Correspondances

Un complément sur la normalité des accroissements moyens dans les processus définis par leurs accroissements; une application à l'acoustique routière

Complement about Normality for Processes with Stationary Increments; An Application to Road Acoustic

par Michel MAURIN
INRETS–LEN, Institut de Recherche sur les Transports et leur Sécurité, laboratoire Énergie–Nuisances
109, avenue S. Allende, case 24 F-69675 Bron cedex

Résumé

L'acoustique de l'environnement utilise le niveau de bruit équivalent *Leq*. Dans un premier temps nous avons examiné des classes de processus à accroissements stationnaires, indépendants puis non indépendants, positifs qui conduisent à des niveaux asymptotiquement gaussiens lorsque la durée d'intégration augmente.
Ici nous abordons un premier défaut de stationnarité. Dans tous ces cas les niveaux de bruit présentent encore un comportement asymptotique gaussien.

Mots clés : acoustique de l'environnement, niveau équivalent, processus à accroissements stationnaires PAS, fonctions presque périodiques.

Abstract

Equivalent noise levels Leq are very used in road and environmental acoustics. In foregoing papers we investigated some classes of PISI and PSI processes for acoustic energy yielding asymptotic gaussian behaviour for noise levels when measurement's duration increases, a mathematical consequence instead of an unclear « gaussian assumption », (par. II, Processes with Independent and Stationary Increments, Processes with Stationary Increments).
Here we enlarge possible new class putting away stationarity, as it may be in urban streets where traffics are controlled by several devices (human or electrical) (par. III). In all cases asymptotic gaussian behaviour consequences remain valid.

Key words : *environmental acoustic, equivalent noise levels, processes with stationary increments PSI, almost periodic functions.*

SIGLES ET NOTATIONS UTILISÉES

PAS : processus à accroissements stationnaires

PAIS : processus à accroissements indépendants et stationnaires

1. Introduction

p_t	pression acoustique
p_0	constante = $2\ 10^{-5}$ Pa
$\mathrm{Leq}_{[t_a,t_b]}$	niveau de bruit équivalent sur $[t_a, t_b]$
log	logarithme décimal
$X_t = \int_0^t \left(\frac{p_u}{p_0}\right)^2 du$	
ΔX_t	accroissement de X_t sur $[t, t+\Delta t]$
$\frac{\Delta X_t}{\Delta t}$	accroissement moyen

Partie 2 :

V_t	processus stationnaire du second ordre
$X_t = \int_0^t V_u\, du$	
$E(.)$	espérance mathématique
$E_V = E(V_t)$	espérance de V_t
$\widetilde{C}_V(\tau) = E(V_{t+\tau}V_t) - E_V^2$	fonction de covariance centrée de V_t
var(.)	variance
C_V	fonctions de covariance centrée continue de V_t
δ	distribution de Dirac à l'origine
D, K	scalaires
$\eta(t), \nu(t)$	applications

Partie 3 :

a	fonction moyennable
$\mathcal{M}(a)$	"moyenne" de a
a_∞	limite de a pour l'infini
$\check{X}_t = X_t + \int_0^t a(u)\,du$	
a_n, c_n, s_n, ω_n	scalaires
p, i	applications paire, impaire

1. Introduction

L'acoustique de l'environnement, l'acoustique routière, sont des branches de l'acoustique dans lesquelles on utilise en priorité divers indices de bruit qui sont des niveaux en décibels, et non la pression acoustique proprement dite (en toute rigueur une surpression). Si l'on note p_t cette pression, variable en fonction du temps, l'indice le plus commode et l'un des plus répandus est le niveau de bruit équivalent noté $Leq_{[t_a,t_b]}$ dont la définition est donnée par la formule :

$$10\,log\left\{\frac{1}{t_b - t_a}\int_{t_a}^{t_b}\left(\frac{p_u}{p_0}\right)^2 du\right\}.$$

L'expression est classique, elle fait intervenir une pression de référence p_0 égale à $2 \cdot 10^{-5} Pa$ afin de rendre les niveaux sans dimensions, et elle s'applique à tout intervalle de temps, de courte ou longue durée — voire très courte ou très longue — entre une fraction de seconde et plusieurs heures comme on peut le rencontrer dans les indices de l'environnement (de 8h à 20h dans la réglementation française, de 6h à 22h dans la réglementation allemande, etc ...).

On reconnaît dans l'argument du logarithme la pression efficace au carré sur l'intervalle de calcul du niveau. Le discours habituel laisse une place exclusive à cette valeur efficace [4, 9, 10], cependant un examen renouvelé de la formule laisse entrevoir des perspectives différentes et originales. En effet l'argument du logarithme est aussi un rapport de deux quantités avec au dénominateur la durée de l'intervalle, et au numérateur l'accroissement correspondant de $X_t = \int_0^t (\frac{p_u}{p_0})^2$, l'énergie du signal $\frac{p_t}{p_0}$. La dissociation du numérateur et du dénominateur dans une valeur efficace est une opération banale en soi, mais elle attire néanmoins l'attention sur les accroissements ΔX_t pour tout intervalle $[t, t+\Delta t]$, et sur les accroissements moyens correspondants $\frac{\Delta X_t}{\Delta t}$. Cette simple remarque sert de point de départ pour poser un regard rénové sur les indices acoustiques, d'autant plus que l'on a les points suivants :

1) les niveaux de bruit étant éminemment variables dans le temps, il paraît judicieux de représenter les variations de la pression par un processus stochastique pour p_t, et de se pencher ainsi sur les accroissements du processus intégral associé $X_t = \int_0^t (\frac{p_u}{p_0})^2\,du$ (l'énergie);

2) les niveaux de bruits équivalents $Leq_{\Delta t}$ au voisinage des axes routiers manifestent une stabilité certaine sur de longues durées diurnes (un palier entre 7h et 19h par exemple [14]). Pour cette raison il est non moins judicieux d'introduire des processus à accroissements stationnaires (PAS) pour X_t et à cause du logarithme, des PAS positifs [12, 13];

3) en dernier il est coutumier de lire dans la littérature de l'acoustique routière que les niveaux de bruit routiers suivent une distribution normale (les niveaux sont dits gaussiens), au point de devenir pour beaucoup un présupposé dans le comportement des niveaux de bruit routier [4, 6, 8, 10, 11]. C'est une constatation expérimentale (avec une plus ou moins bonne approximation) qui a conduit à la « gaussian assumption » dans la littérature anglo–saxonne, et qui a été relayée par de nombreux auteurs depuis.

Précisément c'est en utilisant le point de vue des accroissements ΔX_t au numérateur que nous avons remarqué qu'une telle hypothèse gaussienne est inutile. En effet, aussi bien dans une large classe de processus à accroissements stationnaires (PAS) que de processus à accroissements indépendants et stationnaires (PAIS), la distribution des accroissements moyens $\frac{\Delta X_t}{\Delta t}$ converge en loi vers une distribution normale lorsque la durée Δt tend vers l'infini [12, 13]; et avec des sous–classes de PAS ou de PAIS positifs, les niveaux équivalents correspondants $10\,log\frac{\Delta X_t}{\Delta t}$ en font de même grâce aux propriétés de la loi log–normale [7].

Dans le contexte routier il est donc intéressant de disposer de modèles qui conduisent explicitement à la normalité (encore une fois au lieu de la postuler). Et il est non moins intéressant de chercher à élargir encore la classe de ces modèles afin de pouvoir représenter des situations de plus en plus nombreuses. Puisque dans la pratique un signal supposé stationnaire peut ne pas l'être en toute rigueur, nous abordons dans cette note des processus dont les accroissements ne sont plus stationnaires. Il s'agit de la première altération de stationnarité qui est envisagée dans cette analyse des niveaux de bruit, et c'est bien une altération courante pour les niveaux en milieu urbain, chaque fois que les trafics sont contrôlés par des feux ou des agents de circulation avec une certaine régularité périodique et déterministe de l'ordre de la minute *.

Le second paragraphe rappelle brièvement les propriétés de ces premiers modèles, le troisième est consacré au défaut de stationnarité proprement dit.

* En pratique les niveaux de bruit sont pondérés en fréquence pour tenir compte des performances auditives d'une oreille « moyenne » de 15 à 20 000 Hz. Pour cela, la pression p_t est filtrée dans chaque sonomètre par l'une des pondérations classiques (courbe A, B, ...) et les indices sont définis à partir du signal $p_{A,t}, p_{B,t}$... Le propos de la note intègre cette opération en considérant l'énergie de $\frac{p_{pond,t}}{p_0}$.

2. Quelques rappels sur les modèles initiaux

2.1. LES PAIS

Les processus à accroissements indépendants sont connus par l'intermédiaire de la loi de tout accroissement ΔX_t, et plus précisément par l'intermédiaire de la fonction caractéristique [5]. Lorsque tous les cumulants, lorsqu'ils sont définis, sont proportionnels à la durée Δt de l'accroissement, notamment pour l'espérance et la variance, la loi des accroissements sur tout intervalle ne dépend pas de l'instant t. Par conséquent les accroissements qui se produisent sur des intervalles de même durée Δt sont stationnaires (PAIS).

Lorsque la distribution de ΔX_t est positive du second ordre nous avons vérifié que la loi des accroissements moyens converge en loi vers une distribution normale quand la durée Δt tend vers l'infini [12].

2.2. LES PAS

Les processus de la forme $X_t = \int_0^t V_u\, du$ ont des accroissements du second ordre lorsque V_t est un processus du second ordre, ils ne sont plus indépendants, mais sur des intervalles de durées égales ils sont encore stationnaires lorsque V_t est lui–même stationnaire. Soient

$$E_V = E(V_t) \quad \text{et} \quad \tilde{C}_V(\tau) = E(V_{t+\tau}V_t) - E_V^2$$

l'espérance et la fonction de covariance centrée de V_t. Il est commode de prendre $\tilde{C}_V$ de la forme $C_V + 2D\,\delta$ de manière à pouvoir couvrir deux situations différentes en même temps, avec C_V une covariance centrée continue, et $2\,D\,\delta$ une distribution de Dirac éventuelle à l'origine ($D \geq 0$); le terme en δ correspondant à la covariance d'un processus dérivé de PAIS du second ordre [16]. Dans ces conditions $E(X_t) = t\,E_V$ et

$$\begin{aligned} var(X_t) &= 2\,D\,t + \int_{-t}^{t} (t - |x|)\, C_V(x)\, dx \\ &= 2\,D\,t + 2\int_0^t \int_0^x C_V(u)\, du\, dx \quad [15]. \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse H1 que la covariance centrée C_V est intégrable sur R nous avons

$$\int_0^x C_V(u)\, du = K + \eta(x)$$

K est la constante $\int_0^\infty C_V(u)\, du$, η une application qui tend vers zéro lorsque x tend vers plus l'infini. Par conséquent

$$var(X_t) = 2(Dt + Kt + t\,\nu(t)) \text{ avec } \nu(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \eta(x)\, dx$$

une application qui tend également vers zéro lorsque t tend vers plus l'infini, mais l'on ne peut rien dire sur la limite du terme $t\,\nu(t)$.

Sous l'hypothèse renforcée H2 que $|t\,C_V|$ est intégrable sur R, il est possible de calculer directement l'intégrale

$$\int_0^t (t - x)\, C_V(x)\, dx$$

dans la variance, égale à

$$t\int_0^t C_V(x)\, dx - \int_0^t x\, C_V(x)\, dx.$$

Le second terme est de la forme $K_2 + \eta_2(t)$, K_2 est la constante

$$\int_0^\infty u\, C_V(u)\, du,$$

η_2 une application qui tend vers zéro lorsque t tend vers plus l'infini. Le premier est égal à $Kt + t\,\eta(t)$ avec,

$$|\eta(t)| = |\int_t^{+\infty} C_V(x)\, dx| \leq \frac{1}{t}\int_t^{+\infty} x\,|C_V(x)|\, dx = \frac{1}{t}\eta_3(t),$$

et η_3 une application qui tend vers zéro lorsque t tend vers plus l'infini; il en est donc de même de $t\,\eta(t)$. On a ainsi la forme plus précise

$$var(X_t) = 2(Dt + Kt - K_2 + t\eta(t) - \eta_2(t))$$

dont les deux derniers termes tendent vers zéro lorsque t tend vers plus l'infini. Cette expression asymptotiquement affine est à rapprocher des variances proportionnelles à la durée dans les PAIS (cf. 2.1).

Nous avons également vérifié que sous H1 (a fortiori sous H2) la loi des accroissements moyens converge en loi vers une distribution normale lorsque la durée Δt tend vers l'infini [13].

2.3. COMMENTAIRES

Les démonstrations se ramènent dans les deux cas à des adaptations du théorème central limite en Probabilités [17] appliquées aux accroissements moyens. Les deux fois la variance de $\frac{\Delta X_t}{\Delta t}$ tend vers zéro quand Δt augmente, et l'on peut ainsi conclure à la normalité asymptotique des niveaux $10\,log\frac{\Delta X_t}{\Delta t}$ [7, 12] sous réserve que les accroissements soient positifs.

En dernier nous rappelons que la forme générale des PAIS positifs est connue [5], et puisque les ΔX_t sont positifs quand V_t est positif nous avons introduit une classe de processus stationnaires du second ordre positifs V_t à cet effet [13].

3. Un exemple de processus à accroissements non stationnaires

3.1. UN DÉFAUT DE STATIONNARITÉ

Les deux étapes précédentes montrent que les conclusions sont conservées lorsque l'indépendance des accroissements est abandonnée; on peut se demander s'il risque d'en être de même avec un abandon de la stationnarité.

Pour traiter cette situation nous considérons que le processus à l'origine de la puissance acoustique est la somme de deux termes, le processus précédent $\frac{p_t^2}{p_0^2}$ auquel vient s'ajouter une variation déterministe continue bornée $a(t)$. Le nouveau processus est de la forme

$$\check{X}_t = X_t + \int_0^t a(u)\, du,$$

et sur tout intervalle $[t, t+\Delta t]$ son accroissement moyen

$$\frac{\Delta \check{X}_t}{\Delta t} = \frac{\Delta X_t}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} a(u)\, du$$

est la somme d'une variable aléatoire déjà examinée et de la quantité certaine

$$\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} a(u)\, du.$$

C'est une nouvelle variable aléatoire translatée de cette quantité, les moments centrés de sa loi sont inchangés tandis que l'espérance est augmentée de cette même quantité, qui dépend de t. Il s'agit donc à présent d'envisager des hypothèses sur la fonction $a(t)$ afin de conserver la normalité asymptotique des accroissements moyens.

Ce modèle est une façon, parmi d'autres, d'aborder la non–stationnarité. Sur le plan des applications pratiques cela concerne tout à fait les niveaux de bruit en milieu urbain. En de nombreux carrefours l'écoulement du trafic est souvent géré par divers procédés, et l'on peut raisonnablement isoler une partie commandée, voire périodique, dans l'écoulement, laquelle apporte une contribution non aléatoire aux niveaux de bruit qui en résultent. Le bruit de la circulation sous l'influence des carrefours est une question en soi dans l'ensemble des considérations sur l'acoustique urbaine [18].

3.2. DES FONCTIONS MOYENNABLES

Nous considérons la classe des fonctions dites moyennables. Par définition elles sont telles que pour tout x positif l'intégrale $\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} a(u)\, du$ est définie, et tend vers une limite $\mathcal{M}(a)$ lorsque x tend vers plus l'infini; la limite est ce que l'on appelle la « moyenne » de la fonction [2, 3]. Nous ajoutons ici les deux propriétés complémentaires suivantes :

C1) $\frac{1}{x}\int_0^x a(u)\, du$ tend aussi vers $\mathcal{M}(a)$ lorsque x tend vers plus l'infini;

C2) la moyenne est invariante par translation, c'est à dire que pour tout h fini

$$\frac{1}{2x}\int_{-x+h}^{x+h} a(u)\, du \quad \text{tend vers} \quad \mathcal{M}(a).$$

lorsque x tend vers plus l'infini.

Lemme 1 : Si une fonction moyennable vérifie C1 et C2, pour tout h fini $\frac{1}{x}\int_h^{h+x} a(u)\, du$ tend vers une limite $\mathcal{M}(a)$ quand x tend vers plus l'infini.

En effet d'après C2 la limite de $\frac{1}{2x}\int_{-x+h}^{x+h} a(u)\, du$ quand x tend vers plus l'infini est égale à $\mathcal{M}(a)$, et la propriété C1 entraîne que $\frac{1}{x}\int_h^{h+x} a(u)\, du$ tend vers la même limite. $\diamondsuit$

Propriété :

Avec une fonction moyennable a qui vérifie les conditions C1, C2 et les mêmes hypothèses sur X_t qu'en 2.1 ou 2.2 la loi de l'accroissement moyen $\frac{\Delta \check{X}_t}{\Delta t}$ converge vers une loi normale lorsque la durée Δt tend vers plus l'infini, c'est la loi limite de $\frac{\Delta X_t}{\Delta t}$ translatée de $\mathcal{M}(a)$.

En effet nous avons

$$\frac{\Delta X_t}{\Delta t} = \frac{\Delta \check{X}_t}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} a(u)\, du,$$

et d'après le Lemme 1 l'intégrale non aléatoire de a tend vers $\mathcal{M}(a)$ quand Δt tend vers plus l'infini. $\diamondsuit$

3.3. DES EXEMPLES DE FONCTIONS SATISFAISANTES

Selon la Propriété ci–dessus l'extension des propriétés des PAS à des accroissements non stationnaires repose sur les fonctions moyennables qui vérifient les conditions C1 et C2. Leur examen permet de présenter des fonctions moyennables qui les vérifient, (nous considérons uniquement des fonctions réelles).

3.3.1. Des exemples simples

La condition C2 est notamment liée à la majoration ou au signe de a.

Lemme 2 : Si une fonction moyennable a est bornée ou garde un signe constant elle vérifie C2.

En effet

$$\frac{1}{2x}\int_{-x+h}^{x+h} a(u)\, du = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} a(u)\, du + \frac{1}{2x}\int_{-x+h}^{-x} a(u)\, du + \frac{1}{2x}\int_{x}^{x+h} a(u)\, du,$$

i) avec a bornée les deux derniers termes du membre de droite tendent vers zéro lorsque x tend vers plus l'infini, ce qui entraîne C2;

ii) on a aussi

$$\frac{1}{2x}\int_{-x-h}^{-x} a(u)\,du + \frac{1}{2x}\int_{x}^{x+h} a(u)\,du = \frac{x+h}{x}$$
$$\frac{1}{2(x+h)}\int_{-x-h}^{x+h} a(u)\,du - \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} a(u)\,du,$$

par hypothèse le second membre tend vers zéro quand x tend vers plus l'infini, et lorsque a garde un signe constant les deux termes du premier membre sont du même signe quelque soit h et tendent nécessairement vers zéro, ce qui entraîne également C2. $\diamond$

C1 est notamment liée aux valeurs limites de a quand x tend vers l'infini ou à des raisons de parité.

Lemme 3 : Si une fonction a est intégrable sur tout intervalle fini et tend vers la même limite lorsque x tend vers plus et moins l'infini elle est moyennable et vérifie C1.

En effet pour tout ε il existe X tel que pour $|x| > X$ on a $|a - a_\infty| \le \varepsilon$, et donc

$$\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} a(u)\,du = \frac{1}{2x}\left[\int_{-x}^{X} a(u)\,du + \int_{-X}^{X} a(u)\,du + \int_{X}^{x} a(u)\,du\right],$$

$$\frac{1}{2x}\int_{-x}^{-X} a(u)\,du = \frac{(x-X)a_\infty}{2x} + \frac{1}{2x}\int_{-x}^{-X}(a-a_\infty)\,du,$$

et $\displaystyle \frac{1}{2x}\int_{X}^{x} a(u)\,du = \frac{(x-X)a_\infty}{2x} + \frac{1}{2x}\int_{X}^{x}(a-a_\infty)\,du.$

Lorsque x tend vers plus l'infini

$$\frac{1}{2x}\int_{X}^{x}(a-a_\infty)\,du \text{ et } \frac{1}{2x}\int_{-x}^{-X}(a-a_\infty)\,du$$

sont inférieurs en valeur absolue à $\varepsilon\frac{x-X}{2x} \le \frac{\varepsilon}{2}$, $\frac{x-X}{2x}a_\infty$ tend vers $\frac{a_\infty}{2}$ et $\frac{1}{2x}\int_{-X}^{X} a(u)\,du$ tend vers zéro; il en résulte que $\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} a(u)\,du$ tend vers a_∞, ce qui entraîne $\mathcal{M}(a) = a_\infty$.

Un raisonnement analogue montre que $\frac{1}{x}\int_{0}^{x} a(u)\,du$ tend vers a_∞ quand x tend vers plus l'infini. $\diamond$

Lemme 4 : Si une fonction paire p est moyennable elle vérifie C1. En effet

$$\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} p(u)\,du = \frac{1}{x}\int_{0}^{x} p(u)\,du$$

lorsque p est paire et les deux membres tendent vers $\mathcal{M}(a)$ quand x tend vers plus l'infini. $\diamond$

Lemme 5 : Une fonction impaire i intégrable sur tout intervalle fini est moyennable; si en outre elle tend vers zéro quand x tend vers plus l'infini elle vérifie C1. En effet

$$\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} i(u)\,du,$$

définie par hypothèse quelque soit x positif est égale à zéro, il en résulte que la moyenne $\mathcal{M}(i)$ est définie et nulle.

En outre, en suivant le Lemme 3,

$$\frac{1}{x}\int_{0}^{x} i(u)\,du$$

tend vers zéro quand x tend vers plus l'infini. $\diamond$.

Les Lemmes précédents donnent ainsi le moyen de disposer de fonctions moyennables qui vérifient C1 et C2, soit directement, soit en utilisant la décomposition en parties paire et impaire $a = p + i$.

3.3.2. Les fonctions presque périodiques continues

Les fonctions presque périodiques continues constituent une classe beaucoup moins triviale de fonctions répondant à la question. Ce sont des fonctions moyennables qui ont été introduites depuis la fin du siècle dernier par Bohl (1893), Esclangon (1904, 1917), Bohr (1923) ..., [2, 3] et quelques références historiques dans [1]. Pour ces fonctions la condition C1 est établie dans [2], la condition C2 dans [2, 3].

Les polynômes trigonométriques $\sum_{n=1}^{N} a_n e^{i\omega_n t}$ et les séries trigonométriques $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\omega_n t}$ définies par des suites de scalaires a_n, ω_n dont la série des modules $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ est convergente sont des fonctions presque périodiques continues réelles ou complexes, pour les fonctions de cette forme la moyenne $\mathcal{M}(a)$ est égale au cœfficient a_n associé au cœfficient ω_n nul (s'il existe, sinon $\mathcal{M}(a) = 0$). Une fonction périodique étant presque périodique est moyennable, sa moyenne $\mathcal{M}(a)$ est égale à

$$\frac{1}{P}\int_{0}^{P} a(u)\,du \text{ pour toute période } P [2, 3].$$

Pour discuter du signe nous devons nous limiter aux séries réelles

$$a(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n \cos\omega_n t + s_n \sin\omega_n t)$$

à cœfficients réels, avec $\omega_n \ne 0$; leur moyenne est égale à c_0 et elles sont ainsi décomposées en parties paire et impaire comme en 3.3.1. Pour disposer d'une fonction positive, nous avons le résultat immédiat suivant :

Lemme 6 : La fonction presque périodique réelle $a(t)$ est positive lorsque

$$c_0 > \sum_{n=1}^{\infty}(|c_n| + |s_n|).$$

3.4. COMPLÉMENTS

Nous retrouvons ainsi un comportement asymptotique gaussien pour les $\frac{\overset{\vee}{\Delta X_t}}{\Delta t}$ analogue à celui des $\frac{\Delta X_t}{\Delta t}$, l'addition d'une application déterministe au processus dans le modèle ne change rien si elle est moyennable et vérifie C1 et C2.
En dernier il en est de la normalité des niveaux de bruit équivalents $10log\frac{\overset{\vee}{\Delta X_t}}{\Delta t}$ ce qu'il en est de celle des $10log\frac{\Delta X_t}{\Delta t}$; d'une part la variance de $\frac{\overset{\vee}{\Delta X_t}}{\Delta t}$ égale à celle de $\frac{\Delta X_t}{\Delta t}$ tend vers zéro quand Δt augmente, d'autre part les accroissements sont positifs lorsque ΔX_t et a sont tous deux positifs.

Il est donc suffisant que a soit une fonction moyennable positive vérifiant C1 et C2 pour que les niveaux de bruit équivalents $10log\frac{\overset{\vee}{\Delta X_t}}{\Delta t}$ du modèle élargi convergent en loi vers une loi normale, une fonction décrite par le Lemme 6 par exemple.

4. Conclusions

Nous avons rappelé combien il est important en acoustique routière d'avoir à sa disposition des modèles pour la pression acoustique et pour son énergie qui nous conduisent à la normalité des niveaux de bruit équivalents. La normalité, exacte ou approchée, se rencontre fréquemment sur les niveaux de bruit tels qu'ils sont mesurés sur d'assez longues durées dans les ambiances routières, mais jusqu'à présent cette observation n'avait conduit qu'à poser des postulats de normalité (la « gaussian assumption ») plutôt qu'à rechercher des modèles satisfaisants. La démarche la plus immédiate pour obtenir de tels modèles consiste sans doute à dissocier le numérateur et le dénominateur dans les pressions efficaces au carré; c'est en poursuivant cette idée que nous avons observé l'intérêt des processus définis par leurs accroissements stationnaires, indépendants ou non.

Dans le même cadre il est possible de poursuivre l'extension des modèles en envisageant l'abandon de la stationnarité. C'est ce qui est présenté dans cette petite note en considérant l'effet d'une contribution déterministe supplémentaire, elle conserve le caractère stochastique, voire indépendant, des accroissements mais elle détruit leur stationnarité. Le résultat montre que malgré cela les conclusions de normalité asymptotique sont conservées sous certaines conditions; notamment lorsque le défaut de stationnarité est dû aux accroissements d'une fonction moyennable positive périodique ou presque–périodique.
Les propos que l'on tient sur les processus sont toujours peu ou prou techniques; il s'avère ici que les fonctions qui répondent à la question se prêtent tout à fait à la situation courante des écoulements de trafic sur la voirie urbaine.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.Allais, « Fréquence, probabilité et hasard, le théorème (T), la simulation du hasard par des fonctions presque–périodiques », *Journal de statistique*, 1983, n°3 , p. 146-221.
[2] J. Bass, *Cours de Mathématiques*, Tome III, Masson, 1971.
[3] J. Bass, *Fonctions de corrélation, fonctions pseudo–aléatoires et applications*, Masson, 1984.
[4] D.E. Bishop, « Noise surveys; community noise », in Harris C. M., *Handbook of noise control*, chap. 35, McGraw Hill, 1979.
[5] N. Bouleau, *Processus stochastiques et applications*, Hermann, 1988.
[6] C.G. Don, I.G. Rees, « Road traffic sound level distributions », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 100, n°1, 1985, p. 41-53.
[7] N.L. Johnson, S. Kotz, *Continuous univariate distributions*, vol. 1, J. Wiley, 1970.
[8] D.R. Johnson, E.G. Saunders, « The evaluation of noise from freely flowing traffic », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 7, 1968, p. 287-309.
[9] R. Josse, *Notions d'acoustique à l'usage des architectes ingénieurs et urbanistes*, Eyrolles, 1973.
[10] P. Liénard, *Décibels et indices de bruit*, Masson, 1978.
[11] M. Maurin, « Noise levels distributions in environmental acoustics », *Western pacific regional acoustics conference IV*, Brisbane, 1991, p. 522-527.
[12] M. Maurin, « A propos de la modélisation des niveaux de bruit », *Revue de Statistique Appliquée*, vol. XXXIX, n°2, 1991, p. 69-74.
[13] M. Maurin, « Une classe de processus pour modéliser les niveaux de bruit de l'environnement », *Traitement du signal*, vol. 10, n°1, 1993, p. 29-39.
[14] M. Maurin, D. Olivier, I. At, « Environmental noise levels and data analysis », *ACOUSTICS '93, joint IOA/SFA congress*, Southampton, 1993.
[15] J. Max, *Méthodes et techniques de traitement du signal*, Masson, 1977.
[16] A. Papoulis, *Probability, random variables and stochastics processes*, McGraw Hill, 1965.
[17] A. Renyi, *Calcul des probabilités*, Dunod, 1966.
[18] M. Tracz, J. Bohatkiewicz, « Effects of traffic conditions on traffic noise at signalised intersection », *EURO
NOISE'95*, Lyon, 1995.

L'AUTEUR

Michel MAURIN

Ingénieur Civil de l'ENPC, Docteur Ingénieur en Statistique de l'Université de Grenoble, chargé du cours de Probabilités et Statistique à l'Ecole Centrale de Lyon. Les recherches auxquelles l'auteur participe à l'INRETS concernent les nuisances acoustiques des moyens de transports, dont celles des transports routiers. En particulier l'auteur a dirigé les deux enquêtes faites par l'INRETS sur les nuisances des transports en France, comprenant un volet questionnaire et un vaste ensemble d'enregistrements acoustiques associés de moyennes et longueurs durées (1978, 1987).

Manuscrit reçu le 1er Octobre 1993.
Version révisée le 2 Février 1995.