons décrire l'ensemble des opérateurs nécessaires au calcul de bien-être correspondant.

Le bien-être du système ne prend en compte que sa situation en tant qu'hôte de couples :

$$w(S) = f_S(\sigma(S), \mu(S), \gamma(S)) = \gamma(S) = \overset{S}{\bigoplus_{a \in content(S)}} \chi_S(a)$$

De manière similaire, le bien-être d'un couple ne prend en compte ni sa situation en tant qu'individu situé, ni son voisinage. Seul le bien-être des individus hébergés est pris en compte :

$$\forall c \in \mathcal{C}, w(c) = f_{\mathcal{C}}(\sigma(c), \mu(c), \gamma(c)) = \gamma(c) = \overset{\mathcal{C}}{\bigoplus_{i \in content(c)}} \chi_c(i)$$

$$\text{avec :} \quad \overset{\mathcal{C}}{\bigoplus_{i \in content(c)}} \chi_c(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } |content(c)| \neq 2 \\ & \text{ ou } content(c) \not\subset \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \\ \prod_{i \in content(c)} w(i) & \text{sinon} \end{cases}$$

Ici, le choix spécifique d'un bien-être de Nash permet, d'une part, de garantir une symétrie entre les membres du couple, et d'autre part, de réduire leur différence de satisfaction.

Finalement, au niveau d'un individu, le bien-être ne prend en compte que l'intérêt que cet individu porte à celui avec qui il est associé.

$$\forall i \in \mathcal{I}, w(i) = f_{\mathcal{I}}(\sigma(i), \mu(i), \gamma(i)) = \mu(i) = \overset{\mathcal{I}}{\bigodot_{j \in \mathcal{N}(i)}} \chi_i(j) = \chi_i(\mu_{\mathrm{M}}(i))$$

Pour terminer la transformation du problème, il reste à donner valuer les fonctions χ_a pour tout agent $a \in \mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$, de sorte que :

$$\forall x \in \mathcal{X}, \forall (y_1, y_2) \in \mathcal{Y} \times \mathcal{Y}, \quad y_1 \succ_x y_2 \Longleftrightarrow \chi_x(y_1) > \chi_x(y_2)$$

et réciproquement pour tout $y \in \mathcal{Y}$.

Lorsque les contraintes du couple (deux individus par couple) sont respectées, on peut poser $\mu_{\mathrm{M}}(x) = \{!z \in \mathcal{N}(x)\}$. Un couple (x, y) est donc bloquant si et seulement si :

$$\chi_x(y) > \chi_x(\mu_{\mathrm{M}}(x)) \wedge \chi_y(x) > \chi_y(\mu_{\mathrm{M}}(y))$$

ce qui entraîne alors que le couple hébergeant les agents x et y aurait un bien-être supérieur à chacun des couples existants. Nous verrons dans la section 6 sur quels principes élaborer un protocole qui permette de détecter des divergences d'intérêt (ici entre les agents couples) et de les faire arbitrer par le niveau supérieur.

5.4. Variations sur le problème d'appariement

De même que dans le problème d'affectation, le problème initial d'appariement peut se décliner selon de multiples variantes, qui d'ordinaire font appel à des méthodes de résolution chaque fois différentes. Or, dans le formalisme multiniveau que nous proposons, ces variations sur le problème initial ne font que se traduire par un changement d'opérateurs d'agrégation pour l'un ou l'autre des niveaux d'organisation. Ainsi par exemple :

– la formation de groupes au lieu de couples se traduit par une modification de la contrainte de cardinalité pour $\bigoplus^{\mathcal{C}}$;

– l'appariement entre éléments d'un même ensemble (et non pas entre éléments de deux ensembles distincts), se traduit par la suppression de la contrainte $content(c) \notin \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ dans la définition de ce même opérateur ;

– le remplacement d'un appariement avec préférences complètes (SMC) par un appariement où les préférences sont incomplètes (SMI), où l'on n'accepte que des solutions rationnelles (i.e. pour lesquelles la relation de préférence de x est définie pour le partenaire de x pour tout individu x), revient à poser $\chi_x(y) = 0$ lorsque la préférence de x pour y n'est pas définie, et un opérateur $\bigodot^{\mathcal{I}}$ qui annule le bien-être des individus dès qu'une des valeurs χ_i est nulle.

6. Méthode de résolution

À ce stade, nous nous sommes principalement focalisés sur la modélisation des problèmes d'appariement ou d'affectation au moyen d'un formalisme multi-agents multiniveau uniforme, permettant une expression fine des points de vue de chaque entité impliquée. Néanmoins, les avantages d'une telle modélisation doivent aussi être soutenus par des méthodes concrètes de résolution de ces problèmes.

Or, c'est bien souvent au cœur des algorithmes de résolution que se niche la spécificité du problème traité, voire du domaine d'application abordé. L'approche que nous défendons ne fait pas exception, et en raison de son caractère générique nous pouvons proposer quelques principes généraux issus de travaux préliminaires en la matière, mais il est certain qu'il reste de nombreuses pistes à explorer, que nous abordons dans la discussion à la section suivante.

Par ailleurs un algorithme de résolution peut être évalué selon des critères fort différents, qui vont du coût computationnel et de la taille des instances manipulables, au nombre de messages échangés, en passant par l'optimisation conjointe de plusieurs métriques. Il est donc difficile de proposer d'emblée une méthode susceptible d'optimiser tous ces aspects.

Néanmoins, nous pouvons proposer ici un protocole utilisable entre deux agents d'un même niveau, pour leur permettre d'échanger une partie de leur contenu (i.e. d'autres agents, qu'ils hébergent). Ce protocole s'appuie sur des principes simples : *(a)* l'agent s (*seller*, initiateur de l'échange) doit être disposé à entamer le dialogue en offrant des « ressources » (agents hébergés) à l'agent b (*buyer*, interlocuteur de s) et ce, *même si ce don lui est a priori défavorable* car un don défavorable à titre individuel peut s'avérer bénéfique socialement (Nongaillard, Mathieu, 2011) ; *(b)* l'agent b peut proposer une contrepartie, mais il ne le fera que s'il le juge utile ; *(c)* pour l'évaluation de l'échange, on applique un principe de subsidiarité : s'il y a accord sur le caractère favorable ou défavorable de l'échange, la décision est prise conjointement par s et b ; sinon ils demandent l'arbitrage de leur hôte.

Dans la suite, on note $\Delta_a w(+X)$ (resp. $\Delta_a w(-Y)$) la variation de bien-être induite pour l'agent a par le fait d'ajouter (resp. de retirer) à son *content* l'ensemble d'agents X (resp. Y). On note également $\Delta_h w(s \underset{Y}{\overset{X}{\rightleftarrows}} b)$ la variation de bien-être pour un agent h, hôte de s et b, lorsque ceux-ci s'échangent les ensembles d'agents X et Y. Nous discutons dans la section suivante diverses méthodes pour ce faire. Sur cette base, le protocole pour deux agents s et b partageant un même hôte h peut s'écrire comme suit :

1. s calcule le meilleur sous-ensemble non vide $X^\star$ des agents qu'il héberge, dont il puisse se défaire, à savoir :

$$X^\star = \text{arg max}_{X \in \wp(s.content) \setminus \varnothing} \{\Delta_s w(-X)\}$$

2. S'il n'existe pas un tel ensemble, l'agent s ne peut rien proposer, l'échange s'arrête ; sinon s envoie à b le message `propose(+X)`.

3. L'agent b calcule une contrepartie éventuelle à la proposition de s :

$$Y^\star = \text{arg max}_{Y \in \wp(b.content)} \{\Delta_b w(+X - Y)\}$$

4. Si $\Delta_b w(+X - Y) > 0$, l'agent b envoie à s le message `offer(-X+Y)` : c'est une offre ferme car l'échange de X contre Y est favorable à b ; sinon il envoie `propose(-X+Y)`.

5. Deux situations « simples » peuvent se présenter :

- $\Delta_s w(-X + Y) > 0$ et b a envoyé `offer` : dans ce cas l'échange profite simultanément à s et b et peut donc être immédiatement accepté.

- $\Delta_s w(-X + Y) \leqslant 0$ et b a envoyé `propose` : dans ce cas l'échange ne profite à personne et peut donc être immédiatement rejeté.

6. Dans les autres cas (un seul agent profite strictement de l'échange), s demande à son hôte h de trancher : ce dernier calcule donc $\Delta_h w(s \underset{Y}{\overset{X}{\rightleftarrows}} b)$, l'échange est accepté si et seulement si cette valeur est strictement positive.

Ce protocole s'étend aisément avec des contraintes de cardinalité sur le contenu de chaque hôte, et donc sur la taille des échanges.

Pour l'heure, nous avons proposé un mécanisme de négociation bilatéral entre des agents homogènes partageant un même hôte, que nous avons testé avec succès dans le cadre du problèmes d'affectations de places à des tables (cf. § 4.1) : en plaçant les invités aléatoirement sur les tables, ces dernières sont à même de reconstruire l'optimum calculé pour ces opérateurs (tableau 2). Ce protocole fait appel à des primitives qui ne dépendent pas du domaine d'application ni du type de problème (don, échange, etc.) et constituent une base générique pour la construction de comportements d'agents destinés à la résolution de problèmes particuliers.

7. Discussion

La proposition que nous avons présentée est une première étape dans l'étude systématique d'algorithmes de résolution distribuée de problèmes d'affectation ou d'appariement représentés par des SMA multiniveaux. Nous avons déjà montré le gain d'expressivité que procure la modélisation de ces problèmes dans le cadre multiniveau. Par ailleurs, si nous avons proposé les fondements d'une méthode de résolution, cette nouvelle approche suscite un certain nombre de questions en la matière, dont nous abordons ici les principales.

Les protocoles qui peuvent être construits sur cette base restent encore très largement inexplorés. Un travail de grande ampleur devra être mené pour les évaluer à l'aune de critères classiques comme le nombre d'opérations (de mouvements) nécessaires pour résoudre le problème, les volumes de messages échangés, ou encore la quantité d'informations individuelles rendues publiques. Pour traiter un contexte plus général que celui que nous avons esquissé, un certain nombre de points doivent être pris en compte.

Premièrement, il faut définir quels agents sont autorisés à interagir pour échanger une partie de leur contenu. Le cas de figure le plus simple, que nous avons traité, est celui des agents partageant le même hôte, qui peut de ce fait assurer un arbitrage immédiat en cas de divergence quant à l'appréciation des échanges. On peut néanmoins envisager de découpler la relation d'hébergement (qui décrit l'organisation de la population d'agents) du réseau d'accointances (qui décrit les liens de communication au sein de cette population). De la sorte, un agent peut interagir avec des agents qui ne sont pas ses voisins. Dans ce cas, il faut envisager un mécanisme d'arbitrage « récursif », i.e. jusqu'à un hôte, commun aux agents en interaction, capable d'effectuer une évaluation pertinente. Un autre aspect de cette question est la nature ou le niveau des agents qui interagissent. Jusqu'à présent nous avons considéré que les agents en interaction appartiennent au même niveau. Or, on peut envisager qu'un agent interagisse par exemple avec son hôte ou avec les agents qu'il héberge. Par exemple, dans le problème des tables de restaurant, on pourrait considérer que tous les invités, au départ, sont hébergés par le restaurant, à charge pour ce dernier d'interroger les tables qu'il héberge pour leur proposer un invité, ou pour les invités d'interagir directement avec des tables. L'étude détaillée de ces mécanismes fait l'objet de travaux en cours.

Deuxièmement, se pose la question de la capacité pour les agents à évaluer la variation de bien-être induite par une proposition (Δw). Cela dépend fortement du domaine abordé : nature des opérateurs d'agrégation, façon dont sont calculées les caractéristiques perçues des agents, etc. Selon que l'on dispose ou non de connaissances *a priori* sur les propriétés de ces fonctions et de leur méthode de calcul, on peut envisager d'évaluer les variations de bien-être avant tout mouvement effectif. Si ce n'est pas possible, il faut passer par une *simulation* de ces mouvements pour pouvoir les évaluer (avec un mécanisme de « backtrack »).

Troisièmement, les méthodes de résolution multi-agent, dans la mesure où elles supposent que chaque agent prenne une décision « locale » en fonction de l'évaluation de sa situation, doivent permettre de traiter de façon homogène aussi bien un problème « statique » dans lequel tous les agents sont donnés une fois pour toutes et où l'on s'arrête lorsqu'une solution est atteinte, qu'un problème « dynamique » dans lequel par exemple des agents sont ajoutés ou supprimés en cours de résolution, ou encore changent d'état, de caractéristiques, d'opérateurs d'agrégation, etc. Une telle méthode de résolution, possédant cette capacité à opérer des modifications graduelles en réponse à une reconfiguration des agents (au lieu de recommencer la résolution « à zéro »), peut s'avérer moins efficace, mais du moins elle permet de traiter des systèmes ouverts tels que ceux rencontrés dans le monde réel, donc à terme une transposition des outils de résolution de problème à des techniques de contrôle de systèmes distribués.

8. Conclusion, perspectives

Dans cet article, nous avons proposé un cadre uniforme pour modéliser par un SMA multiniveau des problèmes d'affectation ou d'appariement. Nous avons illustré, à travers plusieurs exemples, la capacité de ce formalisme à exprimer une grande diversité d'objectifs représentant les points de vue des différents acteurs du système. Nous avons aussi montré plus formellement que cette représentation multiniveau permettait de formuler non seulement des problèmes d'affectation et d'appariement classiques, mais également de nombreuses variantes, sans changer radicalement la nature du problème. Par ailleurs nous avons entamé une réflexion sur les mécanismes génériques de résolution qui peuvent être mis en œuvre dans ce cadre et formulé des principes sur lesquels les construire. Nous travaillons actuellement à l'élaboration de divers protocoles, propres non pas à une famille de problèmes ou à une autre, mais à la situation des agents impliqués en termes d'hébergement. Ces aspects algorithmiques s'accompagnent ainsi d'une réflexion méthodologique, de façon à identifier des couplages entre les caractéristiques de la structure des problèmes et les comportements à donner aux agents pour leur permettre de les résoudre.

Enfin, nous nous devons de signaler une dernière perspective de long terme qui nous paraît particulièrement prometteuse. Nous avons mentionné que les métamodèles multiniveaux ont été à l'origine développés pour la simulation. L'un des problèmes clefs en simulation multi-agent multiniveau consiste à élaborer des techniques permettant l'agrégation ou la désagrégation d'agents d'une façon automatique, que ce soit pour réduire le coût computationnel des comportements, pour focaliser l'observation de la simulation sur un sous-système pertinent, ou encore pour améliorer le réalisme des résultats. La décomposition multiniveau de la satisfaction des agents permet de construire des outils de mesure reflétant pour chaque niveau l'adéquation entre l'état des entités simulées et des critères extérieurs à la simulation : charge du processeur, interactions avec un observateur, conformité à des données de référence, etc. Nous pensons donc qu'elle constitue une piste sérieuse pour contribuer à résoudre ces questions.

Bibliographie

Airiau S., Endriss U. (2013). Multiagent resource allocation with sharable items. *J. Autonomous Agents and Multi-Agent Systems (JAAMAS)*, vol. 28, nº 6, p. 956–985.

Arrow K. J. (1963). *Social choice and individual values*. New York, Wiley. (2nd ed.)

Brito I., Meseguer P. (2005). Distributed stable matching problems. *Principles and Practice of Constraint Programming*, vol. 3709, p. 152–166.

Chevaleyre Y., Dunne P., Endriss U., Lang J., Lemaître M., Maudet N. *et al.* (2006). Issues in multiagent resource allocation. *Informatica*, vol. 30, p. 3–31.

Drogoul A., Amouroux E., Caillou P., Gaudou B., Grignard A., Marilleau N. *et al.* (2013). GAMA: multi-level and complex environment for agent-based models and simulations. In *AAMAS*, p. 1361–1362.

Drogoul A., Dubreuil C. (1991). Eco-problem-solving model: Results of the N-Puzzle. In *Decentralized AI III*, p. 283–295. Elsevier.

Everaere P., Morge M., Picard G. (2012). Casanova : un comportement d'agent respectant la privacité pour des mariages stables et équitables. *RIA*, vol. 26, nº 5, p. 471–494.

Ferber J., Michel F., Báez J. (2005). AGRE: Integrating environments with organizations. In *E4MAS*, vol. 3374, p. 48–56. Springer.

Fischer K., Schillo M., Siekmann J. (2003). Holonic multiagent systems: A foundation for the organisation of multiagent systems. In *HoloMAS*.

Gale D., Shapley L. (1962). College admissions and the stability of marriage. *American Mathematical Monthly*, vol. 69, p. 9–14.

Kellerer H., Pferschy U., Pisinger D. (2004). *Knapsack problems*. Springer.

Knuth D. (1971). *Mariages stables*. Montréal, Canada, Presses de l'Université de Montréal.

Kuhn H. (1955). The Hungarian method for the assignment problem. *Naval Research Logistics Quarterly*, vol. 2, p. 83–97.

Macarthur K., Stranders R., Ramchurn S., Jennings N. (2011). A distributed anytime algorithm for dynamic task allocation in multi-agent systems. In *25th AAAI conf. on artificial intelligence.*

Mathieu P., Picault S., Secq Y. (2015). Design patterns for environments in multi-agent simulations. In *PRIMA*, vol. 9387, p. 678–686. Springer.

Maudet A., Touya G., Duchêne C., Picault S. (2014). Representation of interactions in a multi-level multi-agent model for cartography constraint solving. In *PAAMS*, vol. 8473, p. 183–194. Springer.

Minar N., Burkhart R., Langton C., Askenazi M. (1996). *The SWARM simulation system: a toolkit for building multi-agent simulations*. Working Paper n° 96-06-042. Santa Fe Institute.

Morvan G., Veremme A., Dupont D. (2011). IRM4MLS: the influence reaction model for multi-level simulation. In *MABS XI*, vol. 6532, p. 16–27. Springer.

Netzer A., Meisels A., Zivan R. (2015). Distributed envy minimization for resource allocation. *JAAMAS*, vol. 30, n° 2, p. 364–402.

Nongaillard A., Mathieu P. (2011). Reallocation problems in agent societies: A local mechanism to maximize social welfare. *JASSS*, vol. 14, n° 3.

Picault S., Mathieu P. (2011). An interaction-oriented model for multi-scale simulation. In *IJCAI*, p. 332–337.

Rodríguez S. (2005). *From analysis to design of holonic multi-agent systems: a framework, methodological guidelines and applications*. Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté.

Sen A. (1970). *Collective Choice and Social Welfare*. Holden-Day.

Servat D. (2000). *Modélisation de dynamiques de flux par agents. application aux processus de ruissellement, infiltration, et érosion.* Thèse de doctorat, Université Paris VI.

Siebert J., Ciarletta L., Chevrier V. (2010). Agents & artefacts for multiple models coordination: Objective and decentralized coordination of simulators. In *ACM symposium on applied computing*, p. 2024–2028.

Simonin O., Ferber J. (2000). Modeling self satisfaction and altruism to handle action selection and reactive cooperation. In *SAB*, p. 314–323.

Sohier C., Denis B., Lesage J.-J. (1998). Eco-problem solving for the adaptive control of production systems: the CASPER project. In *INCOM.*

Weerdt M., Zhang Y., Klos T. (2011). Multiagent task allocation in social networks. *JAAMAS*, vol. 25, n° 1, p. 46–86.