

Trigonométrie sphérique, identité de Yule entre PARCORs et algorithmes MCRR

Spherical Trigonometry, Yule's PARCOR Identity and FLRS Algorithms

par François DESBOUVRIES

Département Signal et Image, Institut National des Télécommunications
9, rue Charles Fourier
F-91011 Evry

résumé et mots clés

L'identité de Yule, en statistique, et la loi des cosinus, en trigonométrie sphérique, sont une seule et même formule. Cette constatation met en lumière l'existence de liens entre filtrage adaptatif des Moindres Carrés Récursifs Rapides (MCRR) et trigonométrie sphérique, puisque les équations du treillis normalisé en angle de Lee *et al.* sont trois applications particulières de l'identité de Yule. De ce nouveau point de vue, les six coefficients de corrélation partielle (PARCORs) propagés par l'algorithme de Lee *et al.* sont les cosinus des six éléments d'un triangle sphérique, et les récurrences de ce treillis sont une solution particulière à un problème de triangle sphérique important qui admet des applications naturelles en navigation et en astronomie. L'intérêt pratique de cette nouvelle interprétation géométrique est que l'on peut exploiter l'outil trigonométrie sphérique pour établir des récurrences nouvelles entre PARCORs et donc, comme cas particulier, entre quantités intervenant dans les algorithmes MCRR. Ces relations nouvelles nous permettent de construire des alternatives à la solution originelle de Lee *et al.* Nous proposons ainsi deux algorithmes MCRR nouveaux, minimaux au sens de la théorie des systèmes, dont l'un se trouve être une version normalisée de l'algorithme en treillis à base de rotations de Givens.

Filtrage adaptatif MCRR, treillis normalisé en angle, identité de Yule entre PARCORs, tétraèdre, trigonométrie sphérique, triangle sphérique, algorithme en treillis à base de rotations de Givens.

abstract and key words

Yule's PARCOR Identity, in statistics, and the fundamental law of cosines, in spherical trigonometry, are indeed the same formula. This observation establishes a link between Fast Recursive Least Squares FRLS adaptive filtering and spherical trigonometry, since the fully-normalized FRLS lattice algorithm of Lee *et al.* consists of three particular applications of Yule's PARCOR Identity. In that framework, the six PARCORs propagated by the fully-normalized FRLS lattice filter are the cosines of the six elements of a spherical triangle, and this lattice algorithm is one solution to an important spherical triangle problem that arises naturally in navigation and astronomy. The practical interest of this new geometric interpretation is that one can take advantage of the well-trodden path of spherical trigonometry to derive unnoticed recursions among PARCORs, and thus among FRLS quantities (a particular case). These new formulas enable us to design alternatives to the original solution of Lee *et al.* We thus propose two new minimal (in the system theory sense) FRLS algorithms. One of these algorithms happens to be a normalized version of the QR-decomposition-based least squares lattice algorithm.

FLRS adaptive filtering, fully-normalized lattice, Yule's PARCOR identity, tetrahedron, spherical trigonometry, spherical triangle, Fast QRD-based LS Lattice filter.

1. introduction

Les algorithmes de Moindres Carrés Récursifs Rapides (MCRR) préfenêtrés existent sous trois structures différentes : struc-

ture transverse, en treillis, et à base de décomposition QR [1]. Le premier algorithme en treillis a été proposé en 1977 [2]. Ultérieurement, Lee *et al.* ont montré [3-5] que grâce à une normalisation adéquate, la cellule élémentaire de ce treillis pouvait se réduire à une récurrence entre 3 variables et 3 seule-

ment : les erreurs de prédiction directe et rétrograde retardée « doublement normalisées » (ou normalisées « en angle », ou normalisées « information ») $\nu_{n,t}$ et $\eta_{n,t-1}$, à l'ordre n , et le PARCOR $\rho_{n+1,t-1}$ à l'ordre $n+1$ et au temps $t-1$. L'algorithme réactualise le PARCOR, puis calcule les erreurs directe et rétrograde à l'ordre $n+1$:

$$\rho_{n+1,t} = \nu_{n,t} \eta_{n,t-1}^T + (I - \nu_{n,t} \nu_{n,t}^T)^{1/2} \rho_{n+1,t-1} (I - \eta_{n,t-1} \eta_{n,t-1}^T)^{T/2} \quad (1a)$$

$$\nu_{n+1,t} = (I - \rho_{n+1,t} \rho_{n+1,t}^T)^{-1/2} (\nu_{n,t} - \rho_{n+1,t} \eta_{n,t-1}) (I - \eta_{n,t-1} \eta_{n,t-1}^T)^{-T/2} \quad (1b)$$

$$\eta_{n+1,t} = (I - \rho_{n+1,t} \rho_{n+1,t}^T)^{-1/2} (\eta_{n,t-1} - \rho_{n+1,t}^T \nu_{n,t}) (I - \nu_{n,t} \nu_{n,t}^T)^{-T/2} \quad (1c)$$

Les premières démonstrations, algébrique [3] puis géométrique [3–5], se sont simplifiées de façon spectaculaire lorsqu'il est apparu que (1b,c) ainsi que la réécriture (1d) de (1a) :

$$\rho_{n+1,t-1} = (I - \nu_{n,t} \nu_{n,t}^T)^{-1/2} (\rho_{n+1,t} - \nu_{n,t} \eta_{n,t-1}^T) (I - \eta_{n,t-1} \eta_{n,t-1}^T)^{-T/2} \quad (1d)$$

étaient en fait 3 applications particulières d'une identité générale entre coefficients de corrélation partielle, démontrée grâce à des techniques d'espaces de Hilbert [6–8], et qui est due à Yule [9] dans le cas scalaire. En outre cette approche a permis d'étendre l'algorithme du cas « préfenêtré » au cas « covariance » [10–11], ainsi qu'au cas général des processus « de rang fini » [6] [8] [12–13].

Dans cet article, nous montrons qu'une version réordonnée de l'identité de Yule (IY), notée dans la suite IYR, est égale à la formule fondamentale des cosinus de la trigonométrie sphérique (TS) [14]. En outre, les 6 PARCORs de l'algorithme (1) sont les cosinus des 6 éléments d'un triangle sphérique. Ce lien inattendu entre filtrage adaptatif MCRR et TS (une branche de la trigonométrie) éclaire l'algorithme familier de Lee *et al.* d'un jour nouveau : les équations (1) constituent en effet une solution particulière à un « problème de triangle sphérique » (PTS) rencontré fréquemment en navigation maritime et aérienne, ainsi qu'en astronomie, domaines qui, avec la géodésie, constituent les applications naturelles de la TS.

Au delà de l'interprétation géométrique, la TS devient par ailleurs un nouvel outil de développement des algorithmes MCRR : d'une part, de nombreuses démonstrations de formules de TS s'adaptent au cadre Hilbertien, fournissant ainsi des équations nouvelles (et potentiellement utiles) entre PARCORs, et donc, comme cas particulier, entre quantités intervenant dans les algorithmes rapides. D'autre part, le PTS évoqué ci-dessus admet classiquement en TS un ensemble de solutions dont certaines se transposent bien

au cadre du filtrage adaptatif MCRR. Nous proposons ainsi deux alternatives à la solution originelle de Lee *et al.* L'une d'entre elles est basée sur la formule des cotangentes. L'autre consiste à utiliser deux groupes de Gauss, c'est-à-dire à effectuer implicitement des changements de coordonnées sphériques. Cette solution se trouve être une version normalisée de l'algorithme en treillis à base de rotations de Givens proposé indépendamment par Ling [15] et Proudler *et al.* [16–17], qui reçoit donc au passage une interprétation géométrique nouvelle. Ces deux nouveaux algorithmes MCRR sont minimaux (au sens de la théorie des systèmes).

L'article est organisé de la façon suivante. La formule de bi-orthogonalisation entre résidus de projection est rappelée au paragraphe 2. Elle se visualise dans le plan par deux triangles rectangles semblables dans lesquels on retrouve l'interprétation trigonométrique bien connue du PARCOR comme cosinus de l'angle plan entre résidus de projection.

Dans le paragraphe 3, nous délaissions le formalisme géométrique général pour nous concentrer sur le problème spécifique des algorithmes rapides transverses et en treillis. Nous rappelons tout d'abord que ces algorithmes sont 3 applications particulières de la formule de bi-orthogonalisation planaire du paragraphe 2 ou de l'IY qui en découle. Nous montrons alors que l'existence de contraintes spécifiques (ces 3 applications particulières sont obtenues par permutations d'un seul et même ensemble) fait que la figure qui résume le mieux le problème est un ensemble, non pas quelconque mais contraint, de 3 triangles, que l'on peut assembler dans l'espace 3D en un tétraèdre normalisé. C'est la raison profonde qui autorise l'existence d'une interprétation trigonométrique nouvelle, non seulement des PARCORs, mais aussi de l'IYR qui n'en admettait pas jusqu'alors : en effet, l'IYR ne s'écrit pas dans le plan du paragraphe 2, alors qu'elle admet dans l'espace du paragraphe 3 une interprétation géométrique naturelle en termes de projections à l'intérieur du tétraèdre.

Or les tétraèdres (et donc les sphères) sont des figures géométriques très particulières : ils jouent le même rôle fondamental en géométrie dans l'espace que les triangles (et donc les cercles) en géométrie plane [18]. De même que la trigonométrie consiste à établir des relations entre angles et côtés d'un triangle dans le plan, la TS consiste à établir des relations entre angles et côtés d'un tétraèdre dans l'espace, et démontrer des identités projectives dans des tétraèdres revient donc à démontrer des relations trigonométriques sur la sphère. Ce lien avec la TS est établi dans le paragraphe 4, et exploité dans le paragraphe 5, puisque l'analogie entre les deux formalismes se poursuit : il est possible de décalquer les démonstrations de certaines formules de TS, ce qui fournit de nouvelles relations algébriques entre PARCORs. Ces formules nouvelles permettent alors l'étude, développée au paragraphe 6, du PTS sous-jacent au treillis doublement normalisé, ce qui nous amène à développer deux alternatives à la solution originelle de Lee *et al.*

2. interprétation trigonométrique classique des PARCORs dans le plan

L'approche géométrique des algorithmes MCRR [6–8] [10–13] [19–23] étant la mieux appropriée pour les besoins de cet article, nous commençons par en rappeler brièvement les résultats dont nous aurons besoin ultérieurement. Nous évoquons alors la première interprétation trigonométrique (bien connue) des PARCORs, qui découle de l'observation de la formule de bi-orthogonalisation planaire.

Nous adoptons le point de vue familier du filtrage adaptatif déterministe. Le cadre général (cf. par ex. [3–5]) est donc l'espace R^N des vecteurs de dimension N (fixée une fois pour toutes). Plus généralement, il sera utile de considérer des « agrégats » X de n_X vecteurs (X est donc une matrice $N \times n_X$, $1 \leq n_X \leq N$). Le produit scalaire¹ de X et Y est défini par $(X, Y) \triangleq X^T Y$. Il est bien connu que le filtrage des Moindres Carrés est intimement relié à l'outil projection orthogonale, et donc le filtrage des Moindres Carrés Récursifs à la « réactualisation » d'opérateurs de projection. Soit P_Y (resp. P_Y^\perp) le projecteur sur le sous-espace vectoriel (s.e.v.) $\text{Im}(Y)$ engendré par les colonnes de Y (resp. sur son complément orthogonal), $P_Y = Y(Y^T Y)^{-1} Y^T$ et $P_Y^\perp = I - Y(Y^T Y)^{-1} Y^T$. L'outil fondamental pour réactualiser un opérateur de projection est le fait que le projecteur sur le sous-espace augmenté $\text{Im}(Y, A)$ est égal au projecteur sur $\text{Im}(Y)$, plus le projecteur sur la partie de $\text{Im}(A)$ qui est orthogonale à $\text{Im}(Y)$: $P_{Y,A} = P_{Y,P_Y^\perp A} = P_Y + P_{P_Y^\perp A}$, et donc :

$$P_{Y,A}^\perp = P_Y^\perp - P_{P_Y^\perp A} = P_Y^\perp - P_Y^\perp A (A^T P_Y^\perp A)^{-1} A^T P_Y^\perp \quad (2)$$

Cette formule est d'une importance capitale en filtrage adaptatif des Moindres Carrés Récursifs et en filtrage de Kalman.

2.1. bi-orthogonalisation planaire entre résidus de projection

À partir de (2), on montre aisément [7–8] [13] [21–22] que le passage d'un couple de résidus de projection élémentaires $[P_Y^\perp A, P_Y^\perp B]$ au couple de résidus augmentés associé $[P_{Y,B}^\perp A, P_{Y,A}^\perp B]$ est une simple transformation linéaire :

$$\begin{bmatrix} P_{Y,B}^\perp A & P_{Y,A}^\perp B \\ P_{Y,B}^\perp A & P_{Y,A}^\perp B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_Y^\perp A & P_Y^\perp B \\ P_Y^\perp A & P_Y^\perp B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -(A^T P_Y^\perp A)^{-1} (A^T P_Y^\perp B) \\ -(B^T P_Y^\perp B)^{-1} (B^T P_Y^\perp A) & I \end{bmatrix} \quad (3a, b)$$

1. En toute rigueur, ceci ne définit pas un « produit scalaire », puisque (X, Y) n'est pas un scalaire et que $(X, Y) \neq (Y, X)$. L'emploi de cette notion est néanmoins justifié [24, p. 31].

avec

$$P_{Y,B}^\perp A \perp P_Y^\perp B \quad \text{et} \quad P_{Y,A}^\perp B \perp P_Y^\perp A, \quad (4)$$

ce qui est à l'origine du terme de « bi-orthogonalisation », introduit par Slock [21–22]. Les équations (3) et (4) sont visualisées par la figure 1, dans laquelle le plus petit (resp. le plus grand) des deux triangles semblables représente l'égalité (3a) (resp. (3b)) entre matrices $N \times n_A$ (resp. $N \times n_B$).

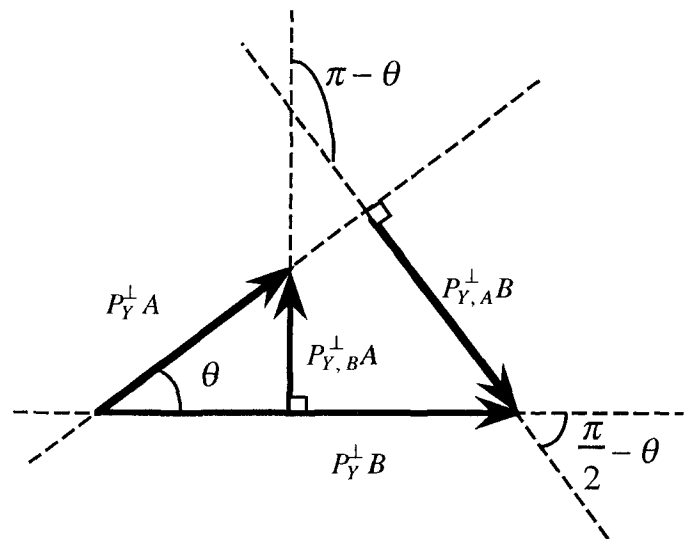


Figure 1.

2.2. résidus normalisés et PARCORs

L'obtention des relations de bi-orthogonalisation normalisées passe, dans le cas général multivarié, par une définition du PARCOR et donc par le choix d'une racine carrée matricielle (ce problème précis soulève un certain nombre de difficultés, qui ont été rencontrées dans le problème voisin de la caractérisation de l'autocorrélation d'un processus aléatoire stationnaire multidimensionnel par une fonction d'autocorrélation partielle matricielle [25–27]). Soit donc $M^{1/2}$ une première racine carrée, qualifiée de *primaire* (ou de *directe* [27]), et choisie une fois pour toutes (de façon à rendre les formules uniques), de la matrice symétrique et supposée définie positive² M : $M^{1/2} (M^{1/2})^T = M \cdot M^{1/2}$ peut être, par exemple, le facteur de Cholesky triangulaire inférieur (ou supérieur) de M , sa racine carrée symétrique définie positive, ou encore la racine introduite par Dégerine [26, p. 966]. Observons que $M^{1/2}$ ne dépend que de M . Posons $(M^{1/2})^T \triangleq M^{T/2}$, $M^{-1/2} \triangleq (M^{1/2})^{-1}$ et $M^{-T/2} \triangleq (M^{T/2})^{-1} = (M^{-1/2})^T$ (notons que

2. Par souci de simplicité, nous ne considérons que le cas régulier. Une matrice du type $A^T P_Y^\perp A$ est inversible si et seulement si l'agrégat $P_Y^\perp A$ est de rang (colonne) complet.

$M^{-T/2}(M^{-T/2})^T = M^{-1}$ mais que $M^{-T/2}$ n'est pas nécessairement égal à $(M^{-1})^{1/2}$. Le résidu normalisé est alors défini par $\overline{P_Y^\perp A} = P_Y^\perp A (A^T P_Y^\perp A)^{-T/2}$, et on a $(\overline{P_Y^\perp A})^T \overline{P_Y^\perp A} = I_{n_A}$ et $\overline{P_{P_Y^\perp A}} = \overline{P_Y^\perp A} (\overline{P_Y^\perp A})^T = P_{P_Y^\perp A}$. Le « PARCOR » (ou coefficient de corrélation partielle dans le cas scalaire) $\rho_Y(A, B)$ est le produit scalaire des 2 résidus normalisés $\overline{P_Y^\perp A}$ et $\overline{P_Y^\perp B}$:

$$\rho_Y(A, B) \triangleq \left(\overline{P_Y^\perp A}, \overline{P_Y^\perp B} \right) = (A^T P_Y^\perp A)^{-1/2} (A^T P_Y^\perp B) (B^T P_Y^\perp B)^{-T/2} = \rho_Y^T(B, A)$$

De même que dans [25–27], nous sommes maintenant amenés à définir une deuxième racine carrée. De (2), on obtient en effet l'importante formule :

$$\begin{aligned} & \left[(B^T P_Y^\perp B)^{-1/2} (B^T P_{Y,A}^\perp B)^{1/2} \right] \\ & \quad \times \left[(B^T P_Y^\perp B)^{-1/2} (B^T P_{Y,A}^\perp B)^{1/2} \right]^T = \\ & = I - \rho_Y(B, A) \rho_Y^T(B, A) \end{aligned}$$

$(B^T P_Y^\perp B)^{-1/2} (B^T P_{Y,A}^\perp B)^{1/2}$ est donc une racine carrée de $(I - \rho_Y(B, A) \rho_Y^T(B, A))$. Etant donné que cette racine carrée apparaît dans la plupart des équations à venir, elle joue un rôle tout particulier, aussi nous posons :

$$(I - \rho_Y(B, A) \rho_Y^T(B, A))_{ind.}^{1/2} \triangleq (B^T P_Y^\perp B)^{-1/2} (B^T P_{Y,A}^\perp B)^{1/2}, \quad (5)$$

où la notation *ind.* (pour *induite*) souligne le fait que les racines primaires $(I - \rho_Y(B, A) \rho_Y^T(B, A))^{1/2}$ et induite $(I - \rho_Y(B, A) \rho_Y^T(B, A))_{ind.}^{1/2}$ de $(I - \rho_Y(B, A) \rho_Y^T(B, A))$ peuvent être différentes. Elles coïncident si le choix initial $M^{1/2}$ de la racine primaire s'est porté sur le facteur de Cholesky (inférieur ou supérieur), ou, bien sûr, dans le cas scalaire ($n_A = n_B = 1$), qui ne pose pas de difficulté, mais diffèrent en revanche dans le cas de la racine symétrique définie positive (les 2 facteurs du membre de droite de (6) ne commutent pas, en général).

La version normalisée de (3) devient alors (7) :

$$\begin{aligned} & \left[\overline{P_{Y,B}^\perp A} \overline{P_{Y,A}^\perp B} \right] = \left[\overline{P_Y^\perp A} \overline{P_Y^\perp B} \right] \Phi_Y(A, B), \\ \Phi_Y(A, B) & = \begin{bmatrix} I & -\rho_Y(A, B) \\ -\rho_Y^T(A, B) & I \end{bmatrix} \\ & \left[\begin{array}{cc} (I - \rho_Y(A, B) \rho_Y^T(A, B))_{ind.}^{-T/2} & 0 \\ 0 & (I - \rho_Y^T(A, B) \rho_Y(A, B))_{ind.}^{-T/2} \end{array} \right] \end{aligned} \quad (7)$$

où nous adoptons les mêmes conventions de notations que pour les racines primaires : $(I - \rho \rho^T)_{ind.}^{T/2}$, $(I - \rho \rho^T)_{ind.}^{-1/2}$ et $(I - \rho \rho^T)_{ind.}^{-T/2}$ désignent donc respectivement $\left[(I - \rho \rho^T)_{ind.}^{1/2} \right]^T$,

$\left[(I - \rho \rho^T)_{ind.}^{1/2} \right]^{-1}$ et $\left[(I - \rho \rho^T)_{ind.}^{T/2} \right]^{-1}$. (7) peut être réordonné en (8) :

$$\begin{aligned} & \left[\overline{P_Y^\perp A} \overline{P_{Y,A}^\perp B} \right] = \left[\overline{P_{Y,B}^\perp A} \overline{P_Y^\perp B} \right] \\ & \underbrace{\left[\begin{array}{cc} (I - \rho_Y(A, B) \rho_Y^T(A, B))_{ind.}^{T/2} & -\tilde{\rho}_Y(A, B) \\ \rho_Y^T(A, B) & (I - \rho_Y^T(A, B) \rho_Y(A, B))_{ind.}^{1/2} \end{array} \right]}_{\Theta_Y(A, B)} \end{aligned} \quad (8)$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_Y(A, B) & \triangleq (I - \rho_Y(A, B) \rho_Y^T(A, B))_{ind.}^{T/2} \rho_Y(A, B) \\ & \quad (I - \rho_Y^T(A, B) \rho_Y(A, B))_{ind.}^{-T/2} \end{aligned} \quad (9)$$

Puisque $\tilde{\rho}_Y(A, B)$ apparaît dans de nombreuses formules au paragraphe 5, une étude lui est consacrée dans l'annexe 1. $\Phi_Y(A, B)$ (respectivement $\Theta_Y(A, B)$) est J_{n_A, n_B} - orthogonale³ (respectivement orthogonale), et donc une rotation hyperbolique si $n_A = n_B = 1$.

2.3. interprétations trigonométriques classiques (dans un triangle plan)

Dans le cas scalaire, des considérations géométriques simples, à caractère trigonométrique, peuvent être obtenues à partir de la figure 1 (on peut les généraliser au cas multidimensionnel grâce au concept d'angles principaux entre sous-espaces [28]). $\rho_Y(A, B)$ est le produit scalaire de 2 vecteurs de longueur 1 et peut donc être perçu comme le cosinus de l'angle θ entre $\overline{P_Y^\perp A}$ et $\overline{P_Y^\perp B}$. L'identité

$$B^T P_{Y,A}^\perp B = B^T P_Y^\perp B - B^T P_Y^\perp A (A^T P_Y^\perp A)^{-1} A^T P_Y^\perp B$$

est le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle $(P_Y^\perp B, P_Y^\perp A (A^T P_Y^\perp A)^{-1} (A^T P_Y^\perp B), P_Y^\perp A B)$. (6) exprime que, dans ce triangle rectangle, $\sin(\theta)$ est le quotient du côté opposé sur l'hypoténuse. À partir de (5) et (7) on peut montrer de même que $(\overline{P_Y^\perp A}, \overline{P_{Y,B}^\perp A}) = (I - \rho_Y(A, B) \rho_Y^T(A, B))_{ind.}^{1/2}$, c'est-à-dire $\cos(\pi/2 - \theta) = \sin(\theta)$. Enfin,

$$\left(\overline{P_{Y,B}^\perp A}, \overline{P_{Y,A}^\perp B} \right) = -\tilde{\rho}_Y(A, B) = -\rho_Y(A, B)$$

(cf. annexe 1) exprime le fait que $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$.

3. C'est-à-dire vérifie $\Phi_Y(A, B) J_{n_A, n_B} \Phi_Y^T(A, B) = \Phi_Y^T(A, B) J_{n_A, n_B} \Phi_Y(A, B) = J_{n_A, n_B}$; J_{n_A, n_B} désigne par ailleurs la matrice diagonale dont les n_A premiers (les n_B derniers) éléments sont égaux à 1 (à -1).

3. IYR dans le tétraèdre normalisé 3D

3.1. application aux algorithmes rapides

Les algorithmes MCRR transverses et en treillis peuvent être obtenus comme cas particuliers de formules du paragraphe 2. Bien que ces résultats soient bien connus, il nous semble important de les évoquer ici brièvement, car c'est la compréhension de ces mécanismes qui nous mène tout naturellement à introduire le tétraèdre normalisé au paragraphe 3.2.

Commençons par les filtres transverses. Considérons par souci de simplicité le cas $\{y_i\}$ monodimensionnel, préenêtré, avec facteur d'oubli $\lambda = 1$ (ces restrictions peuvent aisément être levées). Soit $\mathbf{y}_{t-p} \triangleq [0 \dots 0 y_0 \dots y_{t-p}]^T$ et $\sigma \triangleq [0 \dots 0 1]^T$ (vecteurs de dimension $N = t + 1$). Effectuons l'identification :

$$Y = [\mathbf{y}_{t-1} \dots \mathbf{y}_{t-n}], A = \mathbf{y}_t, B = \sigma.$$

Appelons respectivement $\bar{A}_{n,t}$ et $\bar{C}_{n+1,t}$ le blanchisseur direct optimal, et l'opposé du « gain de Kalman », normalisés, définis dans [23]. Soit $\gamma_{n,t-1} \triangleq \sigma^T P_Y^\perp \sigma$ la variable de pseudo-vraisemblance et $\bar{e}_n^p(t) \triangleq \bar{A}_{n,t-1} [\mathbf{y}_t \dots \mathbf{y}_{t-n}]^T$ l'erreur de prédiction directe a priori normalisée. On a :

$$\rho_Y(\mathbf{y}_t, \sigma) = \sqrt{\gamma_{n+1,t}} \bar{e}_n^p(t) \triangleq \nu_{n,t}.$$

Du fait de la structure particulière de Y , (8) s'écrit :

$$[\mathbf{y}_t Y \sigma] \begin{bmatrix} \bar{A}_{n,t}^T & \vdots & \bar{C}_{n+1,t}^T \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & (\gamma_{n+1,t})^{-1/2} \end{bmatrix} = [\mathbf{y}_t Y \sigma]$$

$$\begin{bmatrix} \vdots & 0 \\ \bar{A}_{n,t-1}^T & \vdots & \bar{C}_{n,t-1}^T \\ \dots & \dots & \dots \\ -\bar{e}_n^p(t) & \vdots & (\gamma_{n,t-1})^{-1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{1 - \nu_{n,t}^2} & -\nu_{n,t} \\ \nu_{n,t} & \sqrt{1 - \nu_{n,t}^2} \end{bmatrix}$$

Or cette transformation entre résidus de projection induit la même transformation entre filtres ayant produit ces résidus de projection [13] [19] [21, pp. 52–59] : c'est une façon géométrique d'établir les algorithmes transverses, dont nous reconnaissons ci-dessus la passe directe normalisée. La passe rétrograde (réactualisation du blanchisseur rétrograde) s'obtient de même en identifiant dans (7) A à \mathbf{y}_{t-n-1} et B à σ . Enfin, l'identification $A = \mathbf{y}_t$ et $B = \mathbf{y}_{t-n-1}$ dans (7) produit les relations récurrentes en ordre (de type Levinson) entre blanchisseurs direct et rétrograde décalé.

Considérons maintenant les algorithmes en treillis. Rappelons tout d'abord l'IY, qui s'obtient en exprimant, grâce à (7), $\overline{P_{Y,A}^\perp C}$ en fonction de $\overline{P_{Y,A}^\perp A}$ et $\overline{P_{Y,A}^\perp C}$, $\overline{P_{Y,A}^\perp B}$ en fonction de $\overline{P_{Y,A}^\perp A}$ et $\overline{P_{Y,A}^\perp B}$, puis en en prenant le produit scalaire $(\overline{P_{Y,A}^\perp C}, \overline{P_{Y,A}^\perp B})$ [6] [13] :

$$\rho_{Y,A}(C, B) = (I - \rho_Y(C, A)\rho_Y(A, C))_{ind.}^{-1/2} (\rho_Y(C, B) - \rho_Y(C, A)\rho_Y(A, B)) (I - \rho_Y(B, A)\rho_Y(A, B))_{ind.}^{-T/2} \quad (10a)$$

(10a) admet la version réordonnée (quelquefois appelée « inverse ») :

$$\rho_Y(C, B) = \rho_Y(C, A)\rho_Y(A, B) + (I - \rho_Y(C, A)\rho_Y(A, C))_{ind.}^{1/2} \rho_{Y,A}(C, B) (I - \rho_Y(B, A)\rho_Y(A, B))_{ind.}^{T/2} \quad (10b)$$

Les récurrences du treillis MCRR doublement normalisé sont 3 applications particulières de l'IY ou de l'IYR⁴, plus précisément, il faut de même identifier Y à $[\mathbf{y}_{t-1} \dots \mathbf{y}_{t-n}]$, et remplacer (A, B, C) par les permutations suivantes de $(\mathbf{y}_t, \mathbf{y}_{t-n-1}, \sigma)$ [10] [12–13] [19] :

	A	B	C
(1b)	\mathbf{y}_{t-n-1}	σ	\mathbf{y}_t
(1c)	\mathbf{y}_t	σ	\mathbf{y}_{t-n-1}
(1a) - (1d)	σ	\mathbf{y}_{t-n-1}	\mathbf{y}_t

3.2. le tétraèdre normalisé

Le développement du paragraphe 3.1 peut se résumer de la façon suivante. En remarquant que les équations entre résidus de projection induisent les mêmes équations entre les filtres qui ont produit ces résidus, les algorithmes MCRR transverses (et la relation récurrente en ordre de type Levinson) résultent des 3 applications particulières de (7) ou de (8), que l'on obtient en remplaçant A et B par 2 agrégats quelconques pris parmi $(\mathbf{y}_t, \mathbf{y}_{t-n-1}, \sigma)$. D'autre part, les algorithmes MCRR en treillis normalisés en angle sont les 3 applications particulières du produit $(\overline{P_{Y,A}^\perp B}, \overline{P_{Y,A}^\perp C})$, développé grâce à (7), obtenues en remplaçant A par un agrégat quelconque pris parmi $(\mathbf{y}_t, \mathbf{y}_{t-n-1}, \sigma)$ et B et C par les deux autres agrégats.

Les 3 formules de bi-orthogonalisation planaires propres au problème MCRR s'écrivent donc dans les plans des 3 triangles OAB, OAC et OBC formés respectivement à partir des vecteurs

$$\begin{aligned} \vec{OA} &= \overline{P_Y^\perp A} & \text{et} & \quad \vec{OB} = \overline{P_Y^\perp B}, \\ \vec{OA} &= \overline{P_Y^\perp A} & \text{et} & \quad \vec{OC} = \overline{P_Y^\perp C}, \\ \vec{OB} &= \overline{P_Y^\perp B} & \text{et} & \quad \vec{OC} = \overline{P_Y^\perp C}, \end{aligned}$$

4. Les racines carrées qui apparaissent dans les équations (1) sont donc les racines carrées induites.

et avec l'identification $(A, B, C) = (y_t, y_{t-n-1}, \sigma)$. Ces 3 triangles partagent deux à deux une arête et ont en commun un même sommet 0; ils définissent donc dans l'espace 3D le tétraèdre normalisé (c'est-à-dire $OA = OB = OC = 1$) $OABC$ de la figure 2. De façon générale, on ne peut pas visualiser plus de 3 s.e.v. disjoints de R^N . Mais dans le cas présent, au vu de la figure 1 (ou de (7)), les 6 résidus augmentés $\overline{P_{Y,A}^\perp B}$, $\overline{P_{Y,B}^\perp A}$, $\overline{P_{Y,A}^\perp C}$, $\overline{P_{Y,C}^\perp A}$, $\overline{P_{Y,B}^\perp C}$ et $\overline{P_{Y,C}^\perp B}$ prennent place également dans ce même tétraèdre (pour que la figure reste claire, nous n'avons indiqué que la direction de ces vecteurs, en fait de longueur 1).

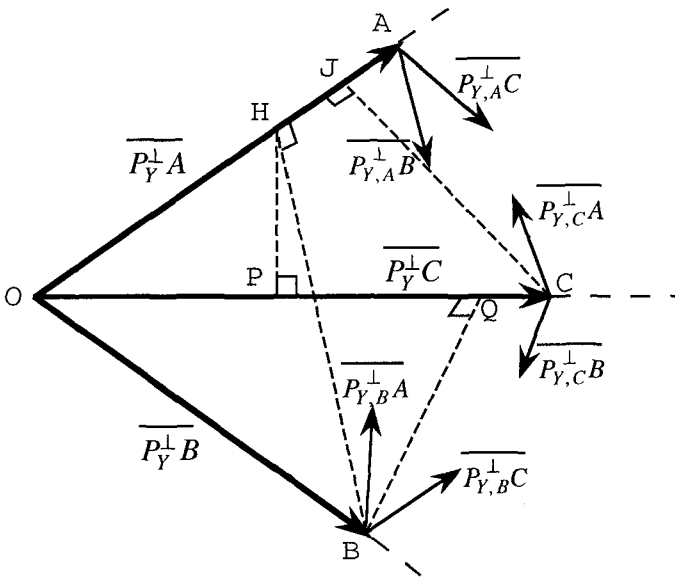


Figure 2.

Montrons maintenant que l'IYR admet une interprétation géométrique nouvelle en termes de projections à l'intérieur de ce tétraèdre. Soit Q (resp. H) la projection orthogonale de B sur \overrightarrow{OC} (resp. \overrightarrow{OA}), et P la projection orthogonale de H sur \overrightarrow{OC} . L'identité $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$ entre matrices $N \times n_B = (N \times n_C) \times (n_C \times n_B)$ s'écrit (cf. annexe 2) :

$$\overline{P_{Y,C}^\perp} \rho_Y(C, B) = \overline{P_{Y,C}^\perp} \rho_Y(C, A) \rho_Y(A, B) + \overline{P_{Y,C}^\perp} (I - \rho_Y(C, A) \rho_Y(A, C))_{ind.}^{1/2} \rho_{Y,A}(C, B) (I - \rho_Y(B, A) \rho_Y(A, B))_{ind.}^{T/2}$$

donc cette décomposition correspond exactement à la somme (10b), c'est-à-dire, la « longueur » OQ de \overrightarrow{OQ} est égale à $\rho_Y(C, B)$, le membre de gauche de (10b); $OP = \rho_Y(C, A) \rho_Y(A, B)$, tandis que le deuxième terme du membre de droite de (10b) est égal à PQ .

4. connexions avec la trigonométrie sphérique

Le lien avec la TS provient de l'identité $OA = OB = OC = 1$: les 3 points A, B et C de la figure 2 sont sur la sphère de centre O et de rayon 1. Ils déterminent donc non seulement le tétraèdre $OABC$, mais aussi le triangle sphérique ABC , constitué par définition des 3 arcs AB, AC et BC de grands cercles obtenus en intersectant les 3 plans OAB , OAC , OBC et la sphère (cf. figure 3).

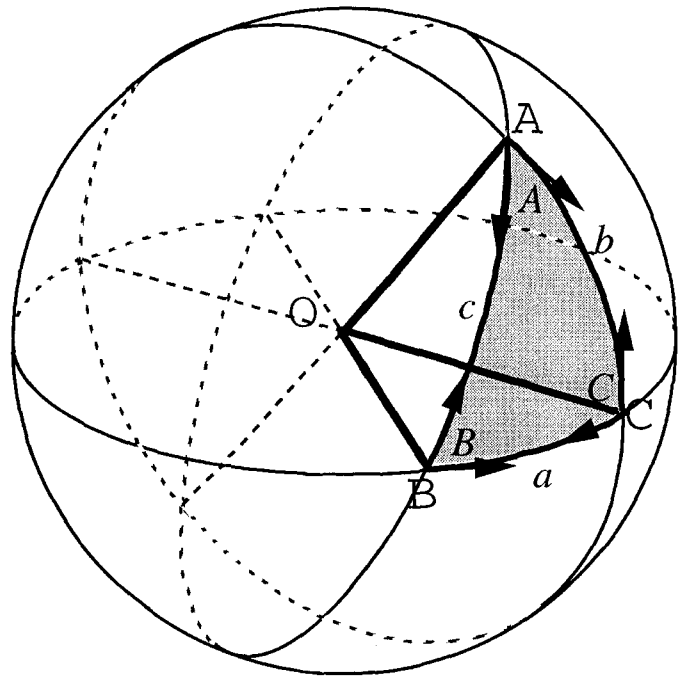


Figure 3.

Un triangle sphérique comporte 6 éléments a, b, c, A, B et C . L'angle BDC est égal à la longueur de l'arc BC et est noté a . L'angle dièdre A entre les plans OAB et OAC est défini comme l'angle plan entre 2 lignes droites orthogonales à OA et appartenant respectivement à OAB et à OAC . Remarquons que A est égal à l'angle plan formé par les tangentes au triangle sphérique au point A. Les autres éléments sont définis de façon identique. a, b, c sont les 3 côtés, et A, B, C les 3 angles du triangle sphérique.

Il y a 3 degrés de liberté dans un triangle sphérique : 3 éléments quelconques déterminent les 3 autres. Par conséquent, il ne peut y avoir plus de 3 relations distinctes entre les 6 éléments. Pour obtenir un tel jeu de formules (11a,b,c), considérons de nouveau la preuve de l'IYR de l'annexe 2, mais en tenant compte maintenant de la figure 3 en même temps que de la figure 2. $OQ = \cos a$,

Tableau 1. – Tableau de correspondance entre variables

$Y = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ y_0^T & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 \\ & & y_0^T \\ & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ y_{t-1}^T & \dots & y_{t-n}^T \end{bmatrix}$	$, y_t = \begin{bmatrix} y_0^T \\ y_1^T \\ \vdots \\ \vdots \\ y_t^T \end{bmatrix}$	$, y_{t-n-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ y_0^T \\ \vdots \\ y_{t-n-1}^T \end{bmatrix}$	$, \sigma = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
$\rho_{n+1,t} \leftrightarrow \rho_Y(C, B) \leftrightarrow \cos a$	$\nu_{n,t} \leftrightarrow \rho_Y(C, A) \leftrightarrow \cos b$	$\nu_{n+1,t} \leftrightarrow \rho_{Y,A}(C, B) \leftrightarrow \cos A$	$\eta_{n+1,t} \leftrightarrow \rho_{Y,B}(C, A) \leftrightarrow \cos B$
$\eta_{n,t-1} \leftrightarrow \rho_Y(B, A) \leftrightarrow \cos c$	$\eta_{n+1,t} \leftrightarrow \rho_{Y,C}(B, A) \leftrightarrow \cos C$		

OP=OH cos b = cos c cos b, et

$$(\vec{HB}, \vec{OC}) = (\vec{HB}, \vec{OJ} + \vec{JC}) = (\vec{HB}, \vec{JC}) = \text{HB} \times \text{JC} \times \cos(\vec{HB}, \vec{JC}) = \sin c \sin b \cos A.$$

Nous venons de montrer⁵ la *formule des cosinus*⁶ de la TS :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \cos A \sin c \tag{11a}$$

cette formule générique reste vraie par permutation des variables⁷, ce qui fait que l'on a aussi :

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \cos B \sin c \tag{11b}$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \cos C \sin b \tag{11c}$$

Par conséquent, nous reconnaissons que la *formule des cosinus (11) est formellement égale à l'IYR (10b)*⁸, et donc aux récurrences du treillis (1), comme cas particulier, grâce à la double identification de variables de la table 1. De plus les 6 PARCORS dans (1), que l'on pouvait déjà interpréter comme les cosinus d'angles entre résidus de projection (cf. paragraphe 2.3), sont aussi les cosinus des 6 éléments d'un triangle sphérique.

5. Cette démonstration se trouve dans [29]; c'est elle qui a inspiré notre propre démonstration (cf. paragraphe 3.2 et annexe 2) de l'IYR.

6. En vertu de la remarque ci-dessus, toute autre formule peut se déduire de (11a,b,c). C'est pourquoi les équations (11) sont souvent appelées les formules « fondamentales » de la TS.

7. C'est un trait constant des formules de TS. C'est ainsi qu'au paragraphe 5, un ensemble de formules qui se déduisent l'une de l'autre par simple permutation des variables ne sera décrit que par une seule équation « générique ».

8. Le cadre de la TS est l'espace 3D usuel, et les cosinus des éléments sont des nombres réels compris entre -1 et 1. En revanche, $\rho_Y(U, V)$ est une matrice $n_U \times n_V$, et l'égalité n'a donc lieu en toute rigueur que dans le cas scalaire $n_U = n_V = 1$. Toutefois, $\forall Y, U, V$, la norme spectrale $\|\rho_Y(U, V)\|_2$ est inférieure ou égale à 1 [10]. L'analogie s'étend donc au cas multidimensionnel.

Revisitons maintenant les équations (1a,b,c) dans cette optique. On connaît deux côtés b et c , plus l'angle entre eux deux A (en fait par l'intermédiaire de leurs cosinus) : $\cos b = \nu_{n,t}$, $\cos c = \eta_{n,t-1}$ et $\cos A = \rho_{n+1,t-1}$, et on veut calculer $\cos a = \rho_{n+1,t}$, $\cos B = \nu_{n+1,t}$ et $\cos C = \eta_{n+1,t}$ (cf. table 1). Ce PTS (un PTS [30] consiste à déterminer 3 éléments parmi 6, étant donné les 3 autres) semble être particulièrement important en pratique, puisqu'il apparaît souvent, bien que dans des contextes très différents. Par exemple :

- Le problème de base de la navigation [30] est le suivant : étant donné un (aéro)port de départ B et un (aéro)port d'arrivée C, quelle est la plus courte distance (c'est-à-dire suivant un arc de grand cercle) de B à C, et quelle direction doit être suivie par l'avion ou le bateau? On se place dans le « triangle terrestre » ABC (A étant le pôle Nord et la sphère représentant la Terre), dans lequel on est amené à résoudre le même PTS que ci-dessus : on connaît en effet $b = 90^\circ - \text{Latitude}(B)$, $c = 90^\circ - \text{Latitude}(C)$ et A (différence entre la longitude de B et celle de C), et on cherche le 3ème côté a et (l'un des) deux autres angles B et C .

- De même, ce PTS surgit fréquemment en astrométrie : la conversion entre coordonnées locales et coordonnées horaires, et vice versa [31–34]; la conversion entre coordonnées équatoriales et coordonnées écliptiques, et vice versa [31–35]; ainsi que de nombreux autres problèmes d'astronomie [31], nécessitent eux aussi la résolution du PTS $(A, b, c) \rightarrow (a, B, C)$ (ou $(A, b, c) \rightarrow (a, B)$).

La solution (1a,b,c) trouvée par Lee *et al.* n'utilise que la formule des cosinus. D'abord, $\cos a = \rho_{n+1,t}$ est calculé grâce à (11a)=(1a). Puis, on extrait $\cos B = \nu_{n+1,t}$ et $\cos C = \eta_{n+1,t}$ en réarrangeant respectivement (11b) en (1b) et (11c) en (1c).

5. formules nouvelles entre PARCORs induites par la TS

La TS est apparue avec Ménélaüs d'Alexandrie (I^{er} siècle après J.C.) et s'est constamment développée depuis lors [36–38]. Dans l'Antiquité, la trigonométrie n'était qu'un outil pour les besoins de l'astronomie. Elle est devenue au Moyen Âge une science en soi (la « science des triangles ») dans le monde musulman [39]. La TS était encore objet de recherches au XIX^{ème} siècle, lorsque Gauss puis Riemann ont découvert que la géométrie sur la sphère s'inscrivait dans le cadre de la géométrie Riemannienne (ou elliptique) [40]. Par conséquent il semble tout à fait improbable que le lien avec le filtrage adaptatif dont il est question au paragraphe 4 apporte des développements nouveaux à ce sujet devenu maintenant très classique.

Au delà de l'interprétation géométrique nouvelle du treillis doublement normalisé, la TS apporte en revanche un certain nombre de contributions en filtrage adaptatif MCRR. En effet, les livres de TS contiennent tout un ensemble de formules et la première question qui se pose naturellement est de savoir si l'analogie entre les deux formalismes se poursuit, c'est-à-dire si les formules équivalentes entre PARCORs sont vraies ou non. Précisons d'emblée que les formules de TS impliquant des multiples ou des fractions des éléments ne s'adaptent pas directement. Ceci est dû à la différence majeure entre les deux formalismes : en TS on connaît des éléments, en filtrage adaptatif MCRR on connaît leurs cosinus. Parmi les formules qui s'adaptent bien et que nous listons ci-dessous, la loi des sinus dans le cas scalaire est déjà connue (nous ne lui apportons donc qu'une interprétation géométrique). Les autres formules en revanche sont originales.

Avant de lister ces différentes formules, il est nécessaire d'évoquer le principe de dualité de la TS. Appelons A' le pôle (relatif à l'équateur passant par B et C) qui se trouve dans le même hémisphère que A, et définissons B' et C' de la même façon. Le triangle sphérique A'B'C' est le triangle polaire de ABC. Dans A'B'C' les éléments a' et A' sont égaux respectivement à $\pi - A$ et à $\pi - a$ (cf. par ex. [18, pp. 980–81]) et de même pour les autres éléments. Par conséquent, toute formule de TS admet une relation duale, obtenue en remplaçant (a, b, c, A, B, C) respectivement par ($\pi - A, \pi - B, \pi - C, \pi - a, \pi - b, \pi - c$).

Entre 4 éléments quelconques il existe une et une seule relation. Ces 15 formules sont les 3 formules des cosinus, le groupe dual des 3 formules des cosinus dans le triangle polaire, les 3 formules auto-duales des sinus et les 6 formules auto-duales des cotangentes. Elles admettent toutes une formule équivalente entre PARCORs. En revanche, il y a beaucoup de relations différentes entre 5 éléments quelconques (ou entre les 6), et il semble toujours possible d'en trouver de nouvelles. On n'essayera donc pas ici de fournir une liste exhaustive de toutes celles qui s'écrivent

également en termes de PARCORs. Nous n'en mentionnerons qu'une particulièrement utile, la « formule des 5 éléments ».

5.1. la formule des cosinus dans le triangle polaire

Dans le triangle polaire, la formule des cosinus s'écrit :

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \cos a \sin C \quad (12)$$

ce qui suggère qu'une relation similaire existe entre PARCORs. De fait, dans l'annexe 3, nous montrons d'abord que $(\overline{P_{Y,B,C}^\perp A}, \overline{P_{Y,C,A}^\perp B}, \overline{P_{Y,A,B}^\perp C})$ est le « tétraèdre polaire » OA'B'C' de $(\overline{P_Y^\perp A}, \overline{P_Y^\perp B}, \overline{P_Y^\perp C})$. Puis nous adaptons la démonstration de l'annexe 2 à OA'B'C', pour obtenir la version polaire de l'IYR (cf. paragraphe 2.2 pour la définition de $\tilde{\rho}_Y(A, B)$) :

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{Y,A}(C, B) = & -\tilde{\rho}_{Y,B}(C, A) \tilde{\rho}_{Y,C}(A, B) + \\ & (I - \rho_{Y,B}(C, A) \rho_{Y,B}(A, C))_{ind.}^{T/2} \\ & \tilde{\rho}_Y(C, B) (I - \rho_{Y,C}(B, A) \rho_{Y,C}(A, B))_{ind.}^{1/2} \quad (13) \end{aligned}$$

Plaçons nous en particulier dans le cas scalaire (où $\tilde{\rho} = \rho$). Alors, de même que $\rho_{Y,A}(C, B) = F(\rho_Y(C, B), \rho_Y(C, A), \rho_Y(A, B))$ où $F(x, y, z) = (1 - y^2)^{-1/2}(x - yz)(1 - z^2)^{-1/2}$,

$$-\rho_Y(C, B) = F(-\rho_{Y,A}(C, B), -\rho_{Y,B}(C, A), -\rho_{Y,C}(A, B)).$$

Les équations MCRR correspondantes fournissent le treillis normalisé en angle décroissant dans le temps :

$$\begin{aligned} \rho_{n+1,t-1} = & -\nu_{n+1,t} \eta_{n+1,t} + \sqrt{1 - \nu_{n+1,t}^2} \rho_{n+1,t} \sqrt{1 - \eta_{n+1,t}^2} \\ \nu_{n,t} = & (1 - \rho_{n+1,t-1}^2)^{-1/2} (\nu_{n+1,t} + \rho_{n+1,t-1} \eta_{n+1,t}) (1 - \eta_{n+1,t}^2)^{-1/2} \\ \eta_{n,t-1} = & (1 - \rho_{n+1,t-1}^2)^{-1/2} (\eta_{n+1,t} + \rho_{n+1,t-1} \nu_{n+1,t}) (1 - \nu_{n+1,t}^2)^{-1/2} \quad (14) \end{aligned}$$

5.2. la formule des sinus

Soit K la projection orthogonale de C sur OAB. CK est l'une des 4 altitudes du tétraèdre OABC. Projetons K sur OA, ce qui donne M, et sur OB, ce qui donne N (cf. figure 4). CK=CM sin A = sin b sin A. De même, CK=CN sin B = sin a sin B. Donc

$$CK = \sin b \sin A = \sin a \sin B \quad (15)$$

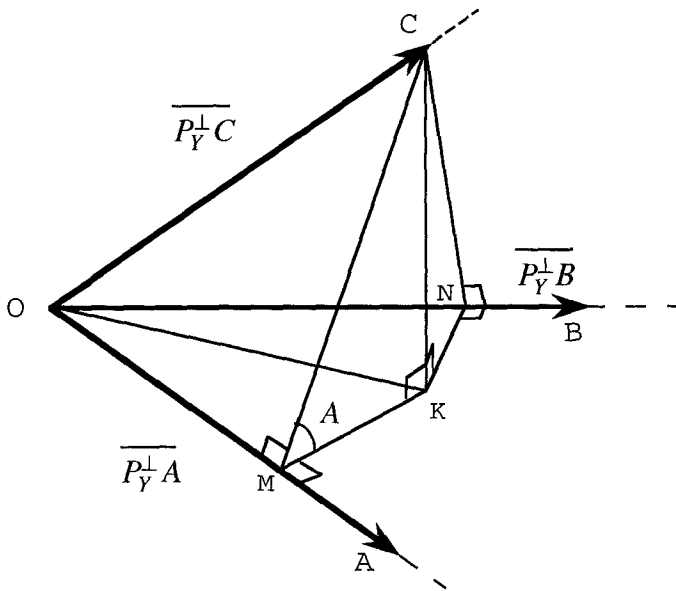


Figure 4.

et il y a 3 relations de ce type (obtenues en permutant les variables), à partir desquelles on déduit la formule auto-duale des sinus :

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} \quad (16)$$

Adaptons maintenant la démonstration ci-dessus. Grâce à (8), $\vec{OC} = \vec{OK} + \vec{KC}$, $\vec{OC} = \vec{OM} + (\vec{MK} + \vec{KC})$ et $\vec{OC} = \vec{ON} + (\vec{NK} + \vec{KC})$ s'écrivent respectivement :

$$\overline{P_Y^\perp C} = \overline{P_Y^\perp [A, B]} \rho_Y^T(C, [A, B]) + \overline{P_{Y,A,B}^\perp C} (I - \rho_Y(C, [A, B])) \rho_Y^T(C, [A, B])_{ind.}^{T/2}$$

$$\overline{P_Y^\perp C} = \overline{P_Y^\perp A} \rho_Y^T(C, A) + \left[\overline{P_{Y,A}^\perp B} \rho_{Y,A}^T(C, B) + \overline{P_{Y,A,B}^\perp C} (I - \rho_{Y,A}(C, B)) \rho_{Y,A}^T(C, B) \right]_{ind.}^{T/2} (I - \rho_Y(C, A)) \rho_Y^T(C, A)_{ind.}^{T/2}$$

$$\overline{P_Y^\perp C} = \overline{P_Y^\perp B} \rho_Y^T(C, B) + \left[\overline{P_{Y,B}^\perp A} \rho_{Y,B}^T(C, A) + \overline{P_{Y,A,B}^\perp C} (I - \rho_{Y,B}(C, A)) \rho_{Y,B}^T(C, A) \right]_{ind.}^{T/2} (I - \rho_Y(C, B)) \rho_Y^T(C, B)_{ind.}^{T/2}$$

D'après (4), $\overline{P_{Y,A,B}^\perp C}$ est orthogonal à $\overline{P_Y^\perp [A, B]}$, $\overline{P_{Y,A}^\perp B}$ et $\overline{P_{Y,B}^\perp A}$; et donc aussi, d'après (7), à $\overline{P_Y^\perp A}$ et à $\overline{P_Y^\perp B}$. En prenant le produit scalaire de $\overline{P_{Y,A,B}^\perp C}$ avec chacune des 3 expressions de $\overline{P_Y^\perp C}$ ci-dessus, nous obtenons par conséquent :

$$\begin{aligned} & \underbrace{(I - \rho_Y(C, [A, B])) \rho_Y^T([A, B], C)}_{CK} \rho_Y^T(C, [A, B])_{ind.}^{1/2} = \\ & \underbrace{(I - \rho_Y(C, A)) \rho_Y^T(A, C)}_{\sin b} \rho_Y^T(A, C)_{ind.}^{1/2} \underbrace{(I - \rho_{Y,A}(C, B)) \rho_{Y,A}^T(B, C)}_{\sin A} \rho_{Y,A}^T(C, B)_{ind.}^{1/2} \\ & = \underbrace{(I - \rho_Y(C, B)) \rho_Y^T(B, C)}_{\sin a} \rho_Y^T(B, C)_{ind.}^{1/2} \underbrace{(I - \rho_{Y,B}(C, A)) \rho_{Y,B}^T(A, C)}_{\sin B} \rho_{Y,B}^T(C, A)_{ind.}^{1/2} \end{aligned} \quad (17)$$

Ainsi l'égalité (15) admet une formule analogue dans le cas général multidimensionnel (qui peut se démontrer plus simplement à partir de (6), mais on perd alors l'interprétation géométrique). La relation (16) par contre ne s'étend que dans le cas scalaire; les formules MCRR correspondantes sont connues [41, relation (12)] :

$$\frac{\sqrt{1 - \rho_{n+1,t-1}^2}}{\sqrt{1 - \rho_{n+1,t}^2}} = \frac{\sqrt{1 - \nu_{n+1,t}^2}}{\sqrt{1 - \nu_{n,t}^2}} = \frac{\sqrt{1 - \eta_{n+1,t}^2}}{\sqrt{1 - \eta_{n,t-1}^2}}$$

5.3. les formules en cotangente

Ce sont les 6 formules auto-duales obtenues par permutation des variables dans l'équation générique :

$$\cos C \cos a = \cot b \sin a - \sin C \cot B \quad (18)$$

Adaptons la démonstration de (18), donnée par exemple dans [18, pp. 987-88], afin d'écrire l'équivalent PARCOR. Exprimons via (10b) $\rho_Y(A, C)$ en fonction de $\rho_Y(A, B)$, $\rho_Y(B, C)$ et $\rho_{Y,B}(A, C)$. Puis remplaçons dans cette expression $\rho_Y(A, B)$, toujours via (10b), par son expression en fonction de $\rho_Y(A, C)$, $\rho_Y(C, B)$ et $\rho_{Y,C}(A, B)$, et pré- (post-) multiplions par $(I - \rho_Y(A, C)) \rho_Y^T(C, A)_{ind.}^{-1/2}$ (par $(I - \rho_Y(C, B)) \rho_Y^T(B, C)_{ind.}^{-T/2}$) :

$$\begin{aligned} & (I - \rho_Y(A, C)) \rho_Y^T(C, A)_{ind.}^{-1/2} \rho_Y(A, C) (I - \rho_Y(C, B)) \\ & \rho_Y^T(B, C)_{ind.}^{1/2} = \rho_{Y,C}(A, B) \tilde{\rho}_Y(B, C) + (I - \rho_Y(A, C)) \\ & \rho_Y^T(C, A)_{ind.}^{-1/2} (I - \rho_Y(A, B)) \rho_Y^T(B, A)_{ind.}^{1/2} \rho_{Y,B}(A, C) \end{aligned} \quad (19)$$

(cf. paragraphe 2.2 pour la notation $\tilde{\rho}$). Utilisant la loi des sinus (17), on obtient la formule (20) analogue à (18) :

$$\begin{aligned} \rho_{Y,C}(A, B) \tilde{\rho}_Y(B, C) &= \left\{ (I - \rho_Y(A, C)) \rho_Y^T(C, A)_{ind.}^{-1/2} \rho_Y(A, C) \right\} \\ & (I - \rho_Y(C, B)) \rho_Y^T(B, C)_{ind.}^{1/2} - (I - \rho_{Y,C}(A, B)) \rho_{Y,C}^T(B, A)_{ind.}^{1/2} \\ & \left\{ (I - \rho_{Y,B}(A, C)) \rho_{Y,B}^T(C, A)_{ind.}^{-1/2} \rho_{Y,B}(A, C) \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

5.4. les formules des 5 éléments

Ce sont les 6 formules décrites par l'équation générique :

$$\cos b \sin c = \sin b \cos A \cos c + \sin a \cos B \quad (21a)$$

En s'inspirant de [29], la formule équivalente à (21a) s'obtient en additionnant (10b), post-multipliée par $\rho_Y(B, A)$, à (10b), écrite pour $\rho_Y(C, A)$, puis en post-multipliant par $(I - \rho_Y(A, B)\rho_Y(B, A))_{ind.}^{-T/2}$:

$$\begin{aligned} & \rho_Y(C, A) (I - \rho_Y(A, B)\rho_Y(B, A))_{ind.}^{1/2} = \\ & (I - \rho_Y(C, A)\rho_Y(A, C))_{ind.}^{1/2} \rho_{Y,A}(C, B) \tilde{\rho}_Y(B, A) \\ & + (I - \rho_Y(C, B)\rho_Y(B, C))_{ind.}^{1/2} \rho_{Y,B}(C, A) \end{aligned} \quad (22a)$$

À partir de (13), on obtiendrait de même la version duale de (22a) :

$$\begin{aligned} & \tilde{\rho}_{Y,B}(C, A) (I - \rho_{Y,C}(A, B)\rho_{Y,C}(B, A))_{ind.}^{T/2} = \\ & - (I - \rho_{Y,B}(C, A)\rho_{Y,B}(A, C))_{ind.}^{T/2} \tilde{\rho}_Y(C, B) \rho_{Y,C}(B, A) \\ & + (I - \rho_{Y,A}(C, B)\rho_{Y,A}(B, C))_{ind.}^{T/2} \tilde{\rho}_Y(C, A) \end{aligned} \quad (22b)$$

qui correspond à :

$$\cos B \sin C = -\sin B \cos a \cos C + \sin A \cos b \quad (21b)$$

6. alternatives à la solution de Lee et al.

Revenons à la fin du paragraphe 4. Il se trouve que la solution de Lee et al. (consistant à utiliser 3 fois la seule formule des cosinus) n'est pas une solution classique du PTS $(A, b, c) \rightarrow (a, B, C)$. En dépit de nombreuses variantes, les méthodes les plus communément utilisées sont essentiellement de 3 types différents : celles basées sur des formules où interviennent des sommes, différences et fractions d'éléments (analogies de Néper [18] [29] [30] [34] [42] [43] ou de Gauss-Delambre [31] [35] [42] [43]); celles qui sont basées sur la formule des cosinus pour calculer a , et sur la formule des cotangentes pour trouver B et/ou C [29] [35] [42-45]; enfin, celles qui résolvent un système de Gauss [31-34] [42] [43]. Ainsi que nous allons le voir, ces deux dernières solutions sont adaptables au problème MCRR, et fournissent donc deux nouveaux algorithmes. De par leur origine même, ces algorithmes sont très proches de (1), puisqu'ils propagent les mêmes variables internes, s'initialisent de la même façon, et réalisent la même transformation $(\rho_{n+1,t-1}, \nu_{n,t}, \eta_{n,t-1}) \rightarrow (\rho_{n+1,t}, \nu_{n+1,t}, \eta_{n+1,t})$. Dans le cas scalaire, ils sont tous deux minimaux (au sens de la théorie des systèmes), ce qui laisse bien présager de leur stabilité numérique [46].

Commençons par une solution basée sur la formule des cotangentes. En identifiant dans (19) (A, B, C) à (y_t, y_{t-n-1}, σ) , puis à (y_{t-n-1}, y_t, σ) , et en utilisant (A1), on obtient respectivement :

$$\begin{aligned} \nu_{n+1,t} &= (I - \rho_{n+1,t} \rho_{n+1,t}^T)_{ind.}^{-1/2} \left(\nu_{n,t} - (I - \nu_{n,t} \nu_{n,t}^T)_{ind.}^{1/2} \right. \\ & \left. \rho_{n+1,t-1} (I - \eta_{n,t-1} \eta_{n,t-1}^T)_{ind.}^{-1/2} \eta_{n,t-1} \right) (I - \eta_{n,t-1}^T \eta_{n,t-1})_{ind.}^{1/2} \end{aligned} \quad (23a)$$

$$\begin{aligned} \eta_{n+1,t} &= (I - \rho_{n+1,t}^T \rho_{n+1,t})_{ind.}^{-1/2} \left(\eta_{n,t-1} - (I - \eta_{n,t-1} \eta_{n,t-1}^T)_{ind.}^{1/2} \right. \\ & \left. \rho_{n+1,t-1}^T (I - \nu_{n,t} \nu_{n,t}^T)_{ind.}^{-1/2} \nu_{n,t} \right) (I - \nu_{n,t}^T \nu_{n,t})_{ind.}^{1/2} \end{aligned} \quad (23b)$$

qui constituent une alternative à (1b,c), $\rho_{n+1,t}$ étant calculé au préalable via (1a). Nous allons maintenant étudier la solution basée sur la résolution d'un système de Gauss.

6.1. changement de coordonnées sphériques, groupe de Gauss et algorithme en treillis à base de rotations

Soit C' un point de l'espace, tel que $C'O$ coupe en C la sphère de centre O et de rayon 1. Posons $C'O = R$. La position de C' peut être décrite par des coordonnées sphériques (R, θ_1, φ_1) , avec $\theta_1 \in [-\pi, \pi]$ et $\varphi_1 \in [-\pi/2, \pi/2]$, ou cartésiennes $(x_1 = R \cos \varphi_1 \cos \theta_1, y_1 = R \cos \varphi_1 \sin \theta_1, z_1 = R \sin \varphi_1)$ (cf. figure 5). Faisons subir à (O, x_1, y_1, z_1) une rotation d'un angle c autour de l'axe y_1 . Dans le nouveau repère $(O, x_2, y_2 = y_1, z_2)$, C' a pour coordonnées $(x_2 = R \cos \varphi_2 \cos \theta_2, y_2 = R \cos \varphi_2 \sin \theta_2, z_2 = R \sin \varphi_2)$. L'axe Oz_1 (resp. Oz_2) coupe la sphère en A (resp. en B). Écrivons le changement de variables $[x_1, y_1, z_1]^T \xrightarrow{c} [x_2, y_2, z_2]^T$, et donc $(\theta_1, \varphi_1) \xrightarrow{c} (\theta_2, \varphi_2)$, en fonction des éléments du triangle sphérique ABC , grâce aux correspondances : $a = \pi/2 - \varphi_2, b = \pi/2 - \varphi_1, A = \pi - |\theta_1|$ et $B = |\theta_2|$. Posons $\varepsilon = \theta_1/|\theta_1| = \theta_2/|\theta_2|$. Nous obtenons un « groupe de Gauss » (où nous reconnaissons les formules des 5 éléments, des sinus et des cosinus) [32] [34] [42] [43] :

$$\begin{bmatrix} R \cos B \sin a \\ \varepsilon R \sin b \sin a \\ R \cos a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos c & 0 & \sin c \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin c & 0 & \cos c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -R \cos A \sin b \\ \varepsilon R \sin A \sin b \\ R \cos b \end{bmatrix} \quad (24)$$

Ces équations apparaissent naturellement en astronomie. En effet, passer d'un système de coordonnées locales à un autre, ou des coordonnées équatoriales aux coordonnées écliptiques (ou vice versa), revient à effectuer un tel changement de coordonnées sphériques $(\theta_1, \varphi_1) \xrightarrow{c} (\theta_2, \varphi_2)$, et donc, implicitement, à résoudre le PTS dont il est question au paragraphe 4; ce qui peut être fait par (24), puisque dans ces applications seule la résolution partielle $(A, b, c) \rightarrow (a, B)$ nous intéresse en fait.

à chaque instant $\{\alpha_{n,t-1}\}_{n=0}^{M-1}$, $\{\beta_{n,t-2}\}_{n=0}^{M-1}$, $\{e_{n,t-1}^b / \sqrt{\gamma_{n,t-1}}\}_{n=0}^{M-1}$, $\{\rho_{n+1,t-1} \sqrt{\alpha_{n,t-1}}\}_{n=0}^{M-1}$ et $\{\rho_{n+1,t-1} \sqrt{\beta_{n,t-2}}\}_{n=0}^{M-1}$, ainsi que $\{\pi_{n,t-2}\}_{n=0}^M$ pour la partie filtrage, soit $5M + (M + 1)$ paramètres.

6.2. un algorithme normalisé en treillis à base de rotations

Dans de nombreuses applications de filtrage adaptatif, la quantité réellement intéressante en définitive est l'erreur de filtrage $e_{M+1,t}$; les autres variables internes propagées par l'algorithme utilisé ne sont alors, pour l'utilisateur, que des intermédiaires de calcul sans intérêt propre. Nous allons montrer que pour de telles applications, la capacité de stockage de l'algorithme ci-dessus peut être réduite de moitié. La raison en est que les vecteurs transformés par (25a) et (25b) étant intimement liés aux paramètres des rotations qui les transforment, on peut en fait économiser le calcul (26) et (27) de ces paramètres. La version normalisée des systèmes de Gauss (25a) et (25b) (c'est-à-dire, l'algorithme qui effectue la transformation de $P_Y^{-1}C$, et non plus de $P_Y^{-1}C$) s'écrit en effet :

$$\begin{bmatrix} \eta_{n,t-1} & \sqrt{1 - \eta_{n,t-1}^2} \\ -\sqrt{1 - \eta_{n,t-1}^2} & \eta_{n,t-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\rho_{n+1,t-1} \sqrt{1 - \nu_{n,t}^2} \\ \nu_{n,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_{n+1,t} \sqrt{1 - \rho_{n+1,t}^2} \\ \rho_{n+1,t} \end{bmatrix} \quad (29a, b)$$

$$\begin{bmatrix} \nu_{n,t} & \sqrt{1 - \nu_{n,t}^2} \\ -\sqrt{1 - \nu_{n,t}^2} & \nu_{n,t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\rho_{n+1,t-1} \sqrt{1 - \eta_{n,t-1}^2} \\ \eta_{n,t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_{n+1,t} \sqrt{1 - \rho_{n+1,t}^2} \\ \rho_{n+1,t} \end{bmatrix} \quad (30a, b)$$

L'algorithme constitué de (25c), (28), (29) et (30) (cf. table 2) ne nécessite plus de garder en mémoire que $2M + 1$ paramètres pour la partie prédiction ($\sqrt{\alpha_{0,t}}$, $\{\eta_{n,t-1}\}_{n=0}^{M-1}$ et $\{\rho_{n+1,t-1}\}_{n=0}^{M-1}$), ce qui est le nombre minimal de variables internes propagées par un algorithme MCRR préfenêtré d'ordre M [46], ainsi que les $M + 1$ paramètres $\{\pi_{n,t-2}\}_{n=0}^M$ pour la partie filtrage. Notons que (29b) = (30b), mais que cette redondance pourrait le cas échéant être mise à profit pour améliorer les propriétés numériques de l'algorithme.

Par ailleurs, l'algorithme de la table 2 est présenté dans sa version symétrique (rotations de Givens alimentées par les erreurs doublement normalisées rétrogrades et directes). Cependant, d'autres implantations pratiques sont possibles. En effet, l'emploi de la

seule rotation de Givens nourrie par les erreurs de prédiction rétrogrades est suffisante, car (29) et (30) peuvent aussi s'écrire :

$$\begin{bmatrix} \eta_{n,t-1} & \sqrt{1 - \eta_{n,t-1}^2} \\ -\sqrt{1 - \eta_{n,t-1}^2} & \eta_{n,t-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\rho_{n+1,t-1} \sqrt{1 - \nu_{n,t}^2} \\ \nu_{n,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_{n+1,t} \sqrt{1 - \rho_{n+1,t}^2} & \eta_{n+1,t} \sqrt{1 - \rho_{n+1,t}^2} \\ \rho_{n+1,t} & * \end{bmatrix} \quad (31)$$

où * désigne un terme qui n'a pas besoin d'être calculé. Ce résultat est connu de longue date [7, relation (27)], mais ne semble pas avoir été exploité pour construire un algorithme rapide à base de rotations. Il s'explique par la formule des 5 éléments (21a), qui s'écrit aussi bien $\cos B \sin a = [\cos b, \sin b] [\sin c, -\cos A \cos c]^T$ que $\cos B \sin a = [\cos c, \sin c] [-\cos A \sin b, \cos b]^T$.

7. conclusion

L'identité de Yule, en statistique, et la loi des cosinus, en trigonométrie sphérique, sont une seule et même formule. Cette observation fournit une interprétation géométrique nouvelle du treillis MCRR normalisé en angle, dont les récurrences sont une solution à un problème de triangle sphérique fréquemment rencontré en navigation et en astronomie. La trigonométrie sphérique devient par ailleurs un outil de développement utilisable en filtrage adaptatif des Moindres Carrés. En effet, l'analogie entre les deux formalismes se poursuit au delà de l'interprétation géométrique : certaines démonstrations de formules de trigonométrie sphérique se transposent au contexte Hilbertien et fournissent ainsi des relations nouvelles entre PARCORs qui, bien que purement algébriques, sont peu intuitives. Dans le contexte des algorithmes MCRR, ces relations expriment la redondance du treillis normalisé en angle qui est un problème fortement contraint. Elles nous permettent de proposer deux algorithmes MCRR nouveaux, minimaux au sens de la théorie des systèmes. Ces nouvelles relations pourraient par ailleurs contribuer à améliorer le comportement numérique d'algorithmes MCRR existants, à l'instar de ce qui a été fait pour les algorithmes transverses, dont les techniques de stabilisation [47] [48] sont basées sur l'existence d'équations redondantes.

Remerciements

Nous tenons à remercier tout particulièrement un des experts pour ses remarques pertinentes qui nous ont permis d'améliorer considérablement la première version de cet article.

Tableau 2. – Un algorithme en treillis normalisé à base de rotations

<p>initialisation</p> <p>$\eta_{n,-1} = \pi_{n,-1} = \rho_{n+1,-1} = 0$ pour $n = 0, \dots, M-1$;</p> <p>$\alpha_{0,-1=0}$ (initialisation exacte), ou $\alpha_{0,-1} = \delta > 0$ (initialisation régularisée);</p> <p>$\gamma_{0,t} = 1$, $e_{0,t} = d_t$, $\alpha_{0,t} = \lambda\alpha_{0,t-1} + y_t^2$, $\nu_{0,t} = \eta_{0,t} = y_t / \sqrt{\alpha_{0,t}}$ pour tout $t \geq 0$.</p> <p>pour tout $t = 0, 1, 2 \dots$</p> $\sqrt{\gamma_{1,t}} = \sqrt{1 - \eta_{0,t}^2}$ $\begin{bmatrix} \eta_{0,t} & \sqrt{1 - \eta_{0,t}^2} \\ -\sqrt{1 - \eta_{0,t}^2} & \eta_{0,t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{\lambda}\pi_{0,t-1} \\ e_{0,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{1,t} / \sqrt{\gamma_{1,t}} \\ \pi_{0,t} \end{bmatrix}$ <p>pour tout ordre $n = 0, \dots, M-1$</p> <p>prédiction :</p> $\begin{bmatrix} \eta_{n,t-1} & \sqrt{1 - \eta_{n,t-1}^2} \\ -\sqrt{1 - \eta_{n,t-1}^2} & \eta_{n,t-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\rho_{n+1,t-1} \sqrt{1 - \nu_{n,t}^2} \\ \nu_{n,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_{n+1,t} \sqrt{1 - \rho_{n+1,t}^2} \\ \rho_{n+1,t} \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} \nu_{n,t} & \sqrt{1 - \nu_{n,t}^2} \\ -\sqrt{1 - \nu_{n,t}^2} & \nu_{n,t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\rho_{n+1,t-1} \sqrt{1 - \eta_{n,t-1}^2} \\ \eta_{n,t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_{n+1,t} \sqrt{1 - \rho_{n+1,t}^2} \\ \text{(calcul non nécessaire)} \end{bmatrix}$ $\nu_{n+1,t} = \left(\nu_{n+1,t} \sqrt{1 - \rho_{n+1,t}^2} \right) / \sqrt{1 - \rho_{n+1,t}^2}$ $\eta_{n+1,t} = \left(\eta_{n+1,t} \sqrt{1 - \rho_{n+1,t}^2} \right) / \sqrt{1 - \rho_{n+1,t}^2}$ <p>filtrage :</p> $\sqrt{\gamma_{n+2,t}} = \sqrt{1 - \eta_{n+1,t}^2} \sqrt{\gamma_{n+1,t}}$ $\begin{bmatrix} \eta_{n+1,t} & \sqrt{1 - \eta_{n+1,t}^2} \\ -\sqrt{1 - \eta_{n+1,t}^2} & \eta_{n+1,t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{\lambda}\pi_{n+1,t-1} \\ e_{n+1,t} / \sqrt{\gamma_{n+1,t}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{n+2,t} / \sqrt{\gamma_{n+2,t}} \\ \pi_{n+1,t} \end{bmatrix}$ $e_{M+1,t} = \left(e_{M+1,t} / \sqrt{\gamma_{M+1,t}} \right) \sqrt{\gamma_{M+1,t}}$
--

8. Annexes

8.1. la matrice $\tilde{\rho}$

À partir de (7), on obtient :

$$\left(\overline{P_{Y,B}^\perp A}, \overline{P_{Y,A}^\perp B} \right) = (I - \rho\rho^T)_{ind.}^{-T/2} (\rho\rho^T \rho - \rho)(I - \rho^T \rho)_{ind.}^{-1/2},$$

où ρ (respectivement $\tilde{\rho}$) est une notation abrégée pour $\rho_Y(A, B)$ (respectivement $\tilde{\rho}_Y(A, B)$). Comme

$$\rho\rho^T \rho - \rho = (I - \rho\rho^T)(-\rho) = (-\rho)(I - \rho^T \rho),$$

on a :

$$\begin{aligned} \left(\overline{P_{Y,B}^\perp A}, \overline{P_{Y,A}^\perp B} \right) &= (I - \rho_Y(A, B)\rho_Y^T(A, B))_{ind.}^{T/2} (-\rho_Y(A, B)) \\ (I - \rho_Y^T(A, B)\rho_Y(A, B))_{ind.}^{-T/2} &= (I - \rho_Y(A, B)\rho_Y^T(A, B))_{ind.}^{-1/2} \\ (-\rho_Y(A, B)) (I - \rho_Y^T(A, B)\rho_Y(A, B))_{ind.}^{1/2} &= -\tilde{\rho}_Y(A, B) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Notons que

$$\begin{aligned} (I - \tilde{\rho}_Y(A, B)\tilde{\rho}_Y^T(A, B)) &= \\ (I - \rho_Y(A, B)\rho_Y^T(A, B))_{ind.}^{T/2} (I - \rho_Y(A, B)\rho_Y^T(A, B))_{ind.}^{1/2} &= \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

et donc que $(I - \rho_Y(A, B)\rho_Y^T(A, B))_{ind.}^{T/2}$ est une racine carrée de $(I - \tilde{\rho}_Y(A, B)\tilde{\rho}_Y^T(A, B))$ (mais différente de $((I - \tilde{\rho}_Y(A, B)\tilde{\rho}_Y^T(A, B))^{1/2})$, en général).

Dans le cas scalaire ($n_A = n_B = 1$), $\tilde{\rho}_Y(A, B) = \rho_Y(A, B)$. Dans le cas multidimensionnel, $\rho_Y(A, B)$ et $\tilde{\rho}_Y(A, B)$ sont orthogonalement congruents, et possèdent donc les mêmes valeurs singulières. En effet,

$$\tilde{\rho} = \underbrace{(I - \rho\rho^T)_{ind.}^{-1/2} (I - \rho\rho^T)_{sym.>0}^{1/2}}_P \times \underbrace{(I - \rho\rho^T)_{sym.>0}^{-1/2} \rho (I - \rho^T\rho)_{sym.>0}^{1/2}}_{\rho'} \times \underbrace{(I - \rho^T\rho)_{sym.>0}^{-1/2} (I - \rho\rho^T)_{ind.}^{1/2}}_Q$$

où $M_{sym.>0}^{1/2}$ désigne l'unique racine carrée symétrique définie positive de M . P et Q sont orthogonales. Montrons de plus que $\rho' = \rho$ (ce résultat, déjà connu dans le cas $n_B = 1$ [23, p. 334], est général). Soit $\rho = U\Sigma V^T$ une décomposition en valeurs singulières de ρ . Alors

$$(I - \rho\rho^T)_{sym.>0}^{1/2} = U (I - \Sigma\Sigma^T)_{sym.>0}^{1/2} U^T,$$

où, par exemple dans le cas $n_A \geq n_B$,

$$(I - \Sigma\Sigma^T)_{sym.>0}^{1/2} = \text{Diag.} \left(\sqrt{1 - \sigma_1^2} \dots \sqrt{1 - \sigma_{n_B}^2}, I_{n_A - n_B} \right)$$

(rappelons que la norme spectrale σ_1 de ρ est inférieure ou égale à 1 [10]). De même, $(I - \rho^T\rho)_{sym.>0}^{1/2} = V (I - \Sigma^T\Sigma)_{sym.>0}^{1/2} V^T$, et donc $\rho' = \rho$.

8.2. l'YR en termes de projections dans le tétraèdre

Le cheminement est guidé par les considérations géométriques simples que l'on obtient lorsqu'on visualise le problème dans l'espace (cf. figure 2). Projetons la décomposition orthogonale $\vec{OB} = \vec{OH} + \vec{HB}$, qui s'écrit

$$\overline{P_Y^\perp B} = \overline{P_Y^\perp A} \rho_Y(A, B) + \overline{P_{Y,A}^\perp B} (I - \rho_Y^T(A, B)\rho_Y(A, B))_{ind.}^{T/2}$$

sur le 3^{ème} vecteur \vec{OC} du tétraèdre :

$$P_{P_Y^\perp C} \left(\overline{P_Y^\perp B} \right) = P_{P_Y^\perp C} \left(\overline{P_Y^\perp A} \rho_Y(A, B) \right) + P_{P_Y^\perp C} \left(\overline{P_{Y,A}^\perp B} (I - \rho_Y^T(A, B)\rho_Y(A, B))_{ind.}^{T/2} \right) \quad (A.3)$$

Cette relation vectorielle $\vec{OQ} = \vec{OP} + \vec{PQ}$ relie 3 vecteurs colinéaires, donc $OQ = OP + PQ$ (la somme est algébrique). Ceci s'exprime en pré-multipliant (A3) par $\left(\overline{P_Y^\perp C} \right)^T$:

$$\rho_Y(C, B) = \rho_Y(C, A) \rho_Y(A, B) + \left(\overline{P_Y^\perp C}, \overline{P_{Y,A}^\perp B} (I - \rho_Y^T(A, B)\rho_Y(A, B))_{ind.}^{T/2} \right) \quad (A.4)$$

où nous devons calculer le 2^{ème} terme du membre de droite. Pour cela, écrivons $\vec{OC} = \vec{OJ} + \vec{JC}$:

$$\overline{P_Y^\perp C} = \overline{P_Y^\perp A} \rho_Y(A, C) + \overline{P_{Y,A}^\perp C} (I - \rho_Y^T(A, C)\rho_Y(A, C))_{ind.}^{T/2}$$

L'introduction de cette décomposition orthogonale présente un double intérêt : $(\vec{OJ}, \vec{HB}) = 0$; \vec{JC} et \vec{HB} sont des résidus de projection sur le même s.e.v. $\text{Im}[Y, A]$ et donc (\vec{JC}, \vec{HB}) est un PARCOR. Par conséquent, $(\vec{OJ} + \vec{JC}, \vec{HB})$ s'écrit :

$$\left[\rho_Y^T(A, C) \left(\overline{P_Y^\perp A} \right)^T + \left(I - \rho_Y^T(A, C)\rho_Y(A, C) \right)_{ind.}^{1/2} \left(\overline{P_{Y,A}^\perp C} \right)^T \right] \times \overline{P_{Y,A}^\perp B} (I - \rho_Y^T(A, B)\rho_Y(A, B))_{ind.}^{T/2} = 0 + \left(I - \rho_Y^T(A, C)\rho_Y(A, C) \right)_{ind.}^{1/2} \rho_{Y,A}(C, B) \left(I - \rho_Y^T(A, B)\rho_Y(A, B) \right)_{ind.}^{T/2} \quad (A.5)$$

et il nous reste à rassembler (A4) et (A5).

8.3. la formule des cosinus dans le triangle polaire

Montrons d'abord que $(\overline{P_{Y,B,C}^\perp A}, \overline{P_{Y,C,A}^\perp B}, \overline{P_{Y,A,B}^\perp C})$ est le « tétraèdre polaire » de $(\overline{P_Y^\perp A}, \overline{P_Y^\perp B}, \overline{P_Y^\perp C})$. Appliquons pour cela deux fois (3a) à $P_{Y,B,C}^\perp A$. On obtient :

$$P_{[Y,B],C}^\perp A = \underbrace{P_{Y,B}^\perp A - P_{Y,B}^\perp C (C^T P_{Y,B}^\perp C)^{-1} C^T P_{Y,B}^\perp A}_{= \left\{ \overline{P_Y^\perp A} - \overline{P_Y^\perp B} (B^T P_Y^\perp B)^{-1} B^T P_Y^\perp A \right\}} - \underbrace{\left\{ \overline{P_Y^\perp C} - \overline{P_Y^\perp B} (B^T P_Y^\perp B)^{-1} B^T P_Y^\perp C \right\}}_{(C^T P_{Y,B}^\perp C)^{-1} C^T P_{Y,B}^\perp A} \quad (A.6)$$

$\overline{P_{Y,B,C}^\perp A}$ prend donc place dans le tétraèdre $(\overline{P_Y^\perp A}, \overline{P_Y^\perp B}, \overline{P_Y^\perp C})$. On vérifie de plus, grâce à (A6), que $(P_Y^\perp B, P_{Y,B,C}^\perp A) = 0$. En développant $P_{[Y,C],B}^\perp A$ par rapport au partitionnement $[Y, C], B$ (et non plus $[Y, B], C$), on obtient de même $(P_Y^\perp C, P_{Y,B,C}^\perp A) =$

0. Par conséquent, l'espace $Im \left(\overline{P_{Y,B,C}^\perp A} \right)$ est inclus dans l'espace $Im \left(\overline{P_Y^\perp A}, \overline{P_Y^\perp B}, \overline{P_Y^\perp C} \right)$ visualisé par la figure 2, et est orthogonal au plan horizontal $Im \left(\overline{P_Y^\perp B}, \overline{P_Y^\perp C} \right)$. $\overline{P_{Y,B,C}^\perp A}$ est donc porté par l'axe vertical et son extrémité, dans la figure 3, serait le pôle A' associé au plan équatorial OBC . De même pour B' et C' .

Adaptons maintenant la démonstration de l'annexe A.2 dans $\left(\overline{P_{Y,B,C}^\perp A}, \overline{P_{Y,C,A}^\perp B}, \overline{P_{Y,A,B}^\perp C} \right)$ ((10b) ne peut se transposer directement par un simple changement de variables, car contrairement à $\left(\overline{P_Y^\perp A}, \overline{P_Y^\perp B}, \overline{P_Y^\perp C} \right)$ les 3 nouveaux agrégats $\left(\overline{P_{Y,B,C}^\perp A}, \overline{P_{Y,C,A}^\perp B}, \overline{P_{Y,A,B}^\perp C} \right)$ ne sont plus des résidus de projection par rapport au même s.e.v.). Grâce à (8), la décomposition orthogonale $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OH'} + \overrightarrow{H'B'}$ s'écrit maintenant :

$$\begin{aligned} \overline{P_{Y,C,A}^\perp B} &= \overline{P_{Y,B,C}^\perp A} \\ &\left(I - \rho_{Y,C}(A, B) \rho_{Y,C}^T(A, B) \right)_{ind.}^{T/2} \left(-\rho_{Y,C}(A, B) \right) \\ &\left(I - \rho_{Y,C}^T(A, B) \rho_{Y,C}(A, B) \right)_{ind.}^{-T/2} \\ &+ \overline{P_{Y,C}^\perp B} \left(I - \rho_{Y,C}^T(A, B) \rho_{Y,C}(A, B) \right)_{ind.}^{1/2} \end{aligned} \quad (A.7)$$

Prémultiplions (A7) par $(\overrightarrow{OC'})^T$, c'est-à-dire par $\left(\overline{P_{Y,A,B}^\perp C} \right)^T$, et utilisons (A1) :

$$\begin{aligned} -\tilde{\rho}_{Y,A}(C, B) &= \left(-\tilde{\rho}_{Y,B}(C, A) \right) \times \left(-\tilde{\rho}_{Y,C}(A, B) \right) \\ &+ \left(\overline{P_{Y,A,B}^\perp C}, \overline{P_{Y,C}^\perp B} \left(I - \rho_{Y,C}^T(A, B) \rho_{Y,C}(A, B) \right)_{ind.}^{1/2} \right) \end{aligned}$$

La décomposition orthogonale $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OJ'} + \overrightarrow{J'C'}$, introduite pour calculer le 2ème terme du membre de droite, s'écrit de même :

$$\begin{aligned} \overline{P_{Y,A,B}^\perp C} &= \overline{P_{Y,B,C}^\perp A} \\ &\left(I - \rho_{Y,B}(A, C) \rho_{Y,B}^T(A, C) \right)_{ind.}^{T/2} \left(-\rho_{Y,B}(A, C) \right) \\ &\left(I - \rho_{Y,B}^T(A, C) \rho_{Y,B}(A, C) \right)_{ind.}^{-T/2} + \overline{P_{Y,B}^\perp C} \\ &\left(I - \rho_{Y,B}^T(A, C) \rho_{Y,B}(A, C) \right)_{ind.}^{1/2} \end{aligned}$$

On vérifie que $\overrightarrow{OJ'} \perp \overrightarrow{H'B'}$. En utilisant (A1) de nouveau, on obtient :

$$\begin{aligned} &\left(\overline{P_{Y,A,B}^\perp C}, \overline{P_{Y,C}^\perp B} \left(I - \rho_{Y,C}^T(A, B) \rho_{Y,C}(A, B) \right)_{ind.}^{1/2} \right) = \\ &\left(\overline{P_{Y,B}^\perp C} \left(I - \rho_{Y,B}^T(A, C) \rho_{Y,B}(A, C) \right)_{ind.}^{1/2}, \right. \\ &\left. \overline{P_{Y,C}^\perp B} \left(I - \rho_{Y,C}^T(A, B) \rho_{Y,C}(A, B) \right)_{ind.}^{1/2} \right) \\ &= \left(I - \rho_{Y,B}^T(A, C) \rho_{Y,B}(A, C) \right)_{ind.}^{T/2} \left(-\tilde{\rho}_Y(C, B) \right) \\ &\left(I - \rho_{Y,C}^T(A, B) \rho_{Y,C}(A, B) \right)_{ind.}^{1/2} \end{aligned}$$

En rassemblant ces résultats, on obtient (13).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. Haykin, *Adaptive filter theory*, 2nd edition, Prentice-Hall International, Englewood Cliffs, N. J., 1991.
- [2] M. Morf, A. Vieira & D.T.L. Lee, « Ladder forms for identification and speech processing », *Proceedings of the 1977 IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, LA, 1977, pp. 1074-78.
- [3] D.T.L. Lee, *Canonical ladder form realizations and fast estimation algorithms*, Ph. D. Dissertation, Stanford University, August 1980.
- [4] D.T.L. Lee & M. Morf, « Recursive square root ladder estimation algorithms », *Proceedings of the International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Denver, Co., 1980, pp. 1005-17.
- [5] D.T.L. Lee, M. Morf & B. Friedlander, « Recursive least squares ladder estimation algorithms », *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Vol. ASSP-29, N. 3, June 1981, pp. 627-641.
- [6] H. Lev-Ari & T. Kailath, « Ladder-form filters for nonstationary processes », *Proceedings of the 19th International Conference on Decision and Control*, Albuquerque, December 10-12, 1980, pp. 960-61.
- [7] M. Morf, C.H. Muravchik & D.T. Lee, « Hilbert space array methods for finite rank process estimation and ladder realizations for adaptive signal processing », *Proceedings of the International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Atlanta, 1981, pp. 856-859.
- [8] C.H. Muravchik, M. Morf, D.T. Lee & J. M. Delosme, « Hilbert space array methods for finite rank process modeling and ladder form realizations », *Proceedings of the 20th IEEE Conference on Decision and Control*, San Diego, Ca., December 1981, pp. 335-339.
- [9] G. Yule, « On the theory of correlation for any number of variables, treated by a new system of notations », *Proc. Roy. Soc.*, Vol. 79A, 1907, pp. 182-193; également dans : *Statistical papers of George Udny Yule*, London, England : Griffin, April 1978, pp. 85-94.
- [10] B. Porat, B. Friedlander & M. Morf, « Square-root covariance ladder algorithms », *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-27, N. 4, August 1982, pp. 813-29.
- [11] B. Porat, B. Friedlander & M. Morf, « Square-root covariance ladder algorithms », *Proceedings of the International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Atlanta, 1981, pp. 877-80.
- [12] T. Kailath, « Time-variant and time-invariant lattice filters for nonstationary processes », présenté au : Workshop on Fast Algorithms for Linear Dynamical Systems, Aussois, France, Septembre 1981; et publié dans : *Outils et Modèles Mathématiques pour l'Automatique, l'Analyse de Systèmes et le Traitement du Signal*, Paris, éditions du CNRS, 1982, pp. 417-464.
- [13] H. Lev-Ari, T. Kailath & J. Cioffi, « Least-squares adaptive lattice and transversal filters : a unified geometric theory », *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. IT-30, N. 2, March 1984, pp. 222-236.
- [14] F. Desbouvieries, « Recursive least-squares lattices and trigonometry in the spherical triangle », *Proceedings of the International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Minneapolis, MN, April 27-30, 1993, pp. III-404-407.
- [15] F. Ling, « Givens rotation based least squares lattice and related algorithms », *IEEE Transactions on Signal Processing*, N. 39-7, 1991, pp. 1541-51.
- [16] I.K. Proudler, J.G. McWhirter & T.J. Shepherd, « Fast QRD-based algorithms for least squares linear prediction », *Mathematics in Signal Processing II*, J. G. McWhirter (ed.), Clarendon Press, Oxford, 1990, pp. 465-88.
- [17] I.K. Proudler, J.G. McWhirter & T.J. Shepherd, « Computationally efficient QR decomposition approach to least squares adaptive filtering », *IEE Proceedings-F*, Vol. 138-4, August 1991, pp. 341-53.
- [18] E.G. Kogbeliantz, *Fundamentals of mathematics from an advanced viewpoint*, Vol. 4 : solid geometry and spherical trigonometry, Gordon and Breach, New York, 1969.

- [19] B. Friedlander, « Lattice filters for adaptive processing », *Proceedings of the IEEE*, Vol. 70, N. 8, August 1982, pp. 829–68.
- [20] B. Porat, *Contributions to the theory and applications of lattice filters*, Ph. D. Dissertation, Stanford University, August 1982.
- [21] D.T.M. Slock, *Fast algorithms for fixed-order recursive least-squares parameter estimation*, Ph. D. Dissertation, Stanford University, September 1989.
- [22] D.T.M. Slock, « Reconciling fast RLS lattice and QR algorithms », *Proceedings of the International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Albuquerque, 1990, pp. 1591–94.
- [23] J.M. Cioffi & T. Kailath, « Fast, recursive-least-squares transversal filters for adaptive filtering », *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Vol. ASSP-32, N. 2, April 1984, pp. 304–337.
- [24] T. Kailath, « Lectures on Wiener and Kalman filtering », 2nd printing, *CISM courses and lectures*, N. 140, Springer Verlag, 1981.
- [25] M. Morf, A. Vieira & T. Kailath, « Covariance characterization by partial autocorrelation matrices », *The Annals of Statistics*, Vol. 6, N. 3, 1978, pp. 643–48.
- [26] S. Dégerine, « Canonical partial autocorrelation function of a multivariate time series », *The Annals of Statistics*, Vol. 18, N. 2, 1990, pp. 961–71.
- [27] S. Dégerine, « Sample partial autocorrelation function of a multivariate time series », *Journal of Multivariate Analysis* 50, 1994, pp. 294–313.
- [28] G.H. Golub & C.F. Van Loan, *Matrix Computations*, 2nd edition, The John Hopkins University Press, Baltimore, 1993.
- [29] G. Papelier, *Éléments de trigonométrie sphérique*, 3ème édition, Vuibert, Paris, 1956.
- [30] L.M. Kells, W.F. Kerns & J.R. Bland, *Plane and spherical trigonometry*, McGraw-Hill, New York, 1951.
- [31] W. Chauvenet, *A manual of spherical and practical astronomy*, Vol. I : Spherical astronomy, 5th edition, J. B. Lippincott & co., Philadelphia, 1876.
- [32] V. Kourganoff, *Astronomie fondamentale élémentaire*, Masson, Paris, 1961.
- [33] P. Bakouline, E. Kononovitch & V. Moroz, *Astronomie générale*, 3ème édition, Editions MIR, Moscou, 1981.
- [34] A. Danjon, *Astronomie générale*, 2ème édition, J. & R. Sennac, Paris, 1959.
- [35] K.F. Gauss, *Theoria Motus*, 1809; Traduction en anglais : *Theory of the Motion of the Heavenly Bodies Moving about the Sun in Conic Sections*, Dover, New York, 1963.
- [36] R. Taton (éditeur), *Histoire générale des sciences, tome I : la science antique et médiévale (des origines à 1450)*, Presses Universitaires de France, Paris, 1957.
- [37] T. Heath, *A history of Greek mathematics*, Vols. I & II, Dover Publications, Inc. New York, 1981.
- [38] W. W. Rouse Ball, *A short account of the history of mathematics*, Dover Pub., New York, 1960.
- [39] M. al-Biruni & M.T. Debarbat, *La trigonométrie sphérique chez les Arabes de l'Est à la fin du Xème siècle*, Publications de l'Institut Français de Damas, N. 114, Institut Français de Damas, 1985 (en Arabe et en Français).
- [40] E.G. Kogbeliantz, *Fundamentals of mathematics from an advanced viewpoint*, Vol. 3 : geometry and geometric analysis; chapter 17 : some facts about non-Euclidean geometry, Gordon and Breach, New York, 1969.
- [41] H. Lev-Ari, K.F. Chiang & T. Kailath, « Constrained-input / constrained-output stability for adaptive RLS lattice filters », *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. CAS-38, N. 12, December 1991, pp. 1478–83.
- [42] H. Andoyer, *Cours d'astronomie*, 3ème édition, Librairie scientifique J. Hermann, Paris, 1923.
- [43] W. Chauvenet, *A treatise on plane and spherical trigonometry*, 9th edition, J. B. Lippincott & co., Philadelphia, 1875.
- [44] P. Constan, *Cours de trigonométrie sphérique à l'usage des marins qui ont en vue l'étude de l'astronomie ou de la géodésie*, Société d'éditions géographiques, maritimes et coloniales, Paris 1941.
- [45] C. Pacé, *Précis de trigonométrie plane, de géométrie sphérique et de trigonométrie sphérique, à l'usage des élèves de la marine marchande et des lieutenants au cabotage*, Société d'éditions géographiques, maritimes et coloniales, Paris, 1951.
- [46] P.A. Regalia, « Numerical stability properties of a QR-based fast least-squares algorithm », *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 41, N. 6, June 1993, pp. 2096–2109.
- [47] A. Benallal & A. Gilloire, « A new method to stabilize fast RLS algorithms based on first-order model of the propagation of numerical errors », *Proceedings of the International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, New York, 1988, pp. 1373–76.
- [48] D.T.M. Slock & T. Kailath, « Numerically stable fast transversal filters for recursive least squares adaptive filtering », *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 39, N. 1, January 1991, pp. 92–114.

Manuscrit reçu le 13 Mars 1995.

L'AUTEUR

François DESBOUVRIES



François Desbouvries est ingénieur ENST (1987) et docteur de l'ENST (1991). Maître de Conférences à l'Institut National des Télécommunications à Evry depuis 1991, son domaine d'intérêt est le traitement statistique du signal. Ses travaux portent essentiellement sur le filtrage adaptatif au sens des moindres carrés.