

## Un nouvel opérateur pour la détection de ruptures dans des signaux bruités

---

### *A New Operator for the Detection of Transitions in Noisy Signals*

par W.Y. LIU, I.E. MAGNIN, G. GIMENEZ

CREATIS, INSA 502  
F-69621 Villeurbanne cedex

#### Résumé

Cet article décrit un nouvel opérateur de détection de rupture dans un signal très bruité. Cet opérateur s'appuie sur les propriétés de stationnarité locale du signal. Il est basé sur l'estimation de la variance de son moment d'ordre 1 glissant. Il s'agit d'un filtre non linéaire qui fournit en sortie une valeur proche de zéro dans le cas stationnaire et une réponse de forte amplitude en présence de rupture. Son comportement s'apparente, d'une certaine façon, à celui de l'opérateur de Canny-Deriche auquel il est systématiquement comparé pour des signaux, bruités ou non, comportant une rupture. La comparaison s'avère à l'avantage de ce nouvel opérateur.

**Mots clés :** Détection, segmentation, bruit, statistique, filtre moyenneur, variance, estimation, filtre à RII, filtre à RIF.

#### Abstract

*This paper describes a new operator for the detection of transitions in a very noisy signal. It is based on the local properties of stationarity of the signal. It estimates the variance of the first order moment of the signal in a sliding window. Considered as a non linear filter, its output is nearly zero in amplitude for stationary parts of the signal and is very high in amplitude in presence of a discontinuity. Its behavior can be compared in some way to the Canny-Deriche operator. The results of a systematic comparison between both operators is given on ideal and noisy signals. In most cases, the new operator comes to be a better estimate of the discontinuity.*

**Key words :** Detection, segmentation, noise, statistics, mean, variance, estimation, IIR filter, FIR filter.

## 1. Introduction

La segmentation est un des problèmes primordiaux en traitement du signal ou de l'image. Pour définir ce qu'est la segmentation, nous citerons une publication récente [1] : « La segmentation est une approche pour le traitement des signaux présentant des non-stationnarités « rapides » ou « ruptures », et constitue une première étape possible de traitement en vue de la reconnaissance ou du diagnostic, voire même du codage. Cette approche consiste à considérer que le signal est une succession de segments homogènes, de caractéristiques constantes ou lentement variables, séparés par des transitions brutales où les caractéristiques du signal changent rapidement. » Une non stationnarité « rapide » ou « rupture », ou encore une transition, est un signal de courte durée par rapport à la période d'observation. La détection d'une transition est un problème binaire. On est amené à décider, dans chaque intervalle de temps, si une transition existe (hypothèse 1) ou non (hypothèse 0). Autrement dit, on suppose que le signal observé  $x(t)$  est stationnaire ou non stationnaire.

D'une manière générale les techniques de segmentation sont utilisées dans des secteurs aussi variés que les télécommunications, les systèmes de détection (radar et sonar) ou le traitement de signaux biomédicaux.

L'idée directrice de ce travail est d'élaborer un opérateur qui détecte les « non-stationnarités rapides », et qui travaille dans une fenêtre glissante. Cet opérateur, appliqué dans ces conditions idéales à un segment homogène d'un signal de caractéristiques probabilistes constantes, présente une sortie nulle. Par contre le passage d'un segment homogène à un autre se traduit par l'apparition en sortie d'un signal positif de faible durée et de forte amplitude. Nous nous intéressons ici à la détection et à la localisation d'un saut de moyenne dans un signal.

Vu sous l'angle de la détection de rupture dans des signaux, un compromis est à trouver entre le retard de réaction à une rupture et la sensibilité au bruit. Dans le cas d'un changement de paramètre comme un saut de moyenne dans une suite indépendante, le détecteur CUSUM dit de Page-Hinkley [2] présente certains avantages. En particulier, celui-ci agit comme un intégrateur avec

seuil adaptatif et présente de ce fait une très bonne robustesse au bruit. Vu sous l'angle de la segmentation de signaux, ce type de détecteur présente néanmoins plusieurs inconvénients, nous en citerons deux. Le premier inconvénient concerne la localisation de la rupture. En effet, la détection de rupture se fait par seuillage de l'amplitude de la sortie du filtre, qui présente après rupture une sortie croissante (influence du choix de seuil et de l'amplitude minimale à détecter). Le second inconvénient est lié à la détection de rupture dans des signaux multidimensionnels. L'extension du détecteur CUSUM en 2D ou en 3D est une tâche très difficile, ce qui en limite l'intérêt en segmentation.

Une autre famille de détecteurs de non stationnarité s'appuie sur un lissage préalable du signal, suivi par un opérateur différentiel. Les différences entre ces détecteurs se situent au niveau du filtre de lissage ou au niveau de l'opérateur différentiel. Parmi les travaux sur ce sujet citons ceux de D. Marr et H. Hildreth [3], de Canny [4], de J. Shen et S. Castan [5, 6, 7] et de Deriche [8, 9] qui reprend un critère proposé par Canny. Le nouvel opérateur [10,11] se compose également de 2 filtres en cascade. Le premier est un filtre de lissage classique, le second est un filtre non linéaire. Cet opérateur non linéaire, calculé dans une fenêtre glissante, présente l'avantage d'être très peu sensible à des variations locales de l'amplitude, et fournit en sortie une valeur toujours positive. Pour évaluer ses performances, nous avons choisi de le comparer à l'opérateur proposé par Deriche car il présente un comportement comparable et constitue aujourd'hui une référence en segmentation. Une telle comparaison requiert un réglage cohérent des paramètres respectifs des deux opérateurs, comme la taille de la fenêtre de lissage par exemple. Dans ce but nous avons attaqué les deux filtres par un échelon idéal non bruité et avons ajusté les paramètres pour obtenir des réponses similaires dans ces conditions dites de référence. C'est avec ce réglage « figé » des paramètres que les deux opérateurs ont ensuite été comparés dans diverses situations.

Dans la première section de cet article nous décrivons séparément les deux filtres constituant le nouvel opérateur, puis nous étudions les propriétés de l'opérateur obtenu en associant en cascade les deux filtres précédents. La deuxième section est consacrée à la comparaison entre le nouvel opérateur et l'opérateur de Deriche dans le cas de signaux non-bruités comportant des sauts. La troisième section concerne l'analyse théorique du comportement comparé des deux filtres en présence de bruit. Dans la quatrième section enfin on donne les résultats d'une simulation où sont comparés le comportement des deux systèmes dans le cas de signaux bruités comportant des sauts.

## 2. Description de l'opérateur

La méthode proposée consiste à réaliser deux filtrages en cascade (Fig. 1). Le premier filtre est un filtre moyennneur classique défini

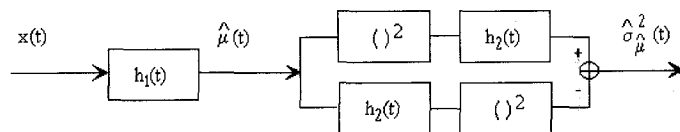


Figure 1. – Principe du nouvel opérateur : un estimateur de moyenne suivi d'un estimateur de variance.

par sa réponse impulsionnelle  $h_1(t)$  qui satisfait :

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_1(t) dt = 1 = H_1(0) \quad (1)$$

où  $H_1(f)$  est la transformée de Fourier de  $h_1(t)$ . La sortie de ce premier filtre donnée par :

$$\hat{\mu}(t) = (h_1 * x)(t) \quad (2)$$

est un estimateur de moyenne. La variance de  $\hat{\mu}(t)$  est donnée par :

$$Var[\hat{\mu}(t)] = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} h_1^2(\tau) d\tau \quad (3)$$

où  $\sigma^2$  est la variance du processus d'entrée.

On propose d'estimer cette variance de  $\hat{\mu}(t)$  sur un horizon de temps :

$$\hat{\sigma}_{\hat{\mu}}^2(t) = h_2(t) * [\hat{\mu}(t)]^2 - [h_2(t) * \hat{\mu}(t)]^2 \quad (4)$$

où  $h_2(t)$  est la réponse impulsionnelle d'un filtre linéaire et invariant.

Pour ne pas faire intervenir la moyenne dans (4), on exige la condition de normalisation :

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_2(t) dt = 1 \quad (5)$$

L'objectif est de choisir des filtres  $h_1(t)$  et  $h_2(t)$  tels que pour une entrée  $x(t)$  stationnaire,  $\hat{\mu}(t)$  prenne une valeur quasi-constante. En conséquence,  $\hat{\sigma}_{\hat{\mu}}^2(t)$  aura une valeur positive proche de zéro. Pour une entrée qui présente un changement de moyenne,  $\hat{\mu}(t)$  présente une transition et  $\hat{\sigma}_{\hat{\mu}}^2(t)$  augmente localement : on exploite alors la variation de  $\hat{\sigma}_{\hat{\mu}}^2(t)$ , qui traduit une mauvaise estimation locale de  $\hat{\mu}(t)$ , pour mettre en évidence la transition cherchée responsable de cet état de fait.

On cherche à réaliser les deux filtres  $h_1(t)$  et  $h_2(t)$ . Ici il n'est pas question de filtre optimal mais on cherche à rendre (3) minimal. Sous ces conditions, on obtient

$$h_1(t) = \frac{1}{L_1} \text{rect}\left(\frac{t}{L_1}\right) \quad (6)$$

où  $L_1$  désigne la longueur du filtre et  $\text{rect}(t)$  la fonction rectangulaire normalisée (centrée et de hauteur 1).

Si l'on attaque la deuxième partie de l'opérateur par un processus stationnaire  $x$  de variance  $\sigma_x^2$  et si  $\rho_x(\tau) = \delta(\tau)$ , le biais est donné par :

$$b = E[\hat{\sigma}_x^2(t) - \sigma_x^2] = -\sigma_x^2 \int_{-\infty}^{\infty} h_2^2(\tau) d\tau \quad (7)$$

Alors le choix d'un filtre  $h_2(t)$  tel que :

$$h_2(t) = \frac{1}{L_2} \text{rect}\left(\frac{t}{L_2}\right) \quad (8)$$

minimise la relation (7).

On précise ici que les choix des filtres  $h_1(t)$  et  $h_2(t)$  donnés en (6) et (8) correspondent à une solution possible mais qui n'est pas unique.

### 3. Réponses à quelques signaux non bruités

Dans cette section nous allons calculer théoriquement les performances de l'opérateur de ruptures, d'abord dans le cas général, puis dans le cas d'une entrée comportant des sauts. Nous en profiterons pour ajuster les paramètres de l'opérateur (durées  $L_1$  et  $L_2$ ) et du filtre de Canny-Deriché ( $\alpha$ ) afin qu'il présentent des performances comparables en sortie pour une entrée en échelon.

Notons dès à présent que, la sortie du nouvel opérateur est non-négative, contrairement aux filtres incluant un calcul de gradient.

#### 3.1. ÉTUDE DU SIGNAL DE SORTIE

Considérons le signal d'entrée  $x(t)$  comme la somme d'un signal utile déterministe (il s'agira d'un signal comportant une rupture) et d'un bruit, supposé stationnaire et de moyenne nulle, additif et non corrélé à  $s(t)$  :

$$x(t) = s(t) + n(t) \quad (9)$$

En repartant de (4) :

$$\hat{\sigma}_\mu^2(t) = \{h_2 * [h_1 * (s + n)]^2\}(t) - [h_2 * h_1 * (s + n)]^2(t) \quad (10)$$

Ce signal est évidemment rendu aléatoire par la présence de  $n(t)$ . Étudions le moment d'ordre 1. En développant (10) et en tenant compte de l'absence de corrélation entre  $n(t)$  et  $s(t)$ , et de la moyenne nulle de ce dernier, il vient :

$$\begin{aligned} E[\hat{\sigma}_\mu^2(t)] &= \{h_2 * (h_1 * s)^2\}(t) - [h_2 * h_1 * s]^2(t) \\ &\quad + E\{[h_2 * (h_1 * n)]^2\}(t) - [h_2 * h_1 * n]^2(t) \quad (11) \\ &= A[s](t) + B[n](t) \end{aligned}$$

où  $A[s](t)$  ne fait intervenir que le signal utile et  $B[n](t)$  n'est relatif qu'au bruit. Ces deux termes sont étudiés séparément ci-dessous :

a) Terme de bruit

En utilisant les relations (5) et (9) et en notant  $S_n(f)$  le spectre du bruit  $n(t)$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} B[n](t) &= E\{[h_2 * (h_1 * n)]^2\}(t) - [h_2 * h_1 * n]^2(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |H_1(f)|^2 (1 - |H_2(f)|^2) S_n(f) df \quad (12) \end{aligned}$$

Envisageons le cas limite où la durée  $L_1$  de la réponse impulsionnelle  $h_1(t)$  tend vers l'infini. Alors  $H_1(f)$  devient un Dirac et le terme de bruit  $B[n](t)$  s'annule car  $H_2(0) = 1$ . Dans ces conditions :

$$\lim_{L_1 \rightarrow \infty} E[\hat{\sigma}_\mu^2(t)] = A[s](t) = [h_2 * (h_1 * s)]^2(t) - (h_2 * h_1 * s)^2(t) \quad (13)$$

Ainsi, le fait d'allonger la durée  $L_1$  rend l'espérance de la sortie du nouvel opérateur moins sensible au bruit.

b) Terme lié au signal utile.

On peut préciser quelques propriétés du terme  $A[s](t)$  comme le *Décalage*, la *Multiplication par une constante* et la *Symétrie* :

$$A[s + c](t) = A[s](t) \quad \text{où } c \text{ est une constante arbitraire.} \quad (14)$$

$$A[k s](t) = k^2 A[s](t) \quad \text{où } k \text{ est une constante arbitraire.} \quad (15)$$

$$s(-t) = s(t) \Rightarrow A[s](-t) = A[s](t) \quad (16)$$

#### 3.2. RÉPONSE A DES SAUTS

Dans ce paragraphe nous allons étudier la réponse du nouvel opérateur à trois entrées comportant des sauts. Il s'agit tout d'abord d'un échelon idéal :

$$s_1(t) = u(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 & \text{pour } t > 0 \end{cases} \quad (17)$$

Ce cas idéal, ne se rencontrant pas dans la pratique, nous considérons aussi un échelon présentant une transition de largeur finie (durée  $d$ ).

$$s_2(t) = \begin{cases} 0 & t < -\frac{d}{2} \\ \frac{t}{d} + \frac{1}{2} & \text{pour } -\frac{d}{2} \leq t \leq \frac{d}{2} \\ 1 & t > \frac{d}{2} \end{cases} \quad (18)$$

Le dernier signal se compose d'un échelon idéal pondéré superposé à une rampe ( $c$  et  $k$  sont des constantes) :

$$s_3(t) = c u(t) + kt \quad (19)$$

Pour ces trois signaux d'entrée, nous comparons la réponse du nouvel opérateur avec celle de l'opérateur de Deriché. Les durées  $L_1$  et  $L_2$  et le paramètre sont ajustés pour que les réponses soient similaires lorsque l'entrée est un échelon idéal.

### 3.2.1. Échelon idéal

La réponse du nouvel opérateur dépend des valeurs relatives de  $L_1$  et  $L_2$ . Le résultat est résumé ci-après. Notons que les entrées n'étant pas bruitées, l'expression (11) donnant l'espérance de la sortie du nouvel opérateur se réduit au terme  $A[s](t) = A[s_1(t)] = A_1(t)$ . Notons également que la réponse peut être décrite grossièrement comme un pic centré sur le saut ( $t = 0$ ). Nous montrons un exemple pour les 3 cas possibles, c'est-à-dire pour  $L_2 > L_1$ ,  $L_2 = L_1$ ,  $L_2 < L_1$ .

a) si  $0 < \frac{L_1}{L_2} < 1$ ,

$$A_1(t) = \begin{cases} 0 & t \leq -\frac{1}{2}(L_1 + L_2) \\ \frac{1}{12L_1^2L_2^2} \left( \frac{L_1+L_2}{2} + t \right)^3 \left( \frac{5}{2}L_2 - \frac{3}{2}L_1 - 3t \right) & -\frac{1}{2}(L_1 + L_2) < t \leq -\frac{1}{2}(L_2 - L_1) \\ \frac{1}{4} - \frac{L_1}{6L_2} - \frac{t^2}{L_2^2} & -\frac{1}{2}(L_2 - L_1) < t \leq 0 \end{cases} \quad (20)$$

La hauteur du pic de détection est égale à  $H = \frac{1}{4} - \frac{L_1}{6L_2}$ . Cette hauteur prend ses valeurs dans l'intervalle  $]\frac{1}{2}, \frac{1}{4}]$  avec les limites suivantes :

$$\begin{cases} \lim_{L_1/L_2 \rightarrow 0} H = \frac{1}{4} \\ \lim_{L_1/L_2 \rightarrow 1} H = \frac{1}{12} \end{cases}$$

b) si  $\frac{L_1}{L_2} = 1$ ,

$$A_1(t) = \begin{cases} 0 & t \leq -L_1 \\ \frac{1}{12} \left( 1 + \frac{t}{L_1} \right)^3 \left( 1 - \frac{3t}{L_1} \right) & -L_1 < t \leq 0 \end{cases} \quad (21)$$

La hauteur du pic de détection est cette fois :

$$H = \frac{1}{12} \quad (22)$$

Elle est indépendante de la durée de la réponse impulsionnelle. En vertu de (15), cette hauteur croît comme le carré de l'amplitude de l'échelon.

c) si  $\frac{L_1}{L_2} > 1$

$$A_1(t) = \begin{cases} 0 & t \leq -\frac{1}{2}(L_1 + L_2) \\ \frac{1}{12L_1^2L_2^2} \left( \frac{L_1+L_2}{2} + t \right)^3 \left( \frac{5}{2}L_2 - \frac{3}{2}L_1 - 3t \right) & -\frac{1}{2}(L_1 + L_2) < t \leq -\frac{1}{2}(L_1 - L_2) \\ \frac{L_2^2}{12L_1^2} & -\frac{1}{2}(L_1 - L_2) < t \leq 0 \end{cases} \quad (23)$$

La forme du pic de détection s'apparente cette fois à un « plateau » de hauteur  $H = \frac{L_2^2}{12L_1^2}$  et de largeur au sommet  $L_1 - L_2$ .

En résumé, pour une entrée du nouvel opérateur simulant un changement idéal non bruité, tel que  $g(t) = c \cdot u(t) + c_0$ , où  $c$  et  $c_0$  sont des constantes réelles, la forme du pic de détection ne dépend que des paramètres  $c$ ,  $L_1$  et  $L_2$ . De plus, ce pic de détection est symétrique et monotone de part et d'autre de son maximum.

Parmi les trois réponses possibles de l'opérateur, le cas correspondant à  $\frac{L_1}{L_2} = 1$  constitue le cas préféré. En effet, dans ce cas la hauteur du pic de détection ne dépend que de l'amplitude de l'échelon et non des durées propres des filtres ( $L_1$  et  $L_2$ ). La position de la transition à détecter (saut de l'échelon) peut être estimée par le maximum du pic qui est aussi l'intersection avec l'axe vertical de symétrie (dans le cas théorique idéal, ces deux points sont confondus).

Si la transition est accompagnée d'un bruit, il peut être intéressant d'augmenter les durées des réponses impulsionnelles pour « lisser » ce bruit. Dans ce cas la résolution diminuera puisque la largeur du pic de détection augmente comme  $L_1 + L_2$ .

Venons en à l'opérateur de Deriche [8], attaqué par l'échelon idéal et notons  $\theta_1(t_0)$  sa sortie :

$$\theta_1(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) g(t_0 - t) dt \quad (24)$$

où  $g(t) = s \cdot t \cdot e^{-\alpha|t|}$  avec  $s = -\frac{(1-e^{-\alpha})^2}{e^{-\alpha}}$ .

A l'origine des temps on obtient la valeur maximale :

$$\theta_{1 \max} = \theta_1(0) = -\frac{s}{\alpha^2} \quad (25)$$

Notons que la réponse dépend du paramètre pour l'opérateur de Deriche et de  $L_1$  et  $L_2$  pour le nouvel opérateur. Par ailleurs le premier est de type RII tandis que le second est de type RIF.

Pour comparer valablement l'opérateur de Deriche et le nouvel opérateur, définissons une « largeur normalisée »  $L_{n,p}$  pour ces deux filtres : quotient de l'aire totale de la réponse à un échelon idéal par l'amplitude maximale de la réponse.

Pour le nouvel opérateur, et avec la condition  $L_1 = L_2 = L$  :

$$L_{n,p} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} A[u](t) dt}{H} = \frac{L_1}{15H} \quad (26)$$

Or  $H = \frac{1}{12}$  donc :

$$L_{n,p} = \frac{4}{5}L \quad (27)$$

Pour l'opérateur de Deriche, l'aire totale de la réponse (24) est :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta_1(t) dt = -\frac{4s}{\alpha^3} \quad (28)$$

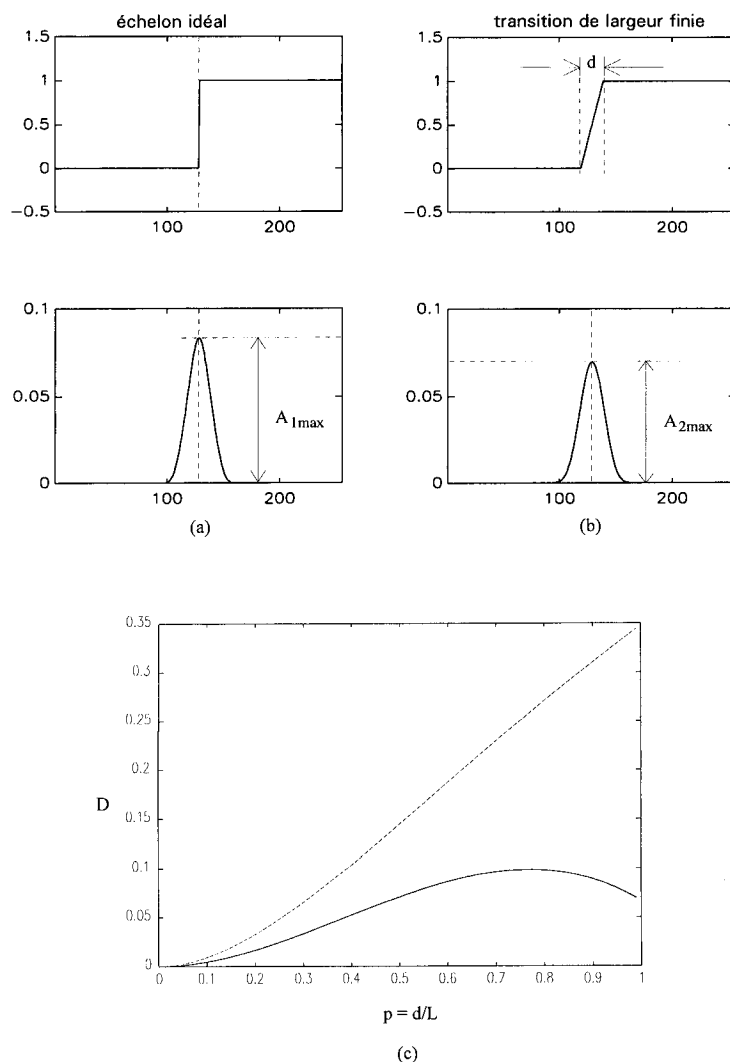


Figure 2. – a : Réponse de l'opérateur ( $A_{1\max}$ ) à un échelon idéal. b : Réponse de l'opérateur ( $A_{2\max}$ ) à une transition de largeur finie ( $d$ ). c : Diminution  $D$  de l'amplitude maximale de la réponse du filtre à une transition de largeur finie, en fonction de cette durée normalisée  $p$ . Trait plein : opérateur proposé; pointillés : opérateur de Deriche. La réponse du nouvel opérateur est moins sensible que l'opérateur de Deriche, à une augmentation de  $p$ .

D'où sa largeur normalisée en tenant compte de (25) et (28) :

$$L_{n,D} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \theta_1(t) dt}{\theta_1(0)} = \frac{4}{\alpha} \quad (29)$$

En égalant  $L_{n,p}$  et  $L_{n,D}$  on rend égales les largeurs normalisées des deux filtres pour une attaque en échelon idéal. De (27) et (29) on tire :

$$\alpha = \frac{5}{L} \quad (30)$$

C'est sous cette condition que seront menées les comparaisons qui suivent.

### 3.2.2. Échelon à transition de largeur finie

Répétons que l'échelon à transition de largeur finie  $s_2(t)$  est une approche plus réaliste d'une rupture, que l'échelon idéal (Fig.

2a et 2b). La réponse du nouvel opérateur se réduit là encore au terme  $A[s_2](t) = A_2(t)$ . Elle présente toujours un axe vertical de symétrie. Nous supposons que la durée  $d$  de la transition (cf. (18)) est inférieure à la durée  $L$  des réponses impulsionnelles du nouvel opérateur (c'est un cas fréquent en pratique).

La réponse  $A_2(t)$  a la forme d'un pic de largeur  $2L$ . En introduisant le paramètre  $p = \frac{d}{L}$ , la hauteur de ce pic  $A_2(0)$ , qui coïncide avec l'origine des temps, vaut :

$$A_{2\max} = \frac{1}{12} - \frac{1}{24}p^2 + \frac{13}{360}p^3 \quad (31)$$

Notons la valeur  $\frac{1}{12}$ , déjà trouvée, pour  $p = 0$  (échelon idéal) et la valeur approchée  $\frac{1}{13}$  quand  $p = 1$  (alors  $d = L$ ).

La réponse de l'opérateur de Deriche à l'entrée  $s_2(t)$ , présente une amplitude maximale pour l'instant origine (par rapport auquel

l'entrée présente une symétrie). Ce maximum est donné par :

$$\theta_2(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \{u(t) + q_d(t)\} g(-t) dt$$

avec

$$q_d(t) = \begin{cases} 0 & t < -\frac{d}{2} \\ \frac{t}{d} + \frac{1}{2} & -\frac{d}{2} \leq t < 0 \\ 0 & \text{pour } t = 0 \\ \frac{t}{d} - \frac{1}{2} & 0 < t \leq \frac{d}{2} \\ 0 & t > \frac{d}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \theta_{2 \max} &= \theta_2(0) \\ &= \theta_1(0) + \frac{s}{\alpha^2} \left\{ \left(1 + \frac{4}{\alpha d}\right) e^{-\frac{\alpha d}{2}} + \left(1 - \frac{4}{\alpha d}\right) \right\} \end{aligned} \quad (32)$$

L'examen des expressions (22) (31) et (25) (32) montre que l'amplitude de la réponse (pic) diminue quand on passe de l'échelon idéal à l'échelon à transition de largeur finie. Pour quantifier cette diminution, et comparer le nouvel opérateur et l'opérateur de Deriche, introduisons les facteurs  $D_p$  et  $D_D$  :

$$D_p = 1 - \frac{A_{2 \max}}{A_{1 \max}} = \frac{p^2}{2} - \frac{13p^3}{30} \quad (33)$$

où  $A_{1 \max}$  représente le maximum d'amplitude de la réponse à un échelon idéal et

$$D_D = 1 - \frac{\theta_{2 \max}}{\theta_{1 \max}} = (1 + e^{-\frac{5p}{2}}) + \frac{4}{5p} (e^{-\frac{5p}{2}} - 1) \quad (34)$$

Du fait de la valeur  $\frac{d}{L}$  de  $p$  et de la condition (30), on note que :

$$p = \frac{\alpha d}{5} < 1 \quad (35)$$

La figure 2c indique les évolutions de  $D_p$  et  $D_D$  en fonction du paramètre  $p$ . Il apparaît que la diminution de l'amplitude maximale de la réponse, consécutive à l'allongement de la durée du saut, est toujours plus importante pour l'opérateur de Deriche que pour le nouvel opérateur (toujours sous la condition (30)).

### 3.2.3. Échelon idéal et rampe

Le dernier signal  $s_3(t)$  (19) utilisé dans cette partie se compose d'un échelon idéal superposé à une rampe. Remarquons qu'il y a deux cas différents : le saut est dans le même sens que la rampe ( $ck > 0$ ) et le saut est dans le sens inverse de la rampe ( $ck < 0$ ). La réponse du nouvel opérateur se réduit toujours à  $A[s_3](t) = A_3(t)$ . Elle se présente toujours sous la forme d'un pic (éventuellement inversé) symétrique par rapport à son sommet mais superposé à un fond « continu » de valeur  $\frac{(kL)^2}{12}$ . L'amplitude à l'instant d'échelon est :

$$A_3(0) = \frac{1}{12} (kL + c)^2 \quad (36)$$

Pour l'opérateur de Deriche, il s'agit là encore d'un pic qui se superpose à un fond continu. Toujours à l'instant origine, la réponse est :

$$\theta_3(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \{c \cdot u(t) + kt\} g(-t) dt = c \cdot \theta_{1 \max} - \frac{4ks}{\alpha^3} \quad (37)$$

Dans la pratique, généralement on étudie séparément l'information d'amplitude et de phase de la réponse. Pour comparer les réponses du nouvel opérateur et de l'opérateur de Deriche, introduisons un indicateur de « contraste »  $I$  défini comme la différence de l'amplitude à l'instant d'échelon et du fond continu, divisé par ce fond continu. Pour le nouvel opérateur, d'après (36), l'indicateur de contraste  $I_p$  vaut :

$$I_p = \left(1 + \frac{c}{kL}\right)^2 - 1 \quad (38)$$

- si  $ck > 0, I_p > 0$ ;
- si  $ck < 0$  et  $L < -\frac{c}{2k}, I_p > 0$ ;
- si  $ck < 0$  et  $L \geq -\frac{c}{2k}, I_p \leq 0$ .

Pour l'opérateur de Deriche, nous obtenons (cf. (25) et (37)) :

$$\begin{aligned} I_D &= \frac{\theta_3(0) + \frac{4ks}{\alpha^3}}{-\frac{4ks}{\alpha^3}} = \frac{c\alpha}{4k} > 0 && \text{si } ck > 0 \\ I_D &= \frac{-\theta_3(0) + \frac{4ks}{\alpha^3}}{-\frac{4ks}{\alpha^3}} = -2 - \frac{c\alpha}{4k} > 0 && \text{si } ck < 0 \\ &&& \text{et } \alpha > -\frac{8k}{c} \\ I_D &= \frac{-\theta_3(0) + \frac{4ks}{\alpha^3}}{-\frac{4ks}{\alpha^3}} = -2 - \frac{c\alpha}{4k} \leq 0 && \text{si } ck < 0 \\ &&& \text{et } -\frac{8k}{c} \geq \alpha > -\frac{4k}{c} \\ I_D &= \frac{\theta_3(0) + \frac{4ks}{\alpha^3}}{-\frac{4ks}{\alpha^3}} = \frac{c\alpha}{4k} \leq 0 && \text{si } ck < 0 \\ &&& \text{et } \alpha \leq -\frac{4k}{c} \end{aligned} \quad (39)$$

La valeur de l'indicateur  $I$  dépend du paramètre  $\frac{c}{k}$  et de la largeur de l'opérateur, ainsi que le montre la figure 3. Dans le cas limite où  $ck < 0$ , ce contraste peut être négatif pour des opérateurs trop larges. D'une manière générale le contraste augmente quand la largeur de l'opérateur diminue. Il faut toutefois se rappeler que dans un cas réel, en présence de bruit, il faut augmenter cette durée. Il y a donc là un compromis à trouver.

En travaillant sous la condition (30) on constate que :

$$\begin{aligned} I_D &< I_p \quad \text{pour } ck > 0 \\ \text{ou pour } ck < 0 \text{ et } L &= \frac{5}{\alpha} \leq -\frac{8}{\sqrt{41 + 13k}} \frac{c}{k} \end{aligned} \quad (40)$$

Ainsi, selon le critère de contraste choisi et pour une attaque composée d'un échelon idéal superposé à une rampe, le nouvel opérateur a un meilleur comportement que l'opérateur de Deriche.

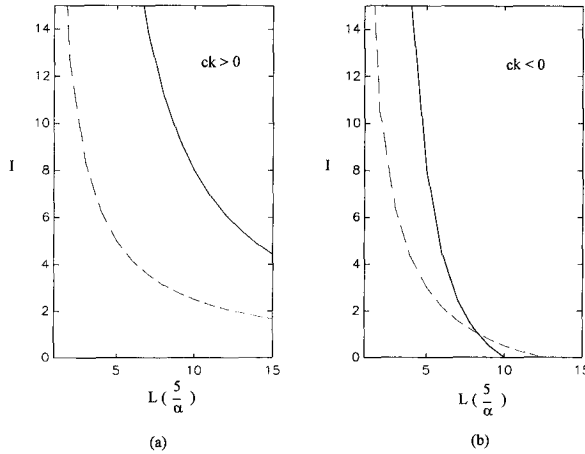


Figure 3. – Réponse de l'opérateur à un échelon idéal superposé à une rampe. Valeur de l'indicateur de contraste I en fonction des paramètres  $ck$  et  $L$  ou  $\alpha$  (voir texte). Trait plein : opérateur proposé; pointillés : opérateur de Deriche. (a) :  $ck > 0$ ; (b) :  $ck < 0$ . Le nouvel opérateur fournit dans la plupart des situations rencontrées un meilleur contraste I, que celui de Deriche.

## 4. Analyse théorique en présence de bruit

Dans cette section nous analysons le comportement du nouvel opérateur en présence de bruit. Écrivons la sortie  $\hat{\sigma}_{\mu}^2(t)$  du filtre de la manière suivante :

$$\hat{\sigma}_{\mu}^2(t) = y_s(t) + y_{s,n}(t) + y_n(t) \quad (41)$$

avec les termes :

$$\begin{aligned} y_s(t) &= [h_2 * (h_1 * s)^2](t) - [h_2 * h_1 * s]^2(t) \\ y_n(t) &= [h_2 * (h_1 * n)^2](t) - [h_2 * h_1 * n]^2(t) \\ y_{s,n}(t) &= 2[h_2 * ((h_1 * s)(h_1 * n))](t) \\ &\quad - 2[(h_2 * h_1 * s)(h_2 * h_1 * n)](t) \end{aligned}$$

qui correspondent respectivement à la contribution du signal, du bruit et au terme d'interaction entre le signal et le bruit.

On étudie le comportement de la composante aléatoire de la sortie du filtre en présence de bruit, à travers son énergie définie par :

$$\begin{aligned} E_{n,p} &= var[y_{s,n}(t) + y_n(t)] \\ &= var[y_{s,n}(t)] + var[y_n(t)] \\ &\quad + 2E[y_{s,n}(t)y_n(t)] - 2E[y_{s,n}(t)]E[y_n(t)] \end{aligned} \quad (42)$$

Les deux derniers termes de l'équation (42), faisant intervenir les moments d'ordre impair du processus  $n(t)$  s'annulent si  $n(t)$  est distribué de façon symétrique autour de 0. Nous supposons, pour la démonstration théorique suivante, que cette condition est vérifiée. Dans ce cas (42) devient :

$$E_{n,p} = var[y_{s,n}(t)] + var[y_n(t)] \quad (43)$$

On montre aisément que le premier terme  $var[y_{s,n}(t)]$ , est transitoire de longueur  $2L$  centré sur la position du contour. Quant au deuxième terme constant  $var[y_n(t)]$ , il fait intervenir les statistiques d'ordre 4. Nous pouvons en calculer la valeur sous l'hypothèse d'un bruit  $n(t)$  blanc gaussien de variance  $\sigma^2$  [annexe] :

$$var[y_n(t)] = \frac{4\sigma^4}{45L^2} \quad (44)$$

Compte tenu du caractère transitoire de  $var[y_{s,n}(t)]$ , nous définissons le rapport signal sur bruit à la sortie du filtre proposé comme :

$$\Sigma_P = \frac{y_s(0)}{\sqrt{var[y_n(t)]}} = \left(\frac{c}{\sigma}\right)^2 \frac{\sqrt{5}L}{8} \quad (45)$$

où  $c$  est la hauteur de l'échelon d'entrée.

De même, pour l'opérateur de Deriche, le RSB s'écrit :

$$\Sigma_D = \frac{c}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \quad (46)$$

On étudie les valeurs prises respectivement par  $\Sigma_P$  et  $\Sigma_D$  pour différents RSB, en fonction de la largeur  $L$  du filtre. Les résultats de la comparaison sont présentés sur la figure 4. On remarque que

- $\Sigma_P > \Sigma_D$ , lorsque  $L = \frac{5}{\alpha} > L_c$ ;
- $\Sigma_P = \Sigma_D = \frac{16\sqrt{5}}{25} \approx 1,43$  lorsque  $L = L_c$ ;
- $\Sigma_P < \Sigma_D$ , lorsque  $L < L_c$ ;

avec  $L_c = \frac{128\sigma^2}{25c^2}$ .

L'ensemble de ces résultats peut s'exprimer de la façon suivante :

$$\Sigma_P = 1,43\beta; \quad \Sigma_D = 1,43\sqrt{\beta} \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{L}{L_c} \quad (47)$$

ce qui entraîne :

$$\frac{\Sigma_P}{\Sigma_D} = \sqrt{\beta} \quad (48)$$

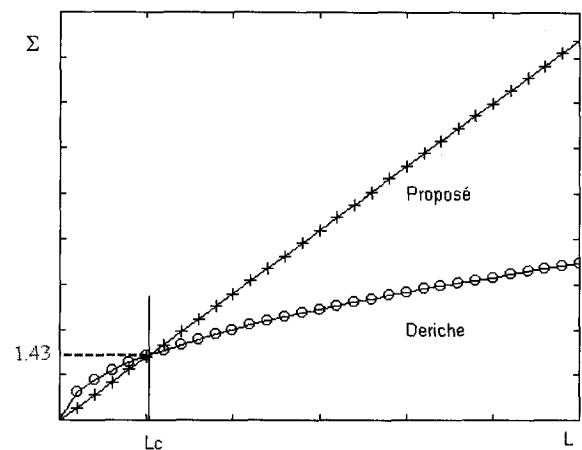


Figure 4. – RSB en fonction de la largeur des opérateurs : \* pour le nouvel opérateur, ° pour l'opérateur de Deriche.

| $c/\sigma = 5 ; L_c = 0,20$ |        |        |        | $c/\sigma = 1 ; L_c = 5,12$ |        |        |        |
|-----------------------------|--------|--------|--------|-----------------------------|--------|--------|--------|
| L                           | 11     | 21     | 51     | L                           | 11     | 21     | 51     |
| $\alpha$                    | 0,4545 | 0,2381 | 0,0980 | $\alpha$                    | 0,4545 | 0,2381 | 0,0980 |
| $\beta$                     | 53,71  | 102,54 | 249,02 | $\beta$                     | 2,15   | 4,10   | 9,96   |
| $\Sigma_p$                  | 76,86  | 146,74 | 356,37 | $\Sigma_p$                  | 3,07   | 5,87   | 14,25  |
| $\Sigma_D$                  | 10,48  | 14,49  | 22,59  | $\Sigma_D$                  | 2,10   | 2,90   | 4,52   |

Tableau I. – Valeurs théoriques comparées de  $\Sigma_p$  et  $\Sigma_D$  obtenues en présence de bruit blanc gaussien pour un fort RSB ( $\frac{c}{\sigma} = 5$ ) et un faible RSB ( $\frac{c}{\sigma} = 1$ ).

En conclusion, lorsque  $L < L_c$ , le rapport RSB de la sortie reste toujours très faible, inférieur à 1,43, quelque soit l'opérateur utilisé. En revanche, pour  $L > L_c$ , le nouvel opérateur présente toujours un meilleur RSB en sortie.

## 5. Réponses à quelques signaux bruités

Dans cette dernière section nous reprenons les trois signaux d'entrée de la section précédente mais cette fois en y ajoutant un bruit blanc gaussien de moyenne nulle. Le nouvel opérateur et l'opérateur de Deriche sont comparés. Trois durées de la réponse impulsionnelle  $L$  du nouvel opérateur sont examinées : 11 échantillons, 21 et 51. Comme la condition (30) est maintenue, le paramètre de l'opérateur de Deriche aura les valeurs correspondantes (0,4545 ; 0,2381 ; 0,0980). Ces paramètres sont résumés dans le tableaux I pour deux valeurs de RSB. On note que  $\Sigma_p$  est toujours supérieur à  $\Sigma_D$ .

### 5.1. ÉCHELON IDÉAL BRUITÉ

La figure 5a indique la forme du signal bruité. Le RSB est ici de 5. Les figures 5b, d, f donnent la réponse du nouvel opérateur avec les paramètres  $L = 11 ; 21 ; 51$  tandis que  $c, e$  et  $g$  donnent celle de l'opérateur de Deriche avec  $\alpha = 0,4545 ; 0,2381 ; 0,0980$ . On remarque que, dans ce contexte de fort RSB, le saut est bien mis en évidence par les deux algorithmes. On constate également que le nouvel opérateur est toujours moins sensible au bruit que l'opérateur de Deriche et cela confirme l'analyse théorique. Notons aussi qu'en augmentant la durée de la réponse impulsionnelle  $L$  l'amplitude du pic tend vers la valeur  $1/12$  déjà mise en évidence.

A la figure 6 le signal d'attaque est d'avantage noyé dans un bruit fort (Fig. 6a, RSB = 1). La détection du saut peut être considérée comme satisfaisante pour les plus grandes valeurs de  $L$  et les plus

petites valeurs de  $\alpha$  (Fig. 6f et 6g). Là encore le nouvel opérateur paraît mieux se comporter vis-à-vis du bruit que l'opérateur de Deriche.

### 5.2. ÉCHELON A TRANSITION DE LARGEUR FINIE, BRUITÉ

Dans le cas où le saut « idéal » précédent est remplacé par un saut de durée finie les conclusions sont similaires. La figure 7 résume les résultats pour une forte valeur du rapport signal à bruit (RSB = 5) et la figure 8 pour une faible valeur (RSB = 1). Naturellement on observe que les réponses diffèrent de celles obtenues avec l'échelon idéal surtout pour le fort rapport signal à bruit.

On constate toujours la nécessité d'avoir une durée de réponse impulsionnelle  $L$  suffisante (ou une petite valeur de  $\alpha$  pour l'opérateur de Deriche) pour obtenir une détection satisfaisante.

### 5.3. ÉCHELON IDÉAL ET RAMPE BRUITÉ

Sur les figures 9 et 10 sont résumés les résultats relatifs au dernier type de signal : un échelon idéal superposé à une rampe et du bruit. De nouveau nous observons une meilleure capacité de détection pour le nouvel opérateur, notamment pour un faible RSB (noter que la détection est déjà possible sur la figure 10d alors qu'elle ne l'est pas sur la figure 10e).

## 6. Conclusion

Dans ce travail nous avons développé un opérateur de rehaussement de rupture qui estime la variance de la moyenne glissante du signal étudié. Cet opérateur comporte deux filtres moyennés à réponse impulsionnelle rectangulaire et deux opérateurs quadratiques.



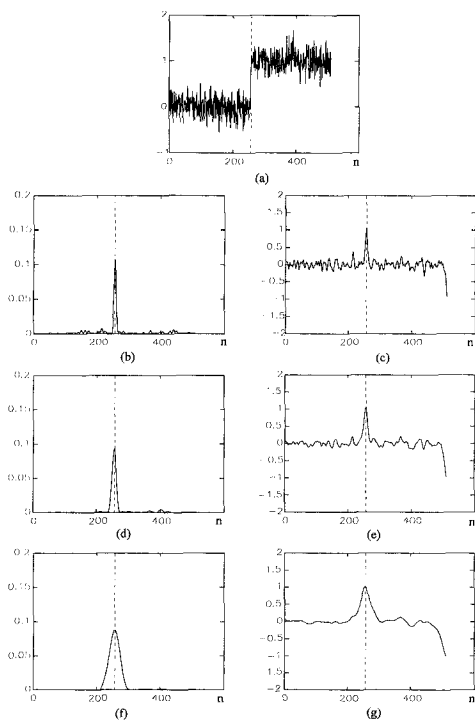


Figure 5. – Comparaison des réponses du nouvel opérateur (b) (d) (f) et de l'opérateur de Deriche (c) (e) (g) pour une entrée en échelon idéal bruité (a). Rapport signal à bruit : 5. Durée de la réponse impulsionnelle pour le nouvel opérateur : 11 (b), 21 (d), 51 (f). Valeur du paramètre  $\alpha$  pour l'opérateur de Deriche 0,4545 (c); 0,2381 (e); 0,0980 (g).

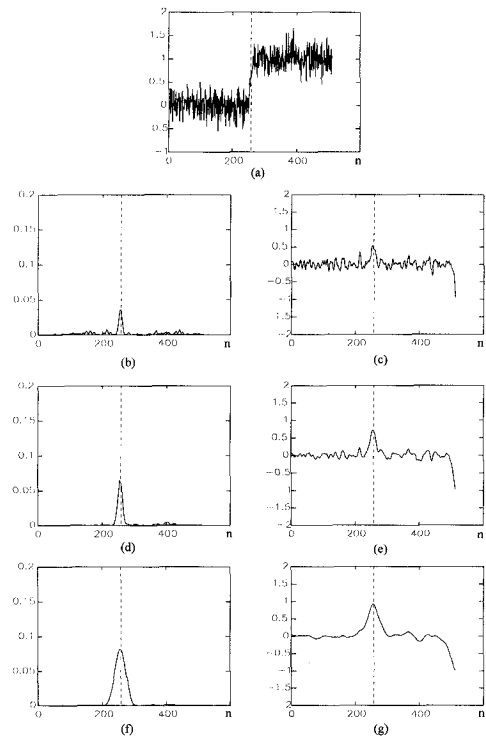


Figure 7. – Comparaison des réponses du nouvel opérateur (b) (d) (f) et de l'opérateur de Deriche (c) (e) (g) pour une entrée en échelon comportant un saut de durée finie (a). Rapport signal à bruit : 5. Durée de la réponse impulsionnelle du nouvel opérateur : 11 (b), 21 (d), 51 (f). Valeur du paramètre  $\alpha$  pour l'opérateur de Deriche 0,4545 (c); 0,2381 (e); 0,0980 (g).

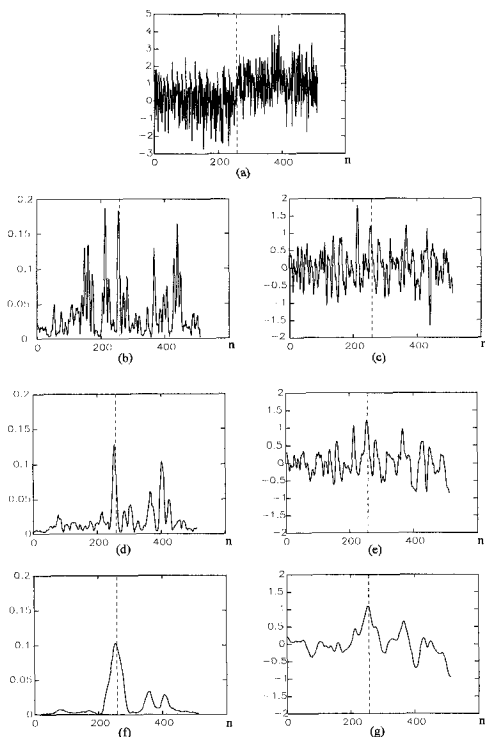


Figure 6. – Idem figure 5 mais rapport signal à bruit de 1.

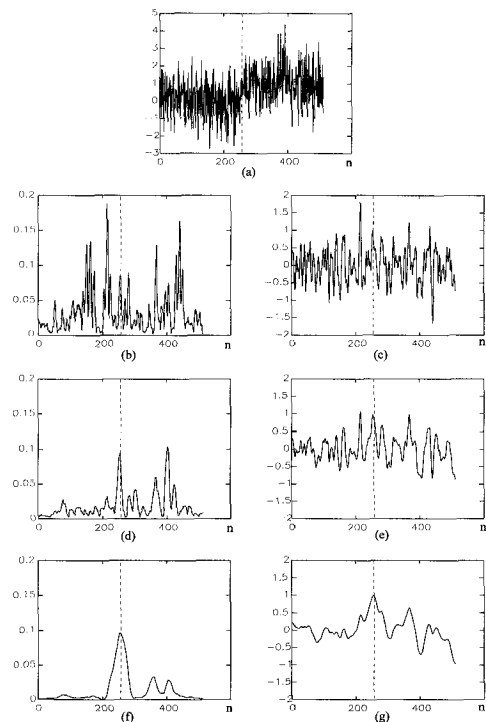
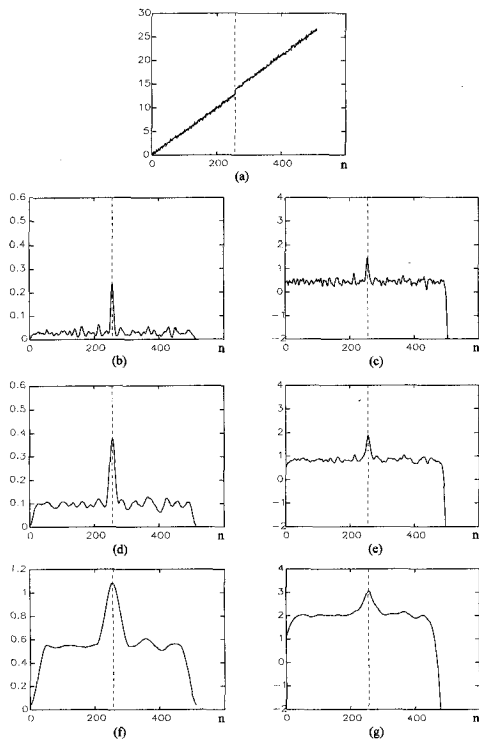


Figure 8. – Idem figure 7 mais rapport signal à bruit de 1.



**Figure 9.** – Comparaison des réponses du nouvel opérateur (b) (d) (f) et de l'opérateur de Deriche (c) (e) (g) pour une entrée en échelon idéal superposé à une rampe. Rapport signal à bruit : 5. Durée de la réponse impulsionnelle de l'opérateur : 11 (h), 21 (d), 51 (f). Valeur du paramètre  $\alpha$  pour l'opérateur de Deriche 0,4545 (c); 0,2381 (e); 0,0980 (g).

Le nouvel opérateur est comparé à l'opérateur de Deriche selon une procédure en deux temps. D'abord on attaque le nouvel opérateur et l'opérateur de Deriche par un échelon idéal et on ajuste les paramètres pour que les pics de détection fournis par les deux systèmes aient une largeur équivalente. C'est avec ce réglage qu'on poursuit alors la comparaison.

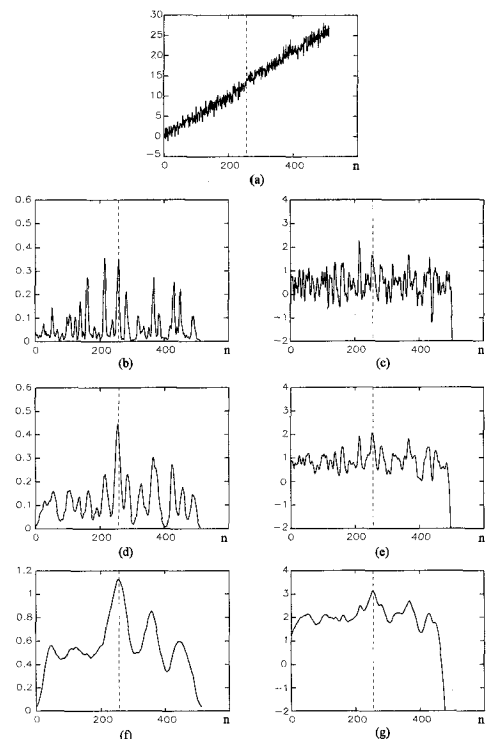
Cette comparaison s'effectue sur des signaux comportant des sauts, bruités ou non bruités. Dans tous les cas, théoriques ou simulés, la comparaison est à l'avantage du nouvel opérateur puisque les pics de détection sont toujours plus nets et d'amplitude relativement supérieure.

#### Remerciements

Ce travail a été partiellement soutenu par l'Union Européenne, dans le cadre du programme BIOMED1. Les auteurs tiennent à remercier J. AZENCOT pour son aide dans le démarrage de ce travail, dont ils précisent qu'elle est effectuée dans le cadre du Groupement de recherche « Traitement du signal et de l'image » GDR 134 du CNRS.

#### BIBLIOGRAPHIE

[1] M. BASSEVILLE, A. BENHALLAM, C. DONCARLI, M.F. LUCAS, D. DE BRUCQ, O. COLOT, H. RIX, E. THIERRY, F. KAUFFMANN,



**Figure 10.** – Idem figure 9 mais rapport signal à bruit de 1.

« Fiches d'algorithmes de segmentation des signaux », *Traitement du signal*, Vol. 9 supplément au N° 1, 1992, p. 115-147.

[2] D. V. HINKLEY, « Inference about the changepoint from cumulative sum tests », *Biometrika*, Vol. 58, 1971, p. 509-523.  
 [3] D. MARR and E.C. HILDRETH, « Theory of Edge Detection », *Proceedings of the Royal Society of London B*, 207, 1980, p. 187-217.  
 [4] J. CANNY, « A Computational Approach to Edge Detection », *IEEE, Trans. Pattern anal. Machine Intell.*, Vol. PAMI-8, N°6, Nov. 1986, p. 679-698.  
 [5] S. CASTAN, J. ZHAO et J. SHEN, « Une famille de détecteurs de contours basée sur le filtre exponentiel optimal », *AFCET RFIA89*, Paris, 1989, p. 23-36.  
 [6] J. SHEN and S. CASTAN, « Un nouvel algorithme de détection de contours », *Proceedings of 5th Conf on P.R.&A.I.*, Grenoble, 1985, p. 201-213.  
 [7] J. SHEN and S. CASTAN, « An optimal linear operator for Edge detection », *Proc. CVPR'86*, Miami, 1986, p. 109-114.  
 [8] R. DERICHE, « Détection optimale de contours avec une mise en oeuvre récursive », *Proc. du 11ième colloque GRETSI-NICE*, du 1er au 5 juin 1987, p. 483-486.  
 [9] R. DERICHE, « Fast Algorithms for Low-Level Vision », *IEEE, Trans. Pattern anal. Machine Intell.*, Vol. PAMI-12, N°1, Jan. 1990, p. 78-87.  
 [10] W.Y. LIU, I.E. MAGNIN, G. GIMENEZ, « A statistic based approach for segmentation », *14th ann. int. conf. of the IEEE/EMBS*, Paris, France, Oct. 29-Nov. 1, 1992, p. 1924-1925.  
 [11] W.Y. LIU, « Détection de rupture par mesure de non stationnarité locale : application à la segmentation de signaux multidimensionnels », *Thèse de doctorat : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon*, 1994, 256 pp.

## 7. Annexes

Soit :

$$y_n(t) = [h_2 * (h_1 * n)^2](t) - [h_2 * h_1 * n]^2(t)$$

On pose  $A = [h_2 * (h_1 * n)^2](t)$  et  $B = [h_2 * h_1 * n]^2(t)$ .

La variance de  $y_n(t)$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{Var}[y_n(t)] &= E[A - B]^2 - \{E[A - B]\}^2 \\ &= E[A]^2 + E[B]^2 - 2E[AB] - \{E[A - B]\}^2 \end{aligned}$$

On calcule ces 4 termes séparément :

$$\begin{aligned} 1) E[A]^2 &= E \left[ [h_2 * (h_1 * n)^2](t) \right]^2 \\ &= E \left\{ h_2(t) * \left( \int_{\tau_1} h_1(\tau_1) n(t - \tau_1) d\tau_1 \right)^2 \right\} \\ &= E \left[ \int \int \int h_1(\tau_1) h_1(\tau_2) h_2(\tau_3) n(t - \tau_3 - \tau_1) \right. \\ &\quad \left. n(t - \tau_3 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \right]^2 \\ &= \int \int \int \int \int \int h_1(\tau_1) h_1(\tau_2) h_2(\tau_3) h_1(\tau_4) h_1(\tau_5) \\ &\quad h_2(\tau_6) \cdot E [n(t - \tau_3 - \tau_1) n(t - \tau_3 - \tau_2) \\ &\quad n(t - \tau_6 - \tau_4) n(t - \tau_6 - \tau_5)] d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 d\tau_5 d\tau_6 \end{aligned}$$

En sachant que  $n(t)$  est un bruit blanc gaussien de moyenne nulle, le moment d'ordre 4 s'écrit :

$$\begin{aligned} E[x(k_1)x(k_2)x(k_3)x(k_4)] &= \sigma^4 \{ \delta(k_1 - k_2)\delta(k_3 - k_4) \\ &\quad + \delta(k_1 - k_3)\delta(k_2 - k_4) + \delta(k_1 - k_4)\delta(k_2 - k_3) \} \end{aligned}$$

où  $\sigma^2 = E[x^2]$ .

Ceci entraîne :

$$\begin{aligned} E[A]^2 &= \sigma^4 \int \int \int \int h_1^2(\tau_1) h_2(\tau_3) h_1^2(\tau_4) h_2(\tau_6) d\tau_1 d\tau_3 d\tau_4 d\tau_6 \\ &\quad + \sigma^4 \int \int \int \int h_1(\tau_1) h_1(\tau_4 + \tau_6 - \tau_3) h_2(\tau_3) \\ &\quad h_1(\tau_4) h_1(\tau_1 + \tau_3 - \tau_6) h_2(\tau_6) d\tau_1 d\tau_3 d\tau_4 d\tau_6 \\ &\quad + \sigma^4 \int \int \int \int h_1(\tau_1) h_1(\tau_5 + \tau_6 - \tau_3) h_2(\tau_3) \\ &\quad h_1(\tau_1 + \tau_3 - \tau_6) h_1(\tau_5) h_2(\tau_6) d\tau_1 d\tau_3 d\tau_4 d\tau_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sigma^4 \left[ \int_{\tau_1} h_1^2(\tau_1) d\tau_1 \right]^2 \left[ \int_{\tau_3} h_2(\tau_3) d\tau_3 \right]^2 \\ &\quad + 2\sigma^4 \int_{\tau_3} \int_{\tau_6} (h_1 * h_1)^2(\tau_6 - \tau_3) h_2(\tau_3) h_2(\tau_6) d\tau_3 d\tau_6 \\ &= \sigma^4 \left[ \int_{\tau_1} h_1^2(\tau_1) d\tau_1 \right]^2 \left[ \int_{\tau_3} h_2(\tau_3) d\tau_3 \right]^2 \\ &\quad + 2\sigma^4 \int (h_1 * h_1)^2(\tau) (h_2 * h_2)(\tau) d\tau \end{aligned}$$

pour  $h_1(t) = h_2(t) = \frac{1}{L} \text{rect} \left( \frac{t}{L} \right)$ ,

$$(h * h)(t) = \begin{cases} \frac{t}{L^2} + \frac{1}{L} & -L \leq t \leq 0 \\ -\frac{t}{L^2} + \frac{1}{L} & 0 < t \leq L \end{cases}$$

d'où  $E[A^2] = \frac{2\sigma^4}{L^2}$ .

2) De la même manière, on montre que :

$$E[B]^2 = E \left[ \int_{\tau_1} (h_2 * h_1)(\tau_1) n(t - \tau_1) d\tau_1 \right]^4 = \frac{4\sigma^4}{3L^2}$$

$$\begin{aligned} 3) E[AB] &= E \{ [h_2 * (h_1 * n)^2](t) [(h_2 * h_1 * n)^2](t) \} \\ &= \frac{2\sigma^4}{3L^2} + 2\sigma^4 \int_{\tau_3} h(\tau_3) (h * h * h)^2(\tau_3) d\tau_3 \end{aligned}$$

pour  $-\frac{L}{2} \leq |t| \leq 0$ , avec  $(h * h * h)(t) = \frac{1}{L} \left[ \frac{3}{4} - \frac{t^2}{L^2} \right]$ .

d'où

$$E[AB] = \frac{47\sigma^4}{30L^2}$$

$$4) E[A - B] = E[A] - E[B] = \frac{\sigma^2}{3L}$$

d'où

$$\{E[A - B]\}^2 = \frac{\sigma^4}{9L^2}$$

De 1), 2), 3), 4), on tire :

$$\text{Var}[y_n(t)] = \frac{4\sigma^4}{45L^2}$$

**LES AUTEURS**

**Wan Yu LIU**



Wan Yu Liu est né en 1964 à Harbin (Chine). Il est diplômé de l'Université Jiaotong de Shanghai (1981) en GBM et Docteur de l'INSA de Lyon (1994). Il est actuellement chercheur postdoctoral à CRÉATIS. Ses domaines de compétences sont le filtrage non linéaire, les statistiques d'ordres supérieures et la segmentation d'images.

**Gérard GIMENEZ**



Gérard Gimenez, docteur d'État (1978, Paris Sud Orsay), est professeur au département de Génie électrique de l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon. Il travaille à CRÉATIS depuis 1980 où il est particulièrement impliqué dans la R&D concernant les signaux et images ultrasonores.

**Isabelle E. MAGNIN**



Isabelle E. Magnin, Docteur d'État (1987, Insa-Lyon), est Directeur de Recherche de l'INSERM. Elle travaille au laboratoire CRÉATIS, URA CNRS 1216 affiliée à l'INSERM, depuis 1979. Membre actif du GDR TdSI, elle est particulièrement impliquée en traitement numérique du signal et de l'image : segmentation, reconstruction et modélisation.

*Manuscrit reçu 30 juin 1993, version révisée le 19 janvier 1995.*