

Une analyse en ondelettes par quintes

A Quint Wavelet Analysis

par Pierre BONNET*, Olivier MARGUIN**, Didier REMOND*

*INSA de Lyon, Laboratoire de Conception et d'Analyse des Systèmes Mécaniques, Bât 113

20, avenue Albert Einstein 69621 VILLEURBANNE CEDEX E-mail : didi@casm.insa-lyon.fr

** Université Claude Bernard (LYON 1), Laboratoire de Mathématiques Discrètes, Bât 101

43, boulevard du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE CEDEX E-mail : marguin@virgile.univ-lyon1.fr

résumé et mots clés

On introduit, pour des signaux discrétisés et périodisés, une analyse par ondelettes généralisant à un rapport d'échelles égal à $3/2$ ce qui se pratique habituellement pour un rapport d'échelles égal à 2. On décrit dans ce nouveau contexte un algorithme de transformation rapide analogue à l'algorithme décrit dans [1] sous le nom de T.O.R et on montre comment peut également être envisagé un algorithme analogue à celui développé par Mallat.

Ondelette, Analyse temps-fréquence, Rapport fréquentiel, Transformée rapide, Algorithme.

abstract and key words

A wavelet analysis is introduced for discrete and periodic signals, which generalises to a scale ratio of $3/2$ what is usually done with a scale ratio of 2. In this new context, we describe a fast transform algorithm similar to the one given in [1], called T.O.R, and we show how can be considered an analogue to Mallat's algorithm.

Wavelet, Time-frequency analysis, Frequency ratio, Fast transform, Algorithm.

1. introduction

L'analyse par ondelettes et l'analyse multi-échelles ont connu depuis une quinzaine d'années un développement considérable, suite aux travaux de Meyer et de Morlet [5]. Une des principales directions dans lesquelles s'est accompli ce développement est la construction de bases discrètes d'ondelettes faisant intervenir des rapports d'échelles (et par conséquent des rapports fréquentiels) égaux à 2 (d'où le nom d'analyse par octaves, par référence à la musique), ainsi que la mise au point d'algorithmes de calcul des coefficients d'ondelettes liés à ces bases.

Parmi les algorithmes ainsi obtenus, celui de Mallat [4] connaît un vif succès, notamment en ce qui concerne ses applications à l'analyse et à la compression d'images. De notre côté, nous avons décrit un algorithme d'analyse par octaves reposant sur les mêmes structures mathématiques sous-jacentes que celui de Mallat, mais totalement différent dans sa mise en œuvre puisque plus apparenté à la transformée de Fourier rapide (T.F.R, ou F.F.T dans les ouvrages et publications en langue anglaise), d'où son nom de transformée en ondelettes rapide ou T.O.R. Plus précisément,

alors que l'algorithme de Mallat opère en variable temporelle (dans le cas de la dimension 1) et consiste essentiellement en convolutions, l'algorithme de T.O.R opère sur les fréquences au moyen de matrices unitaires d'ordre 2. Les deux algorithmes sont équivalents du point de vue de la complexité, le choix de l'un ou l'autre dépendant surtout des compétences et des préoccupations de l'utilisateur.

Séduisants par leur faible complexité et leur brièveté d'exécution, ces deux types d'algorithme partagent l'inconvénient de toute analyse par octaves lorsque le but recherché est l'utilisation des ondelettes en vue d'effectuer de l'analyse en temps-fréquence : leur résolution fréquentielle, limitée par nature, est une gêne pour certaines applications. Nous avons donc tenté de généraliser le principe de ces algorithmes, et plus particulièrement de la T.O.R, à des rapports d'échelles inférieurs à 2, ceux-ci devant néanmoins rester fractionnaires, afin de conserver dans ses grandes lignes l'outillage mathématique¹. Nous présentons ici les premiers résul-

1. Il existe certes une généralisation de l'algorithme de Mallat avec un rapport d'échelle égal à $\sqrt{2}$, mais uniquement dans le cadre des signaux bidimensionnels, sans qu'aucune généralisation à d'autres dimensions ne soit possible [3]

tats obtenus pour un rapport fréquentiel égal à $3/2$, donc pour ce qui, toujours par référence à la musique, peut être appelé *analyse par quintes*. Ces résultats devraient facilement être généralisés à des rapports tels que $4/3$ ou $5/4$, donnant lieu ainsi à des analyses par quartes ou par tierces (majeures).

Le paragraphe 2 fixe les notations, notamment pour ce qui concerne la transformée de Fourier discrète, et rappelle les résultats classiques auxquels il sera sans cesse fait référence dans ce travail.

Le paragraphe 3 rappelle le principe de la T.O.R par octaves tel que nous l'avons décrit dans [1]. Il s'agit d'un rappel indispensable, puisque c'est fondamentalement le même principe qui est mis en œuvre dans l'analyse par quintes, au prix cependant d'une complication théorique et technique sur laquelle nous reviendrons. Nous indiquons au passage, ce que nous n'avons pas fait dans [1], comment, par transformation de Fourier, on passe naturellement de l'algorithme de Mallat à l'algorithme de T.O.R et vice versa. L'explicitation de ce passage est importante, puisque c'est elle qui nous mettra sur la voie d'un algorithme d'analyse par quintes du type Mallat. Nous rappelons comment à l'algorithme de T.O.R sont associées des *bases d'ondelettes* et comment le choix d'une telle base peut être intégré à l'algorithme, permettant à l'utilisateur de choisir sa base en fonction des avantages recherchés et des inconvénients à éviter. Pour ce qui est de la description explicite de certains choix possibles de bases et de leur comparaison, le lecteur est renvoyé à [1].

Nous pouvons alors aborder au paragraphe 4 la description de l'algorithme de T.O.R par quintes. Comme dans le cas de la T.O.R par octaves, on travaille sur des signaux discrétisés et périodisés en temps, donc aussi en fréquences, discrétisation en temps et périodisation en fréquences étant valides moyennant satisfaction de la *condition de Shannon*. A chaque itération de l'algorithme, autrement dit à chaque changement de quinte, le pas de discrétisation temporelle et la période fréquentielle sont respectivement multiplié et divisée par $3/2$; c'est le caractère rationnel et non entier de ce rapport qui vient compliquer la structure mathématique sous-jacente. A chaque itération, l'information contenue dans le signal se trouve répartie entre n vecteurs de dimension 3, analogues des vecteurs de dimension 2 de l'analyse par octaves, sur lesquels agissent des matrices unitaires d'ordre 3. De chacun des vecteurs résultant de cette action, on extrait un vecteur de dimension 2 et un scalaire contribuant respectivement à une composante basses fréquences et à une composante hautes fréquences (la quinte correspondant à l'itération en cours). Cette complication a notamment comme conséquence de dissocier l'aspect base orthonormale et l'aspect translation des ondelettes, ces deux aspects se manifestant à des pas de discrétisation différents.

En nous inspirant de la comparaison explicitée au paragraphe précédent dans le cas de l'analyse par octaves, nous indiquons brièvement en 4-3 le principe d'un algorithme de Mallat pour l'analyse par quintes.

En 4-4, nous indiquons comment peuvent être choisies les matrices unitaires d'ordre 3 intervenant dans l'algorithme de façon

à réaliser une bonne analyse temps-fréquence, ce choix déterminant la base d'ondelettes dans laquelle est effectuée l'analyse. Nous n'avons pas tenté de faire une description exhaustive des choix de bases possibles, celles-ci dépendant de beaucoup plus de paramètres que dans le cas de l'analyse par octaves. Au contraire, nous nous sommes contentés de décrire les ondelettes dont l'allure s'apparente à celles obtenues lorsque le rapport fréquentiel est 2.

Enfin, dans le paragraphe 5, nous décrivons l'implémentation sur ordinateur de l'algorithme de T.O.R par quintes et nous donnons un exemple qui permet d'illustrer la différence avec l'analyse par octaves.

Le lecteur sera peut-être surpris de constater que notre algorithme comporte des transformations de Fourier rapides (directes et inverses) dont l'ordre, au lieu d'être simplement une puissance de 2, a la forme générale $2^j 3^{j'}$, les ouvrages de référence déconseillant fortement de sortir du cadre strict des puissances de 2 [6]. En fait, la complexité de l'algorithme de T.F.R se trouve très peu accrue tant qu'on travaille avec des entiers dont la décomposition ne comporte que des petits facteurs premiers. Le fait que la méthode nous impose ce choix inhabituel n'est donc absolument pas gênant.

Nous avons dans [1] mis en évidence l'intérêt de procéder à une complexification des ondelettes par séparation préalable des fréquences positives et négatives. Cette complexification était indispensable pour obtenir une transformée en ondelettes dont l'allure générale ne soit pas modifiée par un changement de phase du signal analysé. Le même impératif se présente bien entendu dans le cas de l'analyse par quintes et la façon d'y répondre est la même. Simplement, la séparation préalable des fréquences positives et négatives s'opérant au moyen de matrices d'ordre 2 par ailleurs très simples, la variante nécessite de travailler avec un signal échantillonné en 2×3^J points au lieu des 3^J utilisés dans la version en ondelettes réelles décrite ici.

2. notations et rappels

On considère des signaux périodisés selon une période T et échantillonnés suivant un pas d'échantillonnage δt tel que le rapport $N = T/\delta t$ soit entier. Un tel signal est donc représenté par une fonction N -périodique f de la variable entière k ou ℓ , ou, ce qui revient au même, une fonction f définie sur l'ensemble $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ des entiers modulo N .

Nous noterons $\mathcal{E}(N)$ l'espace vectoriel des fonctions N -périodiques d'une variable entière et à valeurs complexes. Cet espace s'identifie à \mathbf{C}^N et est muni du produit scalaire :

$$\langle f | g \rangle = \sum_{k \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}} \overline{f(k)} g(k) = \sum_{k=0}^{N-1} \overline{f(k)} g(k) \quad (1)$$

La transformée de Fourier du signal T -périodique et échantillonné au pas δt représenté par f est, en tant que distribution d'une variable fréquentielle, $\frac{1}{\delta t}$ -périodique et échantillonnée au pas $\frac{1}{T}$. Elle est représentée par la fonction N -périodique $\mathcal{F}_N f$ de la variable entière p définie par :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_N f(p) &= N^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-2\pi i k p / N} \\ &= N^{-\frac{1}{2}} \sum_{k \in \mathbf{Z} / N\mathbf{Z}} f(k) e^{-2\pi i k p / N}\end{aligned}\quad (2)$$

et qu'on appelle *transformée de Fourier discrète (d'ordre N)* de f . La condition de Shannon impose, pour que la discrétisation au pas δt constitue une bonne approximation du signal, que dans celui-ci les fréquences supérieures à $\frac{1}{2\delta t}$ puissent être négligées. Ainsi, la fonction de variable entière $\mathcal{F}_N f$ peut être interprétée comme la périodisation d'une fonction nulle en dehors de l'intervalle $[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}]$, ce qui représente bien la discrétisation au pas $\frac{1}{T}$ d'une répartition fréquentielle nulle en dehors de l'intervalle $[-\frac{1}{2\delta t}, \frac{1}{2\delta t}]$.

Le coefficient de normalisation ici choisi est tel que la transformation de Fourier discrète conserve le produit scalaire et que la formule d'inversion soit la plus semblable possible à (2), à savoir :

$$f(k) = N^{-\frac{1}{2}} \sum_{p \in \mathbf{Z} / N\mathbf{Z}} \mathcal{F}_N f(p) e^{2\pi i k p / N}\quad (3)$$

Dans la pratique il pourra être préférable de choisir un coefficient de normalisation plus simple, quitte à introduire les corrections nécessaires. Afin d'alléger certaines formules, il nous arrivera de noter \mathcal{F} au lieu de \mathcal{F}_N .

L'algorithme classique de transformée de Fourier rapide (T.F.R. ou F.F.T en anglais), valable lorsque N est une puissance de 2, se généralise bien chaque fois que N « se décompose bien » en facteurs premiers, par exemple, comme cela sera le cas ici, lorsque N est de la forme $2^j 3^j$.

L'espace $\mathcal{E}(N)$ est également muni du produit de convolution défini par :

$$(f * g)(k) = \sum_{\ell \in \mathbf{Z} / N\mathbf{Z}} f(k - \ell) g(\ell)\quad (4)$$

et, comme d'habitude, la transformée de Fourier du produit de convolution est le produit multiplicatif des transformées de Fourier :

$$\mathcal{F}_N(f * g)(p) = N^{1/2} \mathcal{F}_N f(p) \mathcal{F}_N g(p)\quad (5)$$

De même, si nous notons f^* la fonction définie par

$$f^* = \overline{f(-k)}\quad (6)$$

on sait que

$$\mathcal{F} f^*(p) = \overline{\mathcal{F} f(p)}\quad (7)$$

L'opérateur de translation \mathcal{T} défini par

$$\mathcal{T} f(k) = f(k - 1)\quad (8)$$

agit dans $\mathcal{E}(N)$ avec évidemment :

$$\mathcal{T}^N = \text{Id}\quad (9)$$

ainsi que :

$$\mathcal{F}_N(\mathcal{T} f)(p) = e^{-2\pi i p / N} \mathcal{F}_N f(p)\quad (10)$$

Soit N' un entier divisant N et posons $N = KN'$. A tout signal f T -périodique et échantillonné au pas $K\delta t$ on peut associer le signal g T -périodique et échantillonné au pas δt obtenu en interpolant f par des 0. On obtient ainsi une injection isométrique de $\mathcal{E}(N')$ dans $\mathcal{E}(N)$ définie par :

$$g(k) = \begin{cases} f(\ell) & \text{si } k = K\ell, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}\quad (11)$$

On obtient alors, au niveau des transformées de Fourier discrètes :

$$\mathcal{F}_N g(p) = K^{-\frac{1}{2}} \mathcal{F}_{N'} f(p)\quad (12)$$

de sorte que, au facteur de normalisation près, l'injection décrite par (11) devient, par transformation de Fourier, l'injection naturelle des fonctions N' -périodiques (d'une variable entière) dans les fonctions N -périodiques (d'une variable entière).

De même, on définit une projection de $\mathcal{E}(N)$ sur $\mathcal{E}(N')$ en ne retenant du signal échantillonné au pas δt que les valeurs échantillonnées aux instants $K\ell\delta t$. Autrement dit, à la fonction f de $\mathcal{E}(N)$ on associe la fonction g de $\mathcal{E}(N')$ définie par :

$$g(\ell) = f(K\ell)\quad (13)$$

Par transformation de Fourier, (13) devient :

$$\mathcal{F}_{N'} g(p) = K^{-\frac{1}{2}} \sum_{r=0}^{K-1} \mathcal{F}_N f(p + rN')\quad (14)$$

3. rappels sur la T.O.R par octaves

3.1. principe de l'algorithme

On se place dans le cas où $N = 2^J$ (ou plus généralement $N = K2^J$). On effectue une dichotomie de la fonction f (qu'on notera encore f^J) appartenant à $\mathcal{E}(2^J)$ en deux fonctions f^{J-1} et f'^{J-1} appartenant à $\mathcal{E}(2^{J-1})$. La décomposition est effectuée sur les transformées de Fourier discrètes au moyen d'une

famille $(\Omega_p^{J-1})_{p \in \mathbf{Z}/2^J\mathbf{Z}}$ de matrices unitaires d'ordre 2. Seuls les coefficients $f^{J-1}(k)$ sont effectivement calculés par T.F.R inverse, tandis que le processus de dichotomie est réitéré à partir des $\mathcal{F}f^{J-1}(p)$ au moyen d'une famille $(\Omega_p^{J-2})_{2^{J-1}$ -périodique de matrices unitaires d'ordre 2, et ainsi de suite.

Plus précisément, pour $0 \leq j \leq J-1$, à partir d'une fonction f^{j+1} de $\mathcal{E}(2^{j+1})$ explicitée uniquement par sa transformée de Fourier discrète, on construit par dichotomie les transformées de Fourier de deux fonctions f^j et f'^j de $\mathcal{E}(2^j)$ au moyen des relations

$$\begin{pmatrix} \mathcal{F}f^j(p) \\ \mathcal{F}f'^j(p) \end{pmatrix} = \Omega_p^{*j} \begin{pmatrix} \mathcal{F}f^{j+1}(p) \\ \mathcal{F}f^{j+1}(p+2^j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{a_p^j} & \overline{a_{p+2^j}^j} \\ \overline{b_p^j} & \overline{b_{p+2^j}^j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{F}f^{j+1}(p) \\ \mathcal{F}f^{j+1}(p+2^j) \end{pmatrix} \quad (15)$$

où les matrices

$$\Omega_p^j = \begin{pmatrix} a_p^j & b_p^j \\ a_{p+2^j}^j & b_{p+2^j}^j \end{pmatrix} \quad (16)$$

sont 2^{j+1} -périodiques par rapport à p et vérifient la relation :

$$\Omega_{p+2^j}^j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Omega_p^j \quad (17)$$

On déduit les coefficients $f'^j(k)$ par transformée de Fourier rapide inverse tandis qu'on réitère le processus sur les $\mathcal{F}f^j(p)$.

Parvenu à l'ordre $j = 0$, on obtient finalement deux derniers coefficients f^0 et f'^0 , le premier caractérisant la moyenne de f sur une période.

3.2. bases d'ondelettes

Bien entendu, toutes les transformations étant unitaires, l'algorithme dont nous venons de rappeler le principe peut être inversé de sorte qu'à partir de toute famille $(f^0, (f'^j(k))_{0 \leq j \leq J-1, k \in \mathbf{Z}/2^j\mathbf{Z}})$ peut être reconstitué un unique signal f . En particulier, si nous définissons ψ_k^j comme étant la fonction f particulière construite à partir des valeurs

$$f^0 = 0 \quad \text{et} \quad f'^{j'}(k') = \delta^{jj'} \delta^{kk'},$$

(où $\delta^{jj'}$ désigne le symbole de Kronecker) et φ^0 comme étant la fonction f particulière construite à partir des valeurs

$$f^0 = 1 \quad \text{et} \quad f'^{j'}(k') = 0,$$

ces diverses fonctions forment une base orthonormale de $\mathcal{E}(2^J)$ et on a, pour toute f de $\mathcal{E}(2^J)$, la décomposition

$$f = f^0 \varphi^0 + \sum_{j=0}^{J-1} \left(\sum_{k \in \mathbf{Z}/2^j\mathbf{Z}} f'^j(k) \psi_k^j \right) \quad (18)$$

En outre, en posant

$$\psi^j = \psi_0^j,$$

nous avons les relations :

$$\psi_k^j(\ell) = \mathcal{T}^{2^{J-j}k} \psi^j(\ell) = \psi^j(\ell - 2^{J-j}k) \quad (19)$$

Les fonctions ψ_k^j sont appelées *ondelettes* et les coefficients $f'^j(k)$ *coefficients d'ondelettes de f*. Ils constituent avec f^0 la transformée en ondelettes rapide ou T.O.R du signal f .

Remarque : en explicitant l'algorithme inverse, nous obtenons :

$$\mathcal{F}_{2^j} \psi^j(p) = a_p^{J-1} a_p^{J-2} \dots a_p^{j+1} b_p^j \quad (20)$$

ainsi que

$$\mathcal{F}_{2^j} \varphi^0(p) = a_p^{J-1} a_p^{J-2} \dots a_p^1 a_p^0. \quad (21)$$

On pourrait poser plus généralement

$$\mathcal{F}_{2^j} \varphi^j(p) = a_p^{J-1} a_p^{J-2} \dots a_p^{j+1} a_p^j \quad (22)$$

ainsi que

$$\varphi_k^j(\ell) = \mathcal{T}^{2^{J-j}k} \varphi^j(\ell) = \varphi^j(\ell - 2^{J-j}k) \quad (23)$$

mais nous n'aurons pas besoin de ces fonctions dans la présentation que nous donnons ici de notre travail.

3.3. lien avec l'algorithme de Mallat

Notons encore ξ^j et η^j les fonctions de $\mathcal{E}(2^{j+1})$ admettant les transformées de Fourier

$$\mathcal{F}_{2^{j+1}} \xi^j(p) = a_p^j \quad (24)$$

et

$$\mathcal{F}_{2^{j+1}} \eta^j(p) = b_p^j. \quad (24')$$

De (5), (7), (13), (14) et (15) on déduit alors :

$$f^j(k) = 2 (\xi^{j*} * f^{j+1})(2k) \quad (25)$$

et

$$f'^j(k) = 2 (\eta^{j*} * f^{j+1})(2k). \quad (25')$$

Ainsi obtient-on un autre algorithme de calcul des coefficients $f'^j(k)$, cette fois par convolution, qui n'est autre que l'algorithme de Mallat.

3.4. choix des coefficients

Les coefficients a_p^j et b_p^j doivent être choisis de façon à ce que la dichotomie correspondante opère une séparation entre les basses fréquences définies par $|p| \leq 2^{j-1}$ et une octave de hautes fréquences définie par $2^{j-1} \leq |p| \leq 2^j$, de sorte que les relations (25) et (25') fassent apparaître ξ^{j*} et η^{j*} comme des filtres respectivement passe-bas et passe-haut. Par ailleurs, et afin que φ_p^j et ψ_p^j soient à valeurs réelles, les coefficients a_p^j et b_p^j seront choisis avec les propriétés de symétrie :

$$a_{-p}^j = \overline{a_p^j} \quad \text{et} \quad b_{-p}^j = \overline{b_p^j}. \quad (26)$$

Pour des raisons de cohérence avec ce qui sera fait dans l'analyse par quintes, nous modifierons un peu ce qui avait été fait dans [1] et nous poserons, afin de satisfaire à ces exigences :

$$\Omega_p^j = \begin{pmatrix} \cos \theta_p^j & -e^{-2i\tau_p^j} \sin \theta_p^j \\ \sin \theta_p^j & e^{-2i\tau_p^j} \cos \theta_p^j \end{pmatrix} \quad (27)$$

où les angles θ_p^j et τ_p^j croissent de 0 à $\pi/2$ lorsque p croît de 0 à 2^j , avec $\theta_p^j + \theta_{2^j-p}^j = \pi/2$. Un effet de similitude approché entre les ondelettes de différentes échelles sera obtenu en posant

$$\theta_p^j = \theta_{2p}^{j+1} \quad \text{et} \quad \tau_p^j = \tau_{2p}^{j+1}. \quad (28)$$

Enfin, et au moins dans un premier temps, nous poserons comme dans [1] :

$$\tau_p^j = p\pi/2^{j+1} \quad (29)$$

tandis que θ_p^j pourra faire l'objet de l'un des choix présentés et discutés dans [1].

4. l'analyse par quintes

4.1. généralisation du principe de dichotomie, principe de l'algorithme

On se place maintenant dans le cas où $N = 3^J$ (ou plus généralement $N = K 3^J$). On effectue cette fois la dichotomie de la fonction f appartenant à $\mathcal{E}(3^J)$ en deux fonctions f^{J-1} et f'^{J-1} appartenant respectivement à $\mathcal{E}(2 \times 3^{J-1})$ et $\mathcal{E}(3^{J-1})$. Puis, aux pas suivants de l'algorithme, on effectue la dichotomie de la fonction f^{j+1} appartenant à $\mathcal{E}(2^{J-j-1} 3^{j+1})$ en deux fonctions f^j et f'^j appartenant respectivement à $\mathcal{E}(2^{J-j} 3^j)$ et $\mathcal{E}(2^{J-j-1} 3^j)$.

Pour plus de clarté, posons, j étant fixé :

$$n = 2^{J-j-1} 3^j \quad (30)$$

de sorte que f^{j+1} , f^j et f'^j appartiennent respectivement à $\mathcal{E}(3n)$, $\mathcal{E}(2n)$ et $\mathcal{E}(n)$. La décomposition de f^{j+1} est effectuée sur les transformées de Fourier discrètes au moyen d'une famille $(\Omega_p^j)_{p \in \mathbf{Z}/3n\mathbf{Z}}$ de matrices unitaires d'ordre 3, famille qui vérifie en outre la relation :

$$\Omega_{p+n}^j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Omega_p^j \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (31)$$

Autrement dit, on a :

$$\Omega_p^j = \begin{pmatrix} a_p^j & a_{p+3n}^j & b_p^j \\ a_{p+4n}^j & a_{p+n}^j & b_{p+n}^j \\ a_{p+2n}^j & a_{p+5n}^j & b_{p+2n}^j \end{pmatrix} \quad (32)$$

où les suites (a_p^j) et (b_p^j) sont respectivement $6n$ -périodique et $3n$ -périodique.

La dichotomie s'opère au moyen des matrices Ω_p^{*j} , de sorte qu'on a :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{F} f^j(p) \\ \mathcal{F} f^j(p+n) \\ \mathcal{F} f'^j(p) \end{pmatrix} = \Omega_p^{*j} \begin{pmatrix} \mathcal{F} f^{j+1}(p) \\ \mathcal{F} f^{j+1}(p+n) \\ \mathcal{F} f^{j+1}(p+2n) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \overline{a_p^j} & \overline{a_{p+4n}^j} & \overline{a_{p+2n}^j} \\ \overline{a_{p+3n}^j} & \overline{a_{p+n}^j} & \overline{a_{p+5n}^j} \\ \overline{b_p^j} & \overline{b_{p+n}^j} & \overline{b_{p+2n}^j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{F} f^{j+1}(p) \\ \mathcal{F} f^{j+1}(p+n) \\ \mathcal{F} f^{j+1}(p+2n) \end{pmatrix} \quad (33)$$

Comme dans l'analyse par octaves, à chaque pas on déduit les $f'^j(k)$ des $\mathcal{F}_n f'^j(p)$ par T.F.R inverse, tandis qu'on réitère le processus à partir des $\mathcal{F} f^j(p)$. A j fixé, le nombre des coefficients $f'^j(k)$ est donc égal à $n = 2^{J-j-1} 3^j$. Parvenu à la dernière étape, il subsiste la fonction 2^J -périodique $\mathcal{F} f^0$ à partir de laquelle on peut amorcer une T.O.R par octaves.

4.2. bases d'ondelettes

On peut, comme dans le cas de l'analyse par octaves, obtenir un algorithme de reconstruction par inversion de ce qui vient d'être écrit. On peut alors définir ψ_k^j comme étant la fonction f particulière construite à partir des valeurs

$$f^0(k') = 0 \quad \text{et} \quad f'^j(k') = \delta^{jj'} \delta_{kk'}$$

ainsi que φ^0 comme étant la fonction f particulière construite à partir des valeurs

$$f^0(k') = \delta_{kk'} \quad \text{et} \quad f'^j(k') = 0.$$

Ces diverses fonctions forment une base orthonormale de $\mathcal{E}(3^J)$ et on a la décomposition :

$$f = \sum_{k \in \mathbf{Z}/2^J\mathbf{Z}} f^0(k) \varphi_k^0 + \sum_{j=0}^{J-1} \left(\sum_{k \in \mathbf{Z}/2^{J-j-1}3^j\mathbf{Z}} f'^j(k) \psi_k^j \right) \quad (34)$$

Comme dans le cas de l'analyse par octaves, nous parlerons de *base d'ondelettes*, de *coefficients d'ondelettes* et de *T.O.R (par quintes)*.

Remarque : on ne peut cependant écrire ici une relation analogue à (19). En effet, une telle relation ferait intervenir des translations dont le pas ne serait pas un multiple entier de δt . Pourtant les représentations d'ondelettes obtenues à l'écran mettent en évidence une invariance par translation que nous devons pouvoir interpréter en terme de translations approchées. Pour cela, et par analogie avec (22) et (20), posons :

$$\mathcal{F}_{2^{J-j}3^j} \Phi^j(p) = a_p^{J-1} a_p^{J-2} \dots a_p^{j+1} a_p^j \quad (35)$$

et

$$\mathcal{F}_{2^{J-j-1}3^j} \Psi^j(p) = a_p^{J-1} a_p^{J-2} \dots a_p^{j+1} b_p^j \quad (35')$$

puis, par analogie avec (23) et (19), posons encore :

$$\Phi_k^j(\ell) = \mathcal{T}^{3^{J-j}k} \Phi^j(\ell) = \Phi^j(\ell - 3^{J-j}k) \quad \text{pour } k \in \mathbf{Z}/2^{J-j}3^j\mathbf{Z} \quad \text{et } \ell \in \mathbf{Z}/2^{J-j}3^j\mathbf{Z} \quad (36)$$

et

$$\Psi_k^j(\ell) = \mathcal{T}^{3^{J-j-1}k} \Psi^j(\ell) = \Psi^j(\ell - 3^{J-j-1}k) \quad \text{pour } k \in \mathbf{Z}/2^{J-j-1}3^j\mathbf{Z} \quad \text{et } \ell \in \mathbf{Z}/2^{J-j-1}3^j\mathbf{Z} \quad (36')$$

Les fonctions Φ_k^j et Ψ_k^j ainsi définies appartiennent respectivement à $\mathcal{E}(2^{J-j}3^j)$ et $\mathcal{E}(2^{J-j-1}3^j)$ et représentent donc des signaux T - périodiques discrétisés aux pas respectifs $\frac{1}{2^{J-j}} \delta t$ et $\frac{1}{2^{J-j-1}} \delta t$. L'application de l'algorithme de reconstruction à l'obtention de φ_k^0 et ψ_k^j montre alors qu'on a, compte tenu de (14) :

$$\varphi_k^0(\ell) = 2^{J/2} \Phi_k^0(2^J \ell) \quad (37)$$

et

$$\psi_k^j(\ell) = 2^{(J-j-1)/2} \Psi_k^j(2^{J-j-1} \ell) \quad (38)$$

ce qui caractérise bien comme translation approchée le passage de φ^0 à φ_k^0 et de ψ^j à ψ_k^j . On pourrait bien entendu définir également les fonctions φ_k^j , mais nous n'en aurons pas l'usage.

4.3. généralisation de l'algorithme de Mallat

Avec toujours $n = 2^{J-j-1}3^j$, notons encore ξ^j et η^j les fonctions respectivement de $\mathcal{E}(6n)$ et $\mathcal{E}(3n)$ admettant les transformées de Fourier

$$\mathcal{F}_{6n} \xi^j(p) = a_p^j \quad (39)$$

et

$$\mathcal{F}_{3n} \eta^j(p) = b_p^j \quad (39')$$

De (33) nous extrayons :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} f^j(p) &= \overline{a_p^j} \mathcal{F} f^{j+1}(p) + \overline{a_{p+4n}^j} \mathcal{F} f^{j+1}(p+n) \\ &\quad + \overline{a_{p+2n}^j} \mathcal{F} f^{j+1}(p+2n) \\ &= \overline{a_p^j} \mathcal{F} f^{j+1}(p) + \overline{a_{p+2n}^j} \mathcal{F} f^{j+1}(p+2n) \\ &\quad + \overline{a_{p+4n}^j} \mathcal{F} f^{j+1}(p+4n) \end{aligned} \quad (40)$$

et

$$\mathcal{F} f'^j(p) = \overline{b_p^j} \mathcal{F} f^{j+1}(p) + \overline{b_{p+n}^j} \mathcal{F} f^{j+1}(p+n) + \overline{b_{p+2n}^j} \mathcal{F} f^{j+1}(p+2n) \quad (40')$$

Comme dans le cas de l'analyse par octaves, la relation (39') s'interprète au moyen de (5), (7), (13) et (14) :

$$f'^j(k) = 3 (\eta^{j*} * f^{j+1})(3k) . \quad (41)$$

Quant à l'interprétation de (39), elle est un peu plus compliquée et fait également intervenir (11) et (12) :

$$f^j(k) = 6 (\xi^{j*} * g^{j+1})(3k) \quad (42)$$

où g^{j+1} se déduit de f^{j+1} au moyen de (11) avec $K = 2$.

Ainsi, nous voyons se dégager le principe d'un algorithme du type de celui de Mallat pour l'analyse par quintes. A chaque étape, les fonctions f^j et f'^j se déduisent de f^{j+1} par filtrage en procédant comme suit :

– pour obtenir f'^j il suffit de convoluer par η^{j*} et de ne retenir du résultat que les termes à indices multiples de 3; la convolution s'effectue dans $\mathcal{E}(3n)$,

– pour obtenir f^j il faut d'abord interpoler par des zéros à un pas deux fois plus fin, de sorte que la convolution par ξ^j s'effectue bien dans $\mathcal{E}(6n)$.

4.4. choix des coefficients

Comme dans le cas de l'analyse par octaves, les coefficients a_p^j et b_p^j doivent être choisis de façon à ce que l'algorithme opère à chaque pas une séparation entre des basses fréquences correspondant à $|p| \leq 2^{J-j-1}3^j$ et des hautes fréquences comprises dans la quinte $2^{J-j-1}3^j \leq |p| \leq 2^{J-j-2}3^{j+1}$, de sorte que les relations (42) et (41) fassent apparaître ξ^{j*} et η^{j*} comme filtres respectivement passe-bas et passe-haut. Les modules $|a_p^j|$ et $|b_p^j|$ doivent être maximaux au centre de la bande que l'on veut passant (bande basse fréquence pour les a_p^j , bande haute fréquence pour les b_p^j). Par ailleurs, toujours afin que φ_p^j et ψ_p^j soient à valeurs réelles, on imposera encore aux coefficients a_p^j et b_p^j de satisfaire les conditions de symétrie (26)².

2. Un premier travail avait permis de tester l'algorithme, mais avec un choix de bases ne respectant pas cette condition de filtrage [2].

Voici comment nous avons finalement été conduits à définir les matrices Ω_p^j et leurs coefficients a_p^j et b_p^j afin de répondre à ces diverses exigences. L'entier n étant toujours égal à $2^{J-j-1}3^j$, on procède comme suit :

– On pose :

$$\Omega_0^j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & i\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -i\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \quad (43a)$$

et

$$\Omega_{n/2}^j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (43b)$$

(et ceci même si, $n/2$ n'étant pas entier, cette valeur n'est effectivement pas prise par p , comme c'est le cas pour $N = 3^J$ et $j = J - 1$). Ceci permet, au moyen de (26) et (31), d'obtenir Ω_p^j pour toutes les valeurs de p multiples de $n/2$.

– On interpole ces valeurs en posant, pour $0 \leq p \leq n/2$ (et même, vu la symétrie, pour $-n/2 \leq p \leq n/2$)

$$\Omega_p^j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_p^j + \pi/4) & i e^{-2i\tau_p^j} \sin(\theta_p^j + \pi/4) \\ 0 & \sin(\theta_p^j + \pi/4) & -i e^{-2i\tau_p^j} \cos(\theta_p^j + \pi/4) \end{pmatrix} \quad (43c)$$

où les angles θ_p^j et τ_p^j croissent de 0 à $\pi/4$ lorsque p croît de 0 à $n/2$. Ces deux familles d'angles pourront être choisies suivant les mêmes conventions que dans le cas de l'analyse par octaves. Un effet de similitude approchée entre les ondelettes de différentes échelles sera obtenu en posant

$$\theta_p^j = \theta_{3p/2}^{j+1} \quad \text{et} \quad \tau_p^j = \tau_{3p/2}^{j+1}. \quad (44)$$

5. calcul effectif

5.1. description du papillon de T.O.R par quintes

Le signal de départ étant discrétisé et rangé dans un tableau de nombres indexés de 0 à $N - 1$, on lui applique un papillon analogue au papillon de T.O.R par octaves [1], décrit à la figure 1 dans le cas $N = 3^3$, où \mathcal{F}_i désigne la transformée de Fourier rapide d'ordre i , Ω_p^j est la matrice unitaire d'ordre 3 définie par (43) et Tor_k est la T.O.R par octaves d'ordre k privée de la transformation de Fourier rapide initiale \mathcal{F}_k .

A l'arrivée, le tableau contient les coefficients d'ondelettes (34). De complexité $\mathcal{O}(N \log N)$, l'algorithme est du même ordre qu'une simple transformation de Fourier rapide (son coût en est approximativement le double).

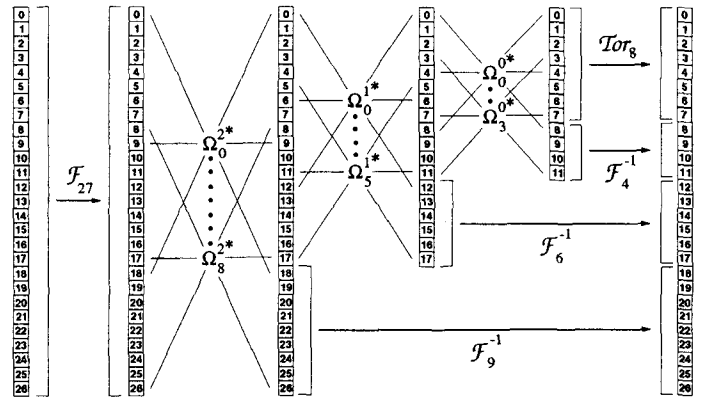


Figure 1. – Papillon de T.O.R par quintes pour $N = 27$.

5.2. le programme

Développé sur station Unix, notre programme est écrit en C et se compose :

- d'un module de transformation de Fourier rapide d'ordre quelconque; il est utilisé ici pour des ordres de la forme $2^j 3^{j'}$ et garde donc toute sa rapidité, comme nous l'avons déjà remarqué dans l'introduction,

- d'un module de T.O.R d'ordre $2^I 3^J$, I et J quelconques, qui implémente le papillon lui-même; par souci d'efficacité, les coefficients des matrices Ω_p^j sont précalculés et rangés dans deux vecteurs de complexes,

- d'un module réalisant l'interface graphique, pour représenter les coefficients d'ondelettes comme dans [1], sous la forme de bandes de fréquences superposées (une T.O.R d'ordre $2^I 3^J$ donnant $I + 2J$ bandes).

Par exemple, la T.O.R d'ordre 27 décrite par le papillon précédent donne lieu à la représentation des coefficients d'indices 1 à 26, disposés en 6 bandes horizontales selon le schéma de la figure 2 :

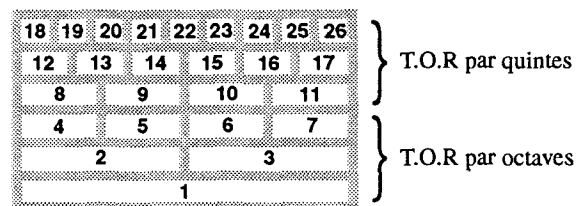


Figure 2. – Disposition des coefficients d'ondelettes pour $N = 27$.

où, dans chaque case, le coefficient sera représenté par un rectangle plein dont la hauteur est proportionnelle au coefficient. La bande des hautes fréquences est située en haut du diagramme; le coefficient d'indice 0, qui exprime la moyenne du signal, n'est pas représenté.

5.3. exemple

Nous illustrerons ce travail par un exemple qui montre ce que peut apporter l'analyse par quintes en regard de l'analyse par octaves. Le signal à analyser est défini pour $t \in [0, 1]$ et a pour équation :

$$\begin{aligned}
 f(t) = & 0.3 \times \sin^2(20\pi t) \\
 & + 0.5 \times \mathcal{P}_{0.1,0.6}(t) \times \cos(68\pi t) \times (1 + \cos(6\pi(t - 0.33))) \\
 & + 1.2 \times \mathcal{P}_{0.4,0.8}(t) \times \cos(220\pi t) \times (1.3 + \cos(16\pi(t - 0.145))) \\
 & + 1.32 \times \mathcal{P}_{0.4,0.9}(t) \times \sin(640\pi t) \times (1.7 + \cos(8\pi t))
 \end{aligned}
 \tag{45}$$

où $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$ est la fonction plateau valant 1 sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$, 0 ailleurs. Ce signal, représenté sur la figure 3, est la superposition :

- de signaux basse fréquence sans intérêt pour notre propos,
- d'un signal de fréquence 110, localisé sur l'intervalle $[0.4, 0.8]$ et modulé de façon sinusoïdale,
- d'un signal de fréquence 320, localisé sur l'intervalle $[0.4, 0.9]$ et également modulé de façon sinusoïdale.

Nous choisirons volontairement une ondelette a priori peu favorable à la séparation des fréquences, à savoir celle définie dans (27) ou (43_c) par des angles θ_p^j et τ_p^j croissant *linéairement* en fonction

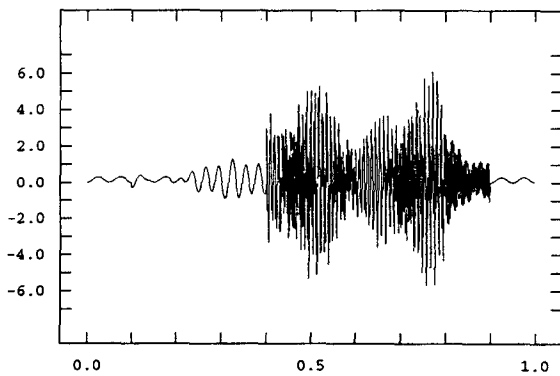


Figure 3. – Signal à analyser.

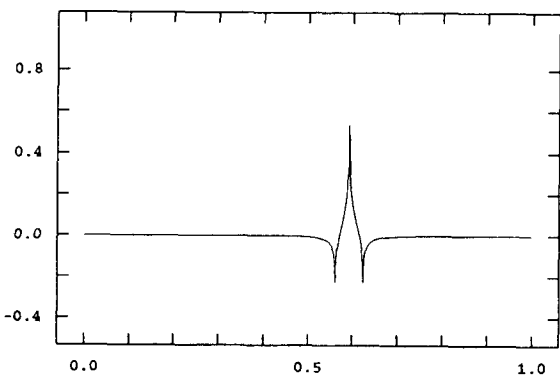


Figure 4. – Représentation de l'ondelette ψ_{25}^5 .

de p . Il sera ainsi plus aisé de mettre en évidence la meilleure résolution fréquentielle de la transformation par quintes. L'ondelette est représentée sur la figure 4.

La T.O.R par octaves (complexifiée) d'ordre $512 = 2^9$ donne le diagramme de la figure 5 :

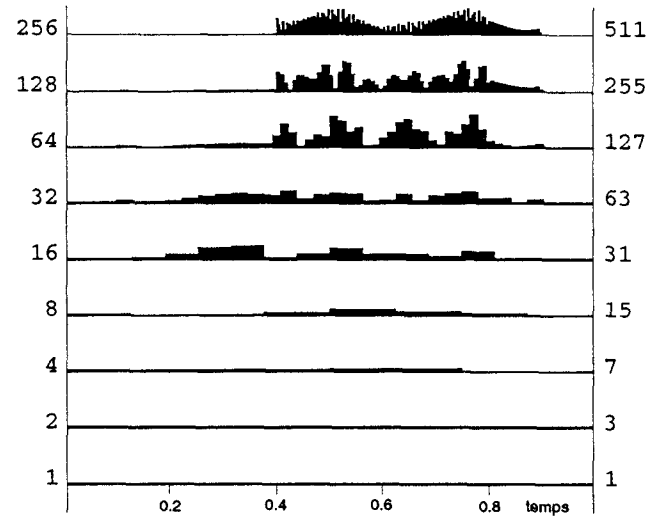


Figure 5. – Diagramme de T.O.R par octaves.

tandis que la T.O.R par quintes (complexifiée) d'ordre comparable $486 = 2 \times 3^5$ donne celui de la figure 6 :

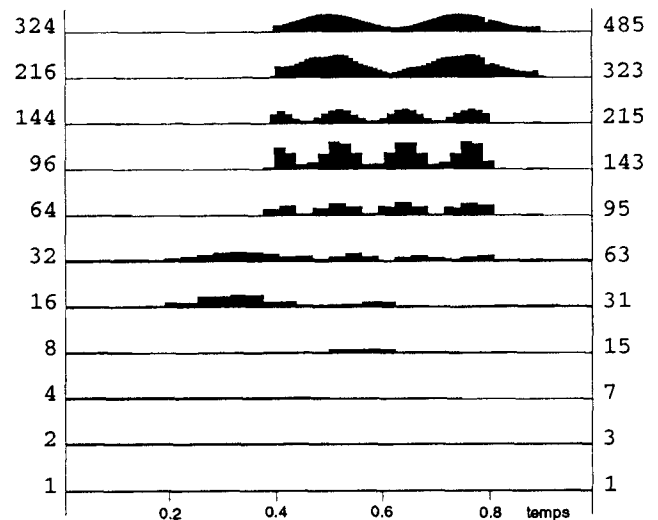


Figure 6. – Diagramme de T.O.R par quintes.

Sur ce dernier diagramme, les cinq bandes supérieures (fréquences 64 à 485) font nettement ressortir :

- le signal localisé sur $[0.4, 0.8]$, d'amplitude modulée de façon sinusoïdale, qui se manifeste sur les bandes 64 à 215 avec un maximum dans la bande 96-143,

– le signal localisé sur $[0.4, 0.9]$, d’amplitude également modulée sinusoidalement, qui se manifeste sur les bandes 216 à 485, avec un maximum dans la bande 216-323.

Il est important de remarquer qu’aucune de ces observations ne résultait clairement du diagramme de T.O.R par octaves, dont les trois bandes supérieures (fréquences 64 à 511) sont assez confuses. Cette différence, qui était prévisible puisque la T.O.R par quintes offre cinq bandes là où la T.O.R par octaves n’en offre que trois, confirme bien la meilleure résolution fréquentielle de l’analyse par quintes.

6. conclusion

L’exemple qui vient d’être donné met en évidence l’avantage de l’analyse par quintes par rapport à l’analyse par octaves, avantage qui consiste essentiellement en un resserrement de la résolution fréquentielle sans augmentation significative du temps de calcul. Evidemment, le gain en résolution fréquentielle se paie par une perte globale en résolution temporelle. Aussi, le choix des octaves ou des quintes ne peut être qu’une question de circonstances, d’applications visées.

Bien entendu, sous sa forme actuelle, le travail n’est pas achevé et trois directions s’imposent dans lesquelles nous envisageons des travaux ultérieurs.

1. Comme il est expliqué dans la partie 5, l’exemple présenté, même s’il a le double intérêt de montrer la faisabilité de la méthode et d’en mettre en évidence les avantages qualitatifs, reste “académique”. Il convient donc de tester la méthode sur des signaux concrets et d’en développer les applications.

2. Le resserrement fréquentiel que permet l’analyse par quintes peut s’avérer encore insuffisant pour certaines applications. Mais,

comme le laisse entrevoir la parenté entre algorithmes d’analyse par quintes et par octaves, le principe doit pouvoir en être généralisé sans difficulté à d’autres rapports d’échelles, tels que $4/3$ (analyse par *quartes*) ou $5/4$ (analyse par *tierces majeures*), permettant ainsi de resserrer encore l’analyse fréquentielle. La structure de l’algorithme devrait même permettre la conception de variantes *adaptatives* dans lesquelles le rapport fréquentiel serait modifié “à la demande” suivant les gammes de fréquences, au cours d’une même analyse en ondelettes.

3. Enfin, le principe d’un algorithme d’analyse par quintes “type Mallat” ayant été mis en évidence, il conviendrait de le mettre en œuvre, de le développer et de le tester.

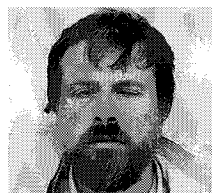
BIBLIOGRAPHIE

- [1]P. Bonnet et D. Rémond, «Une transformée en ondelettes rapide», *Traitement du Signal*, Vol. 8, No. 3, pp. 195-207, 1991.
- [2]L. Capion, «Transformation en ondelettes discrète. Recherche et tests de bases d’ondelettes en vue d’une amélioration de la résolution fréquentielle», *mémoire de DEA*, I.N.S.A de Lyon, septembre 1994.
- [3]J. C. Feauveau, «Analyse multirésolution pour des images avec un facteur de résolution $\sqrt{2}$ », *Traitement du Signal*, Vol. 7, No. 2, pp. 117-128, 1990.
- [4]S. Mallat, «Multifrequency channel decomposition of images and wavelet models», *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Vol. ASSP-37, No. 12, pp. 2091-2110, Dec. 1989.
- [5]Y. Meyer, *Les ondelettes : algorithmes et applications*, Armand Colin, Paris, 1993.
- [6]W. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky et W. T. Vetterling, *Numerical Recipes in Pascal*, Cambridge University Press, 1990.

Manuscrit reçu le 19 Septembre 1995.

LES AUTEURS

Pierre BONNET



Enseignant-chercheur en Mathématiques, équipe Modélisation Mathématique et Calcul Scientifique. Principaux centres d’intérêt : analyse harmonique, applications à la physique et à la théorie du signal.

Olivier MARGUIN



Enseignant-chercheur en Mathématiques. Principaux centres d’intérêt : géométrie algébrique réelle, systèmes dynamiques discrets et continus, géométrie fractale, analyse multifractale des signaux.

Didier REMOND



Enseignant-chercheur en Génie Mécanique. Principaux centres d’intérêt : analyse expérimentale du comportement vibratoire et acoustique des transmissions de puissance par engrenages, analyse temps-fréquence des signaux.