Quelques représentations d'un polynôme et leurs applications en traitement du signal

Some polynomial representations and the associated applications

par Messaoud BENIDIR
Université de Paris-Sud, Laboratoire des signaux et systèmes, Supelec
Plateau de Moulon, 91192 Gif-sur-Yvette, France
Tél. : (1) 69 85 17 17   fax : (1) 69 41 30 60   e-mail = benidir@less.supelec.fr

résumé et mots clés

Nous exposons dans cet article trois représentations associées à un polynôme en donnant des algorithmes qui permettent de les déterminer ainsi que les principales applications associées. Les deux premières, sont en rapport direct avec l'étude de la stabilité des filtres dynamiques et la troisième avec l'analyse temps-fréquence des signaux à phase polynômiale.

Polynôme, filtre dynamique, stabilité, fraction continue, représentation en treillis, analyse temps-fréquence, fonction ambiguïté généralisée, Distribution de Wigner-Ville généralisée

abstract and key words

Three representations associated with a polynomial are presented, giving algorithms that allow us to determine them as well as the main associated applications. The first ones have a direct link with the study of the stability of linear filters and the third one with the time-frequency analysis of polynomial phase signals.

Polynomial, filter, stability, continued fraction, lattice representation, time-frequency analysis, generalized ambiguity function, generalized Wigner-Ville distribution.

1. introduction

Les polynômes jouent un rôle important dans les applications de l'ingénieur. En traitement du signal, un polynôme peut modéliser, par exemple, la fonction de transfert d'un filtre AR, d'un filtre MA, d'un filtre non linéaire etc... L'étude. L'étude à faire dépend souvent de la façon dont on représente le polynôme. En effet, un polynôme peut être représenté de différentes manières, soit par ses coefficients soit par ses racines, soit par un ensemble de coefficients appropriés... Parmi les représentations les plus connues en automatique et en traitement du signal, on peut citer la représentation en fraction continue et la représentation en treillis. On peut aussi représenter un polynôme par les coefficients qui interviennent dans sa décomposition sur un système formé de polynômes particuliers tels que les polynômes de Lagrange ou d'Hermite. D'une manière générale, une représentation est intéressante si un simple examen des coefficients qu'elle fait intervenir permet de répondre à des questions telles que la stabilité, la phase minimale, etc... Une représentation donnée peut ne pas exister pour un certain ensemble de polynômes qui seront alors dits singuliers pour la représentation considérée. La détermination d'une représentation se fait souvent à l'aide d'algorithmes récursifs. Par exemple, la représentation en fraction continue s'obtient à l'aide d'algorithmes du type Routh-Hurwitz et la représentation en treillis à l'aide d'algorithmes du type Schur-Cohn [1].

Ces deux représentations sont à la base de l'étude de la stabilité des systèmes linéaires, causaux, invariants dans le temps et dont la fonction de transfert est une fraction rationnelle. De plus, la représentation en fraction continue se prête à une interprétation physique bien connue en théorie des circuits [5] et la représentation en treillis est à la base de la construction récursive de filtres optimaux. Par exemple si les filtres sont donnés par leur représentation en treillis, le filtre optimal d'ordre $n+1$ s'obtient à partir du filtre optimal d'ordre n en optimisant simplement la nouvelle cellule et le contrôle de la stabilité se fait par simple examen des coefficients qui définissent la représentation [6]. L'étude de la stabilité des systèmes à temps continu (respectivement à temps discret) se déduit de celle de la position des zéros d'un polynôme par rapport à l'axe imaginaire (respectivement au cercle unité). La solution de ce problème est connue depuis fort longtemps : Hermite 1879, Routh 1877, Hurwitz 1895, Lienard-Chipart 1914, Schur 1918, Cohn 1922, Marden 1949, Jury 1962, ... [1] [2]. Mais ce thème a continué à poser certains problèmes qui ont fait l'objet de travaux plus récents et parmi les plus importants on peut citer ceux de Delsarte-Genin, de Bistritz, de Vaidyanathan-Mitra, de Benidir-Picinbono, de Barret-Benidir etc... [3]–[10].

Comme autre exemple de représentation d'un polynôme, on peut citer celle reliant les dérivées d'un polynôme ϕ et un ensemble de polynômes $\phi(t-t_k)$ où les t_k sont des paramètres arbitraires. Cette représentation a été introduite dans [11] [12] et utilisée dans l'analyse temps-fréquence des signaux à phase polynômiale.

Nous allons exposer dans la suite les trois représentations décrites ci-dessus en donnant les algorithmes qui permettent de les déterminer.

2. représentation en fraction continue et stabilité d'un filtre

2.1. représentation en fraction continue

Les algorithmes qui seront présentés dans cet article ont pour objectif de calculer de manière récursive à partir d'un polynôme donné de degré n une suite de n paramètres. Ces derniers constituent une représentation du polynôme considéré. Dans le cas continu, le principe consiste à associer à un polynôme $g(s)$ de degré n (supposé à coefficients réels), mis sous la forme

$$g(s) = r_n(s) + r_m(s), \quad m < n \tag{1}$$

où $r_n(s)$ et $r_m(s)$ sont ses parties paire et impaire de degrés n et m, une suite de polynôme

$$f_n, f_{n-1}, \cdots$$

vérifiant chacun $\deg(f_p) = p$ et l'identité suivante :

$$f_p(-s) = (-1)^p f_p(s) \quad \forall s. \tag{2}$$

Cette identité signifie que $f_p(s)$ ne comporte que des monômes de même parité que p et pour cette raison, tout polynôme vérifiant (2) sera appelé polynôme pair.impair (p.i).

Le premier polynôme est $f_n = r_n$, le deuxième est construit à partir de r_m et chaque polynôme $f_{p-1}(s)$ est construit à partir du reste $r_q(s)$ de la division euclidienne :

$$f_{p+1}(s) = \alpha_{p+1}\, f_p(s) + r_q(s), \quad q < p \tag{3}$$

de $f_{p+1}(s)$ par $f_p(s)$ selon une règle qui sera précisée dans la suite. On peut vérifier facilement que $r_q(s)$ est un polynôme p.i dont le degré q est de même parité que $p+1$. On commence par le cas, dit régulier, où $m = n-1$ et $q = p-1$ à chaque étape de l'algorithme. Dans ce cas, on a $f_{p-1} = r_q$ et l'algorithme se réduit à la récurrence d'ordre trois suivante :

$$f_{p+1}(s) = \alpha_{p+1}\, s\, f_p(s) + f_{p-1}(s). \tag{4}$$

Les paramètres $\alpha_p, p = n, n-1, \ldots, 1$, ainsi construits définissent la représentation en fraction continue du polynôme $g(s)$ donnée par :

$$\frac{r_n(s)}{r_m(s)} = \alpha_n\, s + \cfrac{1}{\alpha_{n-1}\, s + \cfrac{1}{\alpha_{n-2}\, s + \cfrac{1}{\ldots + \alpha_1 s}}}. \tag{5}$$

En effet, (4) conduit immédiatement à

$$\frac{f_{p+1}(s)}{f_p(s)} = \alpha_{p+1}\, s + \frac{f_{p-1}(s)}{f_p(s)} \tag{6}$$

et l'itération de cette relation conduit à (5). A titre d'exemple, pour $n = 4$, on obtient :

$$H(s) \triangleq \frac{r_4(s)}{r_3(s)} = \alpha_4\, s + \cfrac{1}{\alpha_3\, s + \cfrac{1}{\alpha_2\, s + \cfrac{1}{\alpha_1\, s}}}. \tag{7}$$

Dans le cas discret, la variable s est remplacée par $(1+z)/(1-z)$ et par transformation homographique polynomiale, on obtient des algorithmes qui permettent d'associer à un polynôme de la variable z une suite de polynômes $F_p(z)$ autoréciproques, c'est-à-dire vérifiant l'identité suivante :

$$F_p(z) = z^p \overline{F}_p(z^{-1}) \quad \forall z \tag{8}$$

où $\overline{F}_p$ est le polynôme obtenu en conjuguant les coefficients de F_p. Partant d'un polynôme $G(z)$, mis sous la forme :

$$G(z) = R_n(z) + (1-z) R_m(z) \tag{9}$$

où $R_n(z)$ et $R_m(z)$ sont des polynômes autoréciproques, on construit une suite de polynômes F_p reliés par :

$$F_{p+1}(z) = \nu_p(1+z)F_p(z)[1-z]^2F_{p-1}(z) \quad (10)$$

et une suite de coefficients ν_p, $p = 1, 2, \ldots, n$. Ces coefficients, calculés directement à partir de $G(z)$, définissent la représentation en fraction continue de $G(z)$ donnée par :

$$\frac{F_n(z)}{F_{n-1}(z)} = \nu_n \frac{1+z}{1-z} + \cfrac{1}{\nu_{n-1}\frac{1+z}{1-z} + \cfrac{1}{\nu_{n-2}\frac{1+z}{1-z} + \cfrac{1}{\ldots + \nu_1 \frac{1+z}{1-z}}}}. \quad (11)$$

Proposition 1 : Polynômes de Hurwitz et de Schur Le polynôme $g(s)$ a toutes ses racines à partie réelle négative (polynôme de Hurwitz) si et seulement si (ssi) la fraction rationnelle associée à ce polynôme admet un développement en fraction continue comportant n coefficients α_n, α_{n-1}, ..., α_1 tous strictement positifs.

Le polynôme $G(z)$ a toutes ses racines à l'intérieur du cercle unité (polynôme de Schur) ssi la fraction rationnelle associée à ce polynôme admet un développement en fraction continue comportant n coefficients ν_n, ν_{n-1}, ..., ν_1 tous strictement positifs.

2.2. stabilité des filtres à temps continu

Nous allons donner différents énoncés du critère de stabilité d'un filtre linéaire, chacun étant fondé sur des concepts adaptés à une application spécifique. Pour les démonstrations et pour plus de détails, on peut consulter les références [9] [13]. Posons $f_p(s) = a_p^p s^p + a_{p-1}^p s^{p-2} + \ldots, p = n, n-1, \ldots, 0$, et associons à chaque polynôme f_p, la ligne

$$R_p \; : \; a_p^p \quad a_{p-1}^p \quad \ldots \quad (12)$$

L'écriture de toutes les lignes $R_n, R_{n-1}, \ldots$, l'une à la suite de l'autre conduit à un tableau triangulaire connu sous la dénomination *table de Routh* et on a le résultat suivant.

Stabilité et Table de Routh

Le polynôme $g(s)$ est de Hurwitz ssi la première colonne de la table de Routh associée à $g(s)$ comporte $n+1$ coefficients a_n^n, $a_{n-1}^{n-1}, \ldots, a_0^0$ et que ces coefficients sont tous non nuls et de même signe, i.e, $\alpha_p = a_p^p/a_{p-1}^{p-1} > 0$ pour $p = n, n-1, \ldots, 1$.

Une fraction rationnelle $H(s)$ est dite « sans perte » si elle satisfait les 3 propriétés suivantes :

$$H(s) \quad \text{est irréductible} \quad (13)$$

$$\mathrm{Re}[H(j\omega)] = 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (14)$$

$$\mathrm{Re}[H(s)] > 0 \quad \forall s \text{ tel que } \mathrm{Re}[s] > 0. \quad (15)$$

La fonction $H(j\omega)$ est évidemment la réponse en fréquence du filtre linéaire de fonction de transfert $H(s)$ et (14) signifie que la partie résistive est nulle ou que le filtre est purement réactif (sans perte). Par exemple, si $H(s)$ est une fraction impaire à coefficients réels, elle est sans perte *si* elle vérifie les deux conditions (13) et (15).

Stabilité et fonction sans perte

Les 3 propositions suivantes sont équivalentes.

1) Le polynôme $g(s) = r_n(s) + r_m(s)$ est de Hurwitz.

2) La fraction rationnelle $\frac{r_n(s)}{r_m(s)}$ est sans perte.

3) On a $m = n - 1$ et si $r_q(s)$ et α_n sont définis par (3), alors la fraction $\frac{r_m(s)}{r_q(s)}$ est sans perte et le nombre α_n est strictement positif.

Cette propriété est à la base du développement en fraction continue associé à un polynôme de Hurwitz introduit ci-dessus.

Stabilité et propriété d'entrelacement des zéros

Le polynôme $g(s)$ est de Hurwitz ssi les α_p sont tous strictement positifs et toutes les racines des polynômes $r_n(s)$ et $r_m(s)$ sont simples, distinctes, situées sur l'axe imaginaire et lorsqu'on parcourt cet axe, on rencontre ces racines de façon alternative.

Associons au polynôme :

$$g(s) \triangleq \sum_{i=0}^{n} a_i s^{n-i}, a_0 \triangleq -1 \quad (16)$$

sa matrice compagnon :

$$\mathcal{G} \triangleq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots \\ \ldots & & \ldots & \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix} \quad (17)$$

dont le déterminant est donné par :

$$\det(\mathcal{G} - sI) = g(s). \quad (18)$$

Stabilité et matrice définie positive

Les 3 propriétés suivantes sont équivalentes.

1) Le polynôme $g(s)$ est de Hurwitz.

2) Pour toute matrice Q définie positive, l'équation matricielle

$$\mathcal{G}^\dagger P + P\mathcal{G} = -Q \quad (19)$$

admet au moins une solution P définie positive. Cette solution est alors unique.

3) Il existe une matrice P définie positive vérifiant l'équation

$$\mathcal{G}^\dagger P + P\mathcal{G} = -I. \quad (20)$$

2.3. position des zéros par rapport à l'axe imaginaire

Nous allons présenter des algorithmes qui généralisent le calcul des coefficients α_p au cas d'un polynôme quelconque (pas forcément de Hurwitz). L'examen de ces coefficients permet alors de déterminer la position des zéros de ce polynôme par rapport à l'axe imaginaire. Ces algorithmes, fondés sur la division euclidienne, sont des extensions de la méthode de Routh introduite en 1877 et permettent d'associer à un polynôme de degré n une suite de $n+1$ polynômes p.i f_p. Les coefficients a_p^p des termes de plus haut degré de ces polynômes sont reliés aux α_p par $\alpha_p = a_p^p/a_{p-1}^{p-1}$ et vérifient la propriété suivante.

Proposition 2 [7]. Le nombre de zéros du polynôme g, tenant compte de leurs multiplicités, qui sont à partie réelle positive est donné par

$$n^+(g) = V(a_n^n,\ a_{n-1}^{n-1}, \dots, a_0^0) \tag{21}$$

où le second membre désigne le nombre de variations de signe dans la suite : $a_n^n,\ a_{n-1}^{n-1}, \dots, a_0^0$ qui constitue la première colonne de la table de Routh associée à g.

Table de Routh classique

L'algorithme de Routh comporte trois cas selon le degré q du reste f_q de la division de f_{p+1} par f_p.

1) Si $q = p-1$, on prend $f_{p-1} \triangleq r_q$.

2) Si $r_q = 0$, on prend f_{p-1} égal à la dérivée de f_p.

3) Si $q < p-1$, on prend $f_{p-1} = \epsilon s^{p-1} + r_q$, où ϵ est un paramètre arbitraire voisin de zéro, on effectue un développement limité au voisinage de $\epsilon = 0$ et on se limite à la partie principale pour chaque terme dépendant de ϵ. On continue la construction de la table en introduisant éventuellement d'autres paramètres arbitraires.

Cet algorithme permet d'associer à tout polynôme g une suite : $a_n^n,\ a_{n-1}^{n-1}, \dots, a_0^0$ et on a longtemps énoncé la propriété (21). Ce résultat s'est finalement avéré faux pour toute une classe de polynômes qui nécessitent l'introduction de paramètres arbitraires. Le polynôme :

$$g(s) = (s^6 + 3s^4 + 3s^2 + 1) + (s^5 + 3s^3 + 2s) \tag{22}$$

illustre cette situation. En effet, la première colonne de la table de Routh associée à ce polynôme est donnée par :

$$C_1 = [1, 1, \epsilon, 3 - 1/\epsilon, -\epsilon, 1] \tag{23}$$

où ϵ est un paramètre arbitraire. Le nombre de changements de signe dans cette colonne est 2 si $\epsilon < 0$ et 4 si $\epsilon > 0$. Donc $n^+(g)$ reste indéterminé.

Table de Routh complétée

[7] On n'introduit plus de paramètre arbitraire. Soit A la ligne associée à r_q et h le nombre des premières colonnes de A formées par des zéros. On construit la ligne R_{p-1} comme suit.

1) Décaler les éléments de $(-1)^h A$ de h positions vers la gauche pour obtenir une ligne intermédiaire B :

$$B\ :\ (-1)^h a_{p-h-1}^{p-1} \quad (-1)^h a_{p-h-2}^{p-1} \quad \dots \tag{24}$$

2) Additionner colonne par colonne les lignes A et B pour obtenir la ligne R_{p-1} :

$$R_{p-1}\ :\ a_{p-1}^{p-1} \quad a_{p-2}^{p-1} \quad \dots \tag{25}$$

Cette procédure, plus simple que celle de Routh, associe à un polynôme quelconque de degré n un tableau ayant $n+1$ lignes $R_n, R_{n-1}, \dots, R_0$ et possédant la propriété (21). A titre d'exemple, la table associée au polynôme (22) s'obtient comme suit.

R_6	:	1	3	3	1	
R_5	:	1	3	2		
A	:	0	1	1		On a $h=1$
B	:	-1	-1			Obtenue en décalant $-$ A d'une position
R_4	:	-1	0	1		Obtenue en calculant A + B
R_3	:	3	3			
R_2	:	1	1			
A	:	0				Prendre la déerivée de R_2
R_1	:	2				
R_0	:	1				

D'où $n^+(g) = V(1, 1, -1, 3, 1, 2, 1) = 2$.

Table de Routh généralisée

On considère maintenant directement des polynômes à coefficients complexes. Tout polynôme de degré n peut s'écrire d'une manière unique sous la forme

$$g(s) \triangleq a(s) - jb(s) \tag{26}$$

où $a(s)$ et $b(s)$ sont des polynômes réels non identiquement nuls, non forcément p.i et de degrés respectifs d_n et $d_{n-1} < d_n$.

Proposition 3 [13]. Soient a_n et a_{n-1} les coefficients des termes de plus haut degré dans $a(s)$ et $b(s)$ respectivement. Soient $q(s)$ et $r(s)$ deux polynômes réels et $p(s)$ un polynôme vérifiant $p(s) > 0, \forall s \in \mathbb{R}$ tels que

$$a(s) = q(s)b(s) - p(s)r(s),\ \ d^o q = d_n - d_{n-1},\ \ d^o r \leq d_{n-1}. \tag{27}$$

Alors pour tout polynôme $c(s)$ vérifiant $c(s) > 0, \forall s \in \mathbb{R}$, les nombres $m^+(g)$ et $m^0(g)$ de racines de g à partie imaginaire positive et nulle sont donnés par :

$$m^+(a - jb)$$
$$= m^-(b - jcr) + \frac{1}{2}\{d_n - d_{n-1} - \frac{1 - (-1)^{d_n - d_{n-1}}}{2}\mathrm{sgn}(a_n a_{n-1})\}.t \tag{28}$$

$$m^0(a - jb) = m^0(b - jcr) \tag{29}$$

Algorithme

Conditions initiales : Parties réelle et imaginaire a et b de g.
Construire f_{i-1} à partir de f_i, f_{i+1} et du polynôme r introduit par (27) comme suit :

$$f_{i-1} = r \quad \text{si} \quad r \neq 0 \tag{30}$$
$$= f_i' \quad \text{si} \quad r = 0. \tag{31}$$

Le premier f_ℓ égal à une constante non nulle termine la construction de la suite.

Cet algorithme permet d'associer à tout polynôme g de degré n une suite de polynômes réels

$$S(g) = \{f_n, f_{n-1}, \ldots, f_\ell\} \quad \text{avec} \quad d^o f_\ell = 0 \tag{32}$$

où l'indice i ne représente pas forcément le degré de f_i et on a [13]

$$2m^+(g) = \sum_{i=l}^{n-1} d_{i+1} - d_i - \frac{1-(-1)^{d_{i+1}-d_i}}{2}\mathrm{sgn}(a_{i+1}a_i). \tag{33}$$

Dans la majorité des cas, la suite des degrés des polynômes f_i est donnée par $(n, n-1, \ldots, 0)$ et le nombre de variations de signe dans $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ vaut :

$$m^-(g) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2}\{1 - \mathrm{sgn}(a_{i+1}a_i)\}. \tag{34}$$

Si l'on choisit par exemple, $q(s) = \alpha s + \beta$ et $p(s) = 1 + \tau^2 s^2$, la relation (27) devient

$$a(s) = (\alpha s + \beta)b(s) - (1 + \tau^2 s^2)r(s) \tag{35}$$

et la détermination de α, β et $r(s)$ se fait en choisissant des valeurs particulières pour τ. Ce choix conduit à une famille d'algorithmes qui généralisent celui fondé sur la division euclidienne.

2.4. position des zéros par rapport au cercle unité

Dans cette partie, on va utiliser la transformation homographique pour transposer vers les systèmes à temps discret les algorithmes du type Routh exposés précédemment. Ainsi on pourra étudier la position des zéros d'un polynôme par rapport au cercle unité. Soit la transformation qui à tout polynôme g de degré non supérieur à n, associe le polynôme défini par

$$G(z) \triangleq (j - jz)^n g\left(\frac{z+1}{j-jz}\right) \triangleq A_n z^n + \ldots + A_0. \tag{36}$$

Réciproquement :

$$g(s) = 2^{-n}(s-j)^n G\left(\frac{s+j}{s-j}\right) \triangleq a_n s^n + \ldots + a_0 \triangleq \mathcal{H}_n(G) \tag{37}$$

et les coefficients A_n et a_n sont reliés par :

$$a_n = 2^{-n}G(1) \quad \text{et} \quad A_n = (j)^{-n}g(j). \tag{38}$$

Tout polynôme de degré n peut se mettre de manière unique sous la forme

$$G(z) = A(z) - j(j - jz)^k z^h B(z), \quad B(0)B(1) \neq 0 \tag{39}$$

où h, k sont des entiers non négatifs et

$$A(z) = \frac{1}{2}[G(z) + G^*(z)]. \tag{40}$$

Algorithme

Conditions initiales : $F_n = A, F_{n-1} = B$

Le polynôme F_{p-1} est déterminé à partir de F_p, F_{p+1} comme suit.

i) Construire deux polynômes Q et R vérifiant :

$$F_{p+1}(z) = Q(z)F_p(z) - (j - jz)^k z^h R(z), \quad R(0)R(1) \neq 0. \tag{41}$$

ii) Prendre

$$F_{p-1} = R \quad \text{si } R \neq 0 \tag{42}$$
$$= pQ(z) + (1-z)Q(z)' \quad \text{si } R = 0.$$

L'algorithme s'arrête avec le premier polynôme F_ℓ de degré 0.

Cet algorithme associe à tout polynôme G une suite

$$\Sigma(G) = \{F_n, F_{n-1}, \ldots, F_\ell\} \text{ avec } d^o F_\ell = 0 \tag{43}$$

de polynômes réels F_p, calculés à partir de $A(z)$ et $B(z)$.

Proposition 4 Le nombre de zéros de G situés à l'extérieur du cercle unité est donné par

$$2n_e(G) = \sum_{i=l}^{n-1} d_{i+1} - d_i - \frac{1-(-1)^{d_{i+1}-d_i}}{2}\mathrm{sgn}[F_{i+1}(1)F_i(1)]. \tag{44}$$

Dans la majorité des cas la suite des degrés est donnée par $(n, n-1, \ldots, 0)$. Dans ce cas, la relation (44) s'écrit

$$n_e(G) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2}\{1 - \mathrm{sgn}[F_{i+1}(1)F_i(1)]\} \tag{45}$$

où le membre de droite représente le nombre de variations de signe dans la suite des coefficients $\{F_n(1), F_{n-1}(1), \ldots, F_0(1)\}$. Si l'on prend dans (41) $Q(z) = (\nu z + \overline{\nu})$, où $\overline{\nu}$ désigne le complexe conjugué de ν, le polynôme R est alors autoréciproque et on peut le choisir pour obtenir la relation

$$F_1(z) = (\nu z + \overline{\nu})F_2(z) - [2z - \rho(z^2+1)]z^h R(z), \quad R(0)R(1) \neq 0. \tag{46}$$

Si G est à coefficients réels, il en est de même pour F_p et F_{p-1} et pour le coefficient ν_p défini par (46). On obtient :

$$F_p(z) = \nu_p(z+1)F_{p-1}(z) + [2z - \rho(z^2+1)]z^h R(z). \tag{47}$$

Dans ce cas, les polynômes $A(z)$ et $B(z)$ sont autoréciproques et si l'on utilise la relation :

$$F_p(z) = \nu_p(z+1)F_{p-1}(z)+[2z-\rho(z^2+1)]F_{p-2}(z), \quad \rho \in [0,1] \tag{48}$$

pour construire la suite $\Sigma(G)$, alors la proposition 1 est vraie pour les nu_p ainsi construits. On obtient une décompositions en fraction continue généralisée. Par exemple, pour $\rho = 1$, on a la décomposition introduite par (11) et pour $\rho = 0$ celle donnée dans [4].

3. représentation en treillis et stabilité

3.1. représentation en treillis

La représentation en treillis d'un polynôme de degré n et dont le coefficient du terme de plus haut degré est égal à 1, appelé polynôme unitaire, consiste à définir ce dernier à partir d'un ensemble de n coefficients k_j appelés coefficients de réflexion. Le polynôme P_n est construit à partir d'un vecteur $\mathbf{k}_n \triangleq (k_1, k_2, \ldots, k_n)^T$ à l'aide de la récurrence polynomiale :

$$P_{j+1}(z) = zP_j(z) - k_{j+1}P_j^*(z), \quad P_0 = P_0^* = 1 \tag{49}$$

où P_j^* désigne le polynôme réciproque de P_j défini par :

$$P_j^*(z) \triangleq z^j \overline{P}_j(z^{-1}) \tag{50}$$

et $\overline{P}_j$ le polynôme obtenu en conjuguant les coefficients de P_j. Cet algorithme, dénommé classiquement algorithme de Levinson, définit donc une application de $\mathbb{C}^n$ dans l'ensemble des polynômes unitaires de degré n. On notera

$$P_n \triangleq \mathcal{T}(\mathbf{k}_n) \tag{51}$$

et on dira que P_n est défini par sa représentation en treillis. Par exemple, le polynôme $\mathcal{T}(\mathbf{k}_3)$ peut être représenté soit par ses coefficients classiques soit par les coefficients de réflexion k_i comme suit :

$$\begin{aligned} P_3(z) &= z^3 - a_1^3 z^2 - a_2^3 z - a_3^3 \\ &= z^3 - (k_1 - k_2\overline{k}_1 - k_3\overline{k}_2)z^2 \\ &\quad -(k_2 - k_3\overline{k}_1 + k_1\overline{k}_2 k_3)z - k_3. \end{aligned} \tag{52}$$

Par identification, on voit que les coefficients de $P_3(z)$ sont des polynômes des k_i, $\overline{k}_i$, $1 \leq i \leq 3$. Quelques propriétés de $\mathcal{T}$ sont proposées dans [13] et nous nous limitons à donner ici une généralisation de (52) au cas d'un polynôme de degré n quelconque. Pour cela, introduisons les fonctions suivantes

$$G_n^p(z) \triangleq \sum_{n \geq i_1 > \ldots > i_p \geq 1} k_{i_1}\overline{k}_{i_2}k_{i_3}\overline{k}_{i_4}\ldots k_{i_p} z^{e_p}, \quad 1 \leq p \leq n, \tag{53}$$

où

$$e_p \triangleq i_1 - i_2 + i_3 \ldots + (-1)^p i_p. \tag{54}$$

On peut vérifier que les G_n^p sont des polynômes de la variable z. Pour $n = 3$, on obtient :

$$\begin{aligned} G_3^1(z) &= k_1 z + k_2 z^2 + k_3 z^3 \\ G_3^2(z) &= (k_2\overline{k}_1 + k_3\overline{k}_2)z + k_3\overline{k}_1 z^2 \\ G_3^3(z) &= k_3\overline{k}_2 k_1 z^2. \end{aligned} \tag{55}$$

Proposition 5 1) Les G_n^p, considérées comme fonctions des variables $k_1, \ldots, k_n, \overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n$, sont des polynômes homogènes de degré total p et de degré partiel 1.

2) Ces polynômes vérifient les relations de récurrence suivantes.

$$G_{n+1}^{n+1}(z) = k_{n+1} z [G_n^n]^*(z) \tag{56}$$

$$G_{n+1}^{p+1}(z) = G_n^{p+1}(z) + k_{n+1} z \tilde{G}_n^p(z). \tag{57}$$

3) Pour tout polynôme $P_n = \mathcal{T}(\mathbf{k}_n)$, on a

$$P_n(z) = z^n \sum_{p=0}^{n} (-1)^p G_n^p(z^{-1}), \quad G_n^0 = 1. \tag{58}$$

Pour $n = 3$ on obtient à partir de (55) et (58) :

$$\begin{aligned} z^3 P_3(z^{-1}) &= G_3^0(z) - G_3^1(z) + G_3^2(z) - G_3^3(z) \\ &= 1 - \{k_1 z + k_2 z^2 + k_3 z^3\} \\ &\quad + \{k_2\overline{k}_1 z + k_3\overline{k}_2 z + k_3\overline{k}_1 z^2\} - k_3\overline{k}_2 k_1 z^2 \\ &= 1 - (k_1 - k_2\overline{k}_1 - k_3\overline{k}_2)z \\ &\quad + (k_2 - k_3\overline{k}_1 + k_1\overline{k}_2 k_3)z^2 - k_3 z^3. \end{aligned} \tag{59}$$

Ceci conduit à l'expression (52) de $P_3(z)$.

Dans la pratique, il est important de déterminer la représentation en treillis associée à un polynôme défini par ses coefficients. Cela revient à étudier l'inversibilité de l'application $\mathcal{T}$. Cette étude peut être menée sans passer par les expressions explicites des coefficients de P_n en fonction de $\mathbf{k}_n$ mais en étudiant l'inversibilité de la relation (49). Cette dernière est équivalente au système :

$$\begin{bmatrix} P_{j+1}(z) \\ P_{j+1}^*(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & -k_{j+1} \\ -\overline{k}_{j+1} z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_j(z) \\ P_j^*(z) \end{bmatrix} \tag{60}$$

qui est à l'origine de la dénomination *représentation en treillis* du polynôme P_n. La résolution de ce système conduit à l'algorithe de Schur-Cohn suivant :

$$zP_{j-1}(z) \triangleq P_j(z) + k_j P_j^*(z), \quad j = n, n-1, \ldots$$

Cet algorithme permet de déterminer, à partir de $P = P_n$, le vecteur $\mathbf{k}_n$ vérifiant $P = \mathcal{T}(\mathbf{k}_n)$. Pour plus de détails concernant l'inversibilité de T, on peut consulter [13].

3.2. domaine de stabilité d'un filtre à temps discret

Nous donnons deux critères de stabilité qui seront utilisés pour définir le domaine de stabilité dans le cas particulier de $\mathbb{R}^3$. Le premier critère montre que la représentation en treillis permet de savoir, par un simple examen des coefficients qu'elle fait intervenir, si un filtre autorégressif est stable ou non.

Critère de stabilité de Schur-Cohn

Un polynôme est de Schur si et seulement si ce polynôme admet une représentation en treillis avec des coefficients k_i tous de module strictement inférieur à 1.

Critère de stabilité et propriété d'entrelacement des zéros [13]. Associons à $D(z) = a_0 z^n + \ldots + a_n$, $a_0 \neq 0$, son polynôme réciproque D^* et les deux polynômes :

$$D^+ = (D + D^*)/2, \quad D^- = (D - D^*)/2j, \quad j^2 = -1. \quad (61)$$

Le polynôme D a toutes ses racines à l'intérieur du cercle unité si et seulement si $|a_n/a_0| < 1$ et toutes les racines de D^- et D^+ sont simples, distinctes, situées sur le cercle unité et lorsqu'on parcourt ce cercle, on rencontre ces racines de façon alternative.

Dans l'espace des coefficients de réflexion k_i, le domaine de stabilité, $\mathcal{D}_\mathbf{k}$, est donné par l'intersection des n régions définies par :

$$|k_i| < 1, \quad 1 \leq i \leq n \quad (62)$$

qui correspond à l'intérieur d'un hypercube dans le cas réel. L'étude des propriétés du domaine de stabilité $\mathcal{D}_\mathbf{a}$ dans l'espace des coefficients du filtre repose sur les propriétés de l'opérateur $\mathcal{T}$ qui sont développées dans [13]. On va se limiter ici à l'étude de $\mathcal{D}_\mathbf{a}$ dans $\mathbb{R}^3$.

Méthode fondée sur la représentation en treillis.

Dans $\mathbb{R}^3$, le domaine $\mathcal{D}_\mathbf{a}$ correspond à l'ensemble des points $\mathbf{a}_3$ pour lesquels on a : $-1 < k_i < 1$ pour $1 \leq i \leq 3$. On pose $\mathbf{a}_3 \triangleq (x, y, z)^T$ et on exprime les k_i en fonction de x, y et z en utilisant (52). On obtient :

$$k_1 = \frac{x - yz}{1 + y - xz - z^2} \quad (63)$$

$$k_2 = \frac{y - xz}{1 - z^2} \quad (64)$$

$$k_3 = z. \quad (65)$$

Le domaine $\mathcal{D}_\mathbf{a}$ est donc défini par les inégalités suivantes :

$$-1 < z < 1 \quad (66)$$

$$-y + x + z - 1 < 0, \quad -y - x - z - 1 < 0 \quad (67)$$

$$-y + xz + z^2 - 1 < 0, \quad y - xz + z^2 - 1 < 0. \quad (68)$$

Les équations cartésiennes de la frontière de $\mathcal{D}_\mathbf{a}$ s'obtiennent en remplaçant les inégalités ci-dessus par des égalités. On obtient une surface de $\mathbb{R}^3$ formée par 4 surfaces planes et 2 autres pouvant être engendrées par des droites qui se déplcent (surfaces réglées).

Méthode fondée sur la propriété d'entrelacement

Soit $D(z) = z^3 + bz^2 + cz + d$ un polynôme à coefficients réels. On a

$$D^+(z) = (1 + d)z^3 + (b + c)z^2 + (b + c)z + (1 + d) \quad (69)$$

$$D^+(z) = (1 - d)z^3 + (b - c)z^2 - (b - c)z - (1 - d). \quad (70)$$

Supposons $d \neq \pm 1$ et posons

$$p = (b + c)/(1 + d) \quad \text{et} \quad q = (b - c)/(1 - d). \quad (71)$$

on obtient

$$R^+(z) = z^3 + pz^2 + pz + 1 = (z + 1)z^2 - (1 - p)z + 1 \quad (72)$$

$$R^-(z) = z^3 + qz^2 - qz - 1 = (z - 1)z^2 + (1 + q)z + 1. \quad (73)$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que les racines de R^- et R^+ alternent sur le cercle unité est donnée par : $-2 < 1 - p < 2, -2 < 1 + q < 2$ et $-1 - q < 1 - p$. Le polynôme D a toutes ses racines à l'intérieur du cercle unité **ssi**

$$-1 < d < 1, \quad -1 < p < 3, \quad -3 < q < 1 \text{ et } p - q < 2. \quad (74)$$

On obtient ainsi une représentation de la coupe, par le plan $z_3 = d$, du domaine de l'espace $(z_1, z_2, z_3) = (p, q, d)$ correspondant aux polynômes D n'ayant que des racines à l'intérieur du cercle unité (domaine de stabilité). A titre d'exemple, pour

$$D(z) = z^3 + (1/2)z^2 + (1/4)z + 1/8 = (z^2 + 1)(z + 1/2) \quad (75)$$

on obtient $d = 1/8$, $p = 2/3$, $q = 2/7$ et $p - q < 2$. Donc D à toutes ses racines à l'intérieur du cercle unité.

3.3. position des zéros par rapport au cercle unité

Nous allons présenter dans la suite des extensions de l'algorithme de Schur-Cohn qui sont à la base de l'étude de la position des zéros d'un polynôme quelconque par rapport au cercle unité. On désignera dans la suite par $n_e(P), n_i(P)$ et $n_c(P)$ les nombres de zéros d'un polynôme P, situés respectivement à l'extérieur, à l'intérieur et sur le cercle unité. Nous commençons par présenter une version modifiée ensuite une version étendue de l'algorithme de Schur-Cohn. Chacun parmi les deux algorithmes obtenus permet d'associer à tout polynôme P de degré n une suite de polynômes $P_n,\ P_{n-1}, \ldots,\ P_m,\ m \geq 0$, vérifiant $d^0(P_j) \leq j$.

Algorithme de Schur-Cohn modifié (SCM)

Condition initiale : $P_n = P$

Pour $j = n,\ n - 1,\ \ldots$, déterminer P_{j-1} comme suit :

i) Déterminer k_j et Q.

$$k_j \triangleq -P_j(0)/P_j^*(0) \tag{76}$$
$$z^{d_j}Q(z) \triangleq P_j(z) + k_j P_j^*(z),\ Q(0) \neq 0 \text{ ou } Q = 0 \tag{77}$$

ii) Déterminer P_{j-1} :

$$\begin{aligned} \text{Si } |k_j| &< 1 \quad \text{prendre } P_{j-1} \triangleq Q \\ &> 1 \quad \text{prendre } P_{j-1} \triangleq Q^* \\ &= 1 \quad \text{et} \quad Q = 0,\ \text{prendre } P_{j-1} \triangleq P_j' \\ &= 1 \quad \text{et} \quad Q \neq 0,\ \text{remplacer } P_j \text{ par} \\ &\quad\ Q + (c^{-1}P_j + k_j c P_j^*) \end{aligned}$$

où c est un paramètre arbitraire vérifiant $0 < c < 1$ et retourner à (79). Calculer la nouvelle valeur du coefficient k_j à partir du nouveau polynôme P_j et continuer l'algorithme en notant que $|k_j| \neq 1$. L'algorithme s'arrête dès que l'on a construit le polynôme P_m de degré 0.

L'algorithme SCM permet d'associer à tout polynôme P, la suite de coefficients :

$$S(P) = \{k_n, k_{n-1}, \ldots, k_m\}. \tag{78}$$

A chaque étape, on peut remplacer P_j par $\alpha_j P_j$ où α_j désigne un nombre complexe arbitraire non nul.

Proposition 6 [8] i) Si tous les k_j apparaissant dans $S(P)$ vérifient $|k_j| \leq 1$, alors on a $n_e(P) = 0$. Si $S(P)$ comporte h indices $j_1 > j_2 > \cdots > j_h$ tels que $|k_{j_i}| > 1,\ 1 \leq i \leq h$, alors on a :

$$n_e(P) = \sum_{i=1}^{h} d^0(P_{j_i}) - d^0(P_{j_i-1}). \tag{79}$$

ii) Si $S(P)$ ne comporte aucun polynôme construit à l'aide de $P_{j-1} = P_j'$, alors $n_c(P) = 0$ et si j_0 est le plus grand indice tel que $P_{j_0-1} = P_{j_0}'$, on a :

$$n_c(P) = d^0(P_{j_0}) - 2n_i(P_{j_0}). \tag{80}$$

Remplaçons maintenant (79) par la relation plus générale suivante :

$$(z-\sigma)^d Q(z) = P(z) + kP^*(z), \tag{81}$$

avec $Q(\sigma) \neq 0$ ou $Q = 0$ et $d \geq 1$

où σ est un nombre réel arbitraire et k un nombre complexe dépendant de P et de σ. La validité de (83) est fondée sur le résultat suivant. On peut démontrer que si P n'est pas proportionnel à son polynôme réciproque P^*, alors, il existe toujours un réel $0 \leq \sigma < 1$, un nombre complexe $k, |k| \neq 1$, et un polynôme Q vérifiant (83). Le nombre k est alors donné par $k = -P(\sigma)/P^*(\sigma)$ puisque $d \geq 1$.

Algorithme de Schur-Cohn généralisé (SCG)

Condition initiale : $P_n = P$.

Pour $j = n, n-1, \ldots$, choisir un réel σ vérifiant $0 \leq \sigma < 1$ et déterminer P_{j-1} comme suit :

i) Déterminer k_j et Q :

$$k_j = -P_j(\sigma)/P_j^*(\sigma) \tag{82}$$
$$(z-\sigma)^{d_j}Q(z) = P_j(z) + k_j P_j^*(z),\ Q(\sigma) \neq 0 \text{ ou } Q = 0 \tag{83}$$

ii) Déterminer P_{j-1} :

$$\begin{aligned} \text{Si } |k_j| &< 1 \quad \text{prendre } P_{j-1} \triangleq Q & (84) \\ &> 1 \quad \text{prendre } P_{j-1} \triangleq Q^* \\ &= 1 \quad \text{et } Q = 0,\ \text{prendre} \quad P_{j-1} \triangleq P_j' \\ &= 1 \quad \text{et } Q \neq 0,\ \text{changer } \sigma \text{ pour obtenir } |k_j| \neq 1 \end{aligned}$$

et retourner à (85). L'algorithme s'arrête lorsque le polynôme P_m de degré 0 est déterminé.

Proposition 7 L'algorithme ScG permet d'associer à tout polynôme P une suite :

$$\Sigma(P) = \{k_n, k_{n-1}, \ldots, k_m\} \tag{85}$$

qui dépend des paramètres arbitraires σ introduits aux différentes étapes de l'algorithme. Si les σ_j utilisés pour construire Σ vérifient tous $0 \leq \sigma_i < 1$, alors les nombres $n_e(P)$ et $n_c(P)$ sont encore donnés par (81) et (82).

4. décompositions des dérivées d'un polynôme

Nous allons introduire maintenant une représentation de la dérivée d'ordre ℓ d'un polynôme ϕ sous la forme :

$$\phi^{(\ell)}(t) = \sum_{k=0}^{Q} \alpha_k^\ell\, \phi(t - t_k) \qquad \forall t \tag{86}$$

où Q est un entier naturel, $t_0, \ldots, t_Q$ des réels arbitraires et $\alpha_0^\ell, \ldots, \alpha_Q^\ell$ des coefficients qui dépendent des t_k et non du polynôme ϕ. Cette décomposition est ensuite utilisée pour introduire des distributions temps-fréquence adaptées à l'analyse des signaux $z(t)$ dits à phase polynomiale (SPP) et définis par :

$$z(t) = Ae^{j\phi(t)} \quad \text{avec} \quad \phi(t) \triangleq \sum_{i=0}^{N} a_i\, t^i. \tag{87}$$

On suppose dans la suite $N > 1$ et on désigne par $\mathbb{P}_N[t]$ l'ensemble des polynômes de degré $\leq N$. Comme cet ensemble est un espace vectoriel de dimension $N + 1$, la décomposition (88) existe toujours pourvu que l'ensemble des polynômes $\phi(t - t_k)$, $0 \leq k \leq Q$, engendre $\mathbb{P}_N[t]$. *A priori*, les coefficients α_k^ℓ de cette décomposition peuvent dépendre du polynôme ϕ considéré mais la proposition suivante montre que les α_k^ℓ, quand ils existent, sont indépendants de ϕ.

Proposition 8 [11] [12] Soient $t_0, \ldots, t_Q$, $Q+1$ réels arbitraires distincts deux à deux, $\mathbb{P}_N[t]$ l'ensemble des polynômes de degré $\leq N$ et $\phi^{(\ell)}$ la dérivée d'ordre ℓ, $\ell = 0, \ldots, N$, de ϕ. Alors les quatre propriétés suivantes sont équivalentes.

1) Un polynôme ϕ de degré N vérifie (88).

2) les coefficients α_k^ℓ sont solutions du système de Vandermonde suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ t_0 & t_1 & \ldots & t_Q \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_0^\ell & t_1^\ell & \ldots & t_Q^\ell \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_0^N & t_1^N & \ldots & t_Q^N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0^\ell \\ \alpha_1^\ell \\ \vdots \\ \alpha_\ell^\ell \\ \vdots \\ \alpha_Q^\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ (-1)^\ell \ell! \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (88)$$

3) Tous les polynômes de $\mathbb{P}_N[t]$ vérifient (88).

4) Le polynôme ϕ vérifie l'identité suivante :

$$\tau^\ell \phi^{(\ell)}(t) = \sum_{k=0}^{Q} \alpha_k^\ell \, \phi(t - t_k\tau) \quad \forall\tau, \forall t. \quad (89)$$

La résolution du système (90) conduit aux résultats suivants [11] [12] :

1) Si $N < Q$, le système admet une infinité de solutions.

2) Si $N = Q$, le système est carré et admet une solution unique donnée par :

$$\alpha_k^\ell = \ell! \, \frac{\sigma_Q^{Q-\ell}(t_0, \ldots, t_{k-1}, t_{k+1}, \ldots, t_Q)}{\prod_{i \neq k} (t_i - t_k)} \quad k = 0, \ldots, Q \quad (90)$$

où $\sigma_Q^{Q-\ell}$ désigne le polynôme symétrique élémentaire de Q varibles et de degré $Q - l$.

3) Si $N = Q + 1$ et $\ell = N$, le système n'admet pas de solutions. Mais si $\ell < N$, les α_k^ℓ existent et sont donnés par (92) si et seulement si :

$$\sigma_{Q+1}^{Q+1-\ell}(t_0, \ldots, t_Q) = 0. \quad (91)$$

D'après la structure du système (90), si les paramètres t_k sont remplacés par ρt_k (où ρ est un réel arbitraire) alors les α_k^ℓ sont remplacés par $\alpha_k^\ell / \rho^\ell$. Si ϕ est de degré N, les résultats ci-dessus indiquent que pour $\ell = N$, la plus petite valeur de Q est N et pour $\ell < N$, la plus petite valeur de Q est $N - 1$ à condition que les t_k vérifient (93).

Exemple 1

Illustrons la décomposition (88) pour $\ell = N$, $\ell = N - 1$ et en prenant Q minimal.

1) Pour $\ell = N$ et $Q = N$, les coefficients α_k^Q sont donnés par :

$$\alpha_k^Q = \frac{Q!}{\prod_{i \neq k}^{Q} (t_i - t_k)} \quad k = 0, \ldots, Q \quad (92)$$

et la décomposition (88) se réduit à :

$$N! \, a_N = \sum_{k=0}^{N} \frac{N!}{\prod_{i \neq k}^{N} (t_i - t_k)} \phi(t - t_k) \quad \forall t, \forall t_k. \quad (93)$$

Dans ce cas, si les t_k sont remplacés par $t_k + c$ (où c est un réel arbitraire), les α_k^Q correspondant restent inchangés.

2) Pour $\ell = N - 1$ et $Q = N - 1$, les paramètres $t_0, \ldots, t_{N-1}$ doivent vérifier (93) qui se réduit à :

$$\sum_{i=0}^{N-1} t_i = 0 \quad (94)$$

les coefficients α_k^Q restent toujours donnés par (94) et nous avons :

$$(N-1)! \, a_{N-1} + N! \, a_N \, t = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(N-1)!}{\prod_{i \neq k}^{N-1} (t_i - t_k)} \phi(t - t_k) \quad \forall t. \quad (95)$$

Exemple 2

Considérons les paramètres t_k suivants :

$$t_k = k + c, \quad k = 0, \ldots, Q \quad \text{et} \quad c \in \mathbb{R}. \quad (96)$$

Alors pour $Q = N$, les α_k^Q sont indépendants de c et sont donnés par :

$$\alpha_k^Q = (-1)^k c_{k,Q+1}, \quad c_{i,j} \triangleq \frac{j!}{i!(j-i)!} \quad (97)$$

et pour $Q = N - 1$, les α_k^Q sont toujours donnés par (99) mais on doit prendre $c = -Q/2$.

4.1. fonction ambiguïté généralisée

Soient $t_0, \ldots, t_Q$, $Q + 1$ réels distincts et $\alpha_0^\ell, \ldots, \alpha_Q^\ell$ les paramètres solutions du système (90). La fonction ambiguïté généralisée (FAG) d'un signal complexe $z(t)$, notée $\mathcal{A}_{Q+1}^\ell(z, \theta, \tau)$, est la distribution définie par

$$\mathcal{A}_{Q+1}^\ell(z, \theta, \tau) \triangleq \int_0^T \prod_{k=0}^{Q} \{z(t - t_k\tau)\}^{\alpha_k^\ell} e^{-j\theta t} dt. \quad (98)$$

La définition de la FAG conduit immédiatement aux résultats suivants :

$$\mathcal{A}^{\ell}_{Q+1}(A,\theta,\tau) = A^{\delta(\ell)}\, T \exp\left(-j\frac{\theta}{2}T\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\theta}{2}T\right) \quad (99)$$

$$\mathcal{A}^{\ell}_{Q+1}(z_1 z_2,\theta,\tau) = \mathcal{A}^{\ell}_{Q+1}(z_1,\theta,\tau) * \mathcal{A}^{\ell}_{Q+1}(z_2,\theta,\tau) \quad (100)$$

où A est une constante, $\delta(\ell)$ le symbole de Kronecker et $*$ la convolution sur θ.

Proposition 9 Si $z(t)$ est donné par (89) et $\Phi \triangleq N! a_N \tau^{N-1} - \theta$, alors, pour $Q \geq N-1$, on a :

$$\mathcal{A}^{N-1}_{Q+1}(z,\theta,\tau)$$

$$= \exp\left(j\left[(N-1)! a_{N-1}\tau^{N-1} + \frac{\Phi}{2}T\right]\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\Phi}{2}T\right) \quad (101)$$

$$\arg\max_{\theta} |\mathcal{A}^{N-1}_{Q+1}(z,\theta,\tau)| = N!\, a_N\, \tau^{N-1}. \quad (102)$$

Cette proposition montre d'une part que l'expression de l'opérateur $\mathcal{A}^{N-1}_{Q+1}$, appliqué à un signal $z(t)$ donné par (89), est indépendante des paramètres t_k et d'autre part que $|\mathcal{A}^{N-1}_{Q+1}(z,\theta,\tau)|$ est directement relié au module d'un sinus cardinal centré en $\theta = N! a_N \tau^{N-1}$ dans le plan (θ,τ). Ainsi, si l'argument du maximum de $|\mathcal{A}^{N-1}_{Q+1}(z,\theta,\tau)|$ par rapport à θ est nul pour tout τ, alors on a $a_N = 0$, i.e. $d^o(\phi) < N$. En revanche, si cet argument est non nul pour $\tau \neq 0$, nous pouvons déterminer a_N et déterminer ensuite le degré de la phase. Après le calcul de a_N, la multiplication du signal original par $\exp\{-j a_N t^N\}$ conduit à un nouveau SPP dont la phase est le polynôme $\phi(t) - a_N t^N$ de degré $\leq N-1$. Cette procédure peut être répétée jusqu'à l'obtention du coefficient a_1. Enfin, pour déterminer a_0, il suffit de calculer la phase de $z(t)\exp\{-j\sum_{i=1}^{N} a_i t^i\}$. Ce processus itératif pour la détermination des coefficients $\{a_i\}_{i=0}^{N}$ est similaire à celui utilisé par la Transformée d'une Phase Polynomiale (TPP) définie par [12] :

$$\mathcal{P}_N(z,\theta,\tau) = \int_0^T \prod_{k=0}^{N-1} \left\{z^{\$k}(t-k\tau)\right\}^{c_{k,N}} e^{-j\theta t} dt \quad (103)$$

où $z^{\$k} = z$ si k est pair et z^* si k est impair. En fait, il existe un lien très étroit entre ces deux distributions comme le précisent les résultats suivants.

Proposition 10 Si $z(t)$ est donné par (89) et $\Psi \triangleq N!(N-1)a_N\tau^N/2$, alors pour $Q \geq N-1$ on a :

$$\mathcal{A}^{N-1}_{Q+1}(z,\theta,\tau) = \frac{A^{-2^{N-1}}}{\exp(j\Psi)} \mathcal{P}_N(z,\theta,\tau) \quad (104)$$

$$\arg\max_{\theta} |\mathcal{A}^{N-1}_{Q+1}(z,\theta,\tau)| = \arg\max_{\theta} |\mathcal{P}_N(z,\theta,\tau)| \quad (105)$$

L'équation (107) montre que les maxima de $|\mathcal{A}^{N-1}_{Q+1}(z,\theta,\tau)|$ et $|\mathcal{P}_N(z,\theta,\tau)|$ s'obtiennent pour le même argument : $N!\, a_N\, \tau^{N-1}$.

la FAG peut être calculée en choisissant arbitrairement les paramètres t_k et ceci lui confère un caractère plus général que la TPP. Pour un signal de phase, c'est-à-dire pour un signal complexe $z(t)$ tel que $|z(t)| = 1$, la FAG prend la forme suivante :

$$\mathcal{A}^{\ell}_{Q+1}(z,\theta,\tau) = \int_0^T \prod_{k=0}^{Q} \left\{z^{\$k}(t-t_k\tau)\right\}^{(-1)^k \alpha^{\ell}_k} e^{-j\theta t} dt \quad (106)$$

qui est très proche de (105). Plus précisément, si $z(t)$ est donné par (89) avec $A = 1$ et les t_k par (98), nous obtenons pour $Q = N$:

$$\mathcal{A}^{N}_{N+1}(z(t),\theta,\tau) = \mathcal{P}_{N+1}(z(t-c\tau),\theta,\tau) \quad \forall c \in \mathbb{R} \quad (107)$$

et pour $Q = N-1$:

$$\mathcal{A}^{N-1}_{N}(z(t),\theta,\tau) = \mathcal{P}_N\left(z\left(t + \frac{N-1}{2}\tau\right),\theta,\tau\right). \quad (108)$$

4.2. distribution de Wigner-Ville généralisée

Soient $t_0,\ldots,t_Q$, $Q+1$ réels distincts et $\alpha^{\ell}_0,\ldots,\alpha^{\ell}_Q$ les paramètres solutions du système (90). La distribution de WV généralisée (WVG) d'un signal complexe $z(t)$, notée $\mathcal{W}^{\ell}_{Q+1}(z,t,\omega)$, est définie par :

$$\mathcal{W}^{\ell}_{Q+1}(z,t,\omega)$$

$$\triangleq \int_0^T \prod_{k=0}^{Q} \{z(t-t_k\tau)\}^{\alpha^{\ell}_k}\, \ell\,\tau^{\ell-1} e^{-j\omega\tau^{\ell}} d\tau \quad \ell \neq 0. \quad (109)$$

Pour $\ell = 1$, on obtient la distribution de WV Polynomiale (WVP) sur l'intervalle $[0,T]$ [12]. D'autre part, en utilisant les propriétés de la transformée de Fourier, on obtient :

$$\mathcal{W}^{\ell}_{Q+1}(A,t,\omega) = T^{\ell} \exp\left(-j\frac{\omega}{2}T^{\ell}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2}T^{\ell}\right) \quad (110)$$

$$\mathcal{A}^{\ell}_{Q+1}(z,\theta,\tau) = \mathcal{F}_{t\to\theta}\, \mathcal{F}^{-1}_{\omega\to\tau^{\ell}} \left[\mathcal{W}^{\ell}_{Q+1}(z,t,\omega)\right] \quad (111)$$

pour $\tau \in [0,T]$.

Proposition 11 Pour tout signal $z(t)$ donné par (89) avec $Q \geq N-1$, on a : $\mathcal{W}^{\ell}_{Q+1}(z,t,\omega)$

$$= T^{\ell} \exp\left(j\,\frac{\phi^{(\ell)}(t)-\omega}{2}\,T^{\ell}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\phi^{(\ell)}(t)-\omega}{2}\,T^{\ell}\right) \quad (112)$$

$$\arg\max_{\omega} |\mathcal{W}^{\ell}_{Q+1}(z,t,\omega)| = \phi^{(\ell)}(t). \quad (113)$$

Cette proposition montre d'une part que l'expression de l'opérateur $\mathcal{W}^{\ell}_{Q+1}$, appliqué à un signal $z(t)$ donné par (89), est indépendante des paramètres t_k et d'autre part que $|\mathcal{W}^{\ell}_{Q+1}(z,t,\omega)|$ est directement relié au module d'un sinus cardinal centré en $\omega = \phi^{(\ell)}(t)$ dans le plan (t,ω). Cette dernière propriété montre l'intérêt de la décomposition (88). En effet, le résultat (115) peut être exploité de différentes manières pour déterminer les coefficients de la phase. Nous pouvons citer par exemple les méthodes suivantes.

1) La dérivée première à elle seule permet de déterminer les coefficients de la phase. C'est le principe de la distribution de WVP.

2) Il est possible d'utiliser toutes les dérivées pour estimer la phase. En effet, a_N peut être déterminé à partir de $\phi^{(N)}, \ldots, \phi^{(1)}$, a_{N-1} à partir de $\phi^{(N-1)}, \ldots, \phi^{(1)}$ etc.... Enfin, a_0 s'obtient en calculant la phase de $z(t)\exp\{-j\sum_{i=1}^{N} a_i t^i\}$. L'utilisation de toutes les dérivées pourrait améliorer l'estimation des coefficients de la phase d'un SPP, lorsque celui-ci est affecté par un bruit additif.

3) La distribution de WVG permet d'estimer itérativement les coefficients de la phase. En effet, faisant $\ell = N = Q$ dans (115) on obtient :

$$\arg\max_{\omega} |\mathcal{W}^N_{N+1}(z,t,\omega)| = N!\, a_N. \qquad (114)$$

Il faut noter que le résultat (116) n'est pas valable pour $Q = N-1$ puisque dans ce cas (115) n'est pas valable pour $\ell = N$. Si l'argument définie par (116) est nul, alors $a_N = 0$ et par suite $d^{\circ}(\phi) < N$ sinon, la valeur de l'argument permet de déterminer a_N. On multiplie ensuite $z(t)$ par $\exp\{-ja_N t^N\}$ et on applique la distribution de WVG au nouveau SPP dont la phase est le polynôme $\phi(t) - a_N t^N$ de degré $\leq N-1$. On itère ainsi la procédure jusqu'à l'obtention de a_1. Finalement, pour trouver a_0 il suffit de calculer la phase de $z(t)\exp\{-j\sum_{i=1}^{N} a_i t^i\}$.

Si $z(t)$ est un signal de phase, la distribution de WVG prend la forme :

$$\mathcal{W}^\ell_{Q+1}(z,t,\omega) = \int_0^T \prod_{k=0}^{Q} \left\{z^{\$k}(t - t_k\tau)\right\}^{(-1)^k\alpha_k^\ell} \ell\,\tau^{\ell-1}\, e^{-j\omega\tau^\ell}.d\tau \qquad (115)$$

$z(t)$ est donné par (89) avec $A = 1$, si $Q = N$ et si les t_k sont donnés par (98), on obtient :

$$\mathcal{W}^N_{N+1}(z,t,\omega) = \int_0^T \prod_{k=0}^{N} \left\{z^{\$k}(t - t_k\tau)\right\}^{c_{k,N+1}} N\,\tau^{N-1}\, e^{-j\omega\tau^N} d\tau. \qquad (116)$$

Nous avons défini dans cette section la fonction ambiguïté et la distribution de WV généralisées en donnant la principale propriété de chacun de ces deux opérateurs. On peut trouver dans [12] plus de détails concernant l'utilisation de ces opérateurs pour l'estimation en temps discret d'une phase d'un SPP à amplitude constante affecté par un bruit additif ainsi que d'autres applications.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Marden, «The Geometry of the Zeros of a Polynomial in a Complex Variable», *Amer. Math. Soc.*, New York, NY, 949.

[2] E.I. Jury, «A Simplified Stability Criterion for Linear Discrete Systems», *Proceedings of the IRE*, 1962, p. 1493–1500.

[3] P. Delsarte, Y. V. Genin, and Y. Kamp, «Pseudo-Lossless Functions with Application to the Problem of Locating the Zeros of a Polynomial», *IEEE Trans. on Circuits and Syst.*, Vol. CAS-32, April 1985, p. 373–381.

[4] Y. Bistritz, «A Circular Stability Test for General Polynomials», *Systems and Control Letters*, No. 7, 1986, p. 89–97.

[5] P. P. Vaidyanathan and S. K. Mitra, «A Unified Structural Interpretation of Some Well-Known Stability-Test Procedures for Linear Systems», *Proceedings of the IEEE*, Vol. 75, No. 4, April 1987, p. 478–497.

[6] B. Picinbono and M. Benidir, «Some Properties of Lattice Autoregressive Filters», *IEEE Trans. ASSP*, vol. ASSP-34, April 1986, p. 342–349.

[7] M. Benidir and B. Picinbono, «Extended Routh's Array for Eliminating the ϵ-Method in the Routh's Table», *IEEE Trans. Autom., Contr.*, Vol. 35, No. 2, February 1990, p. 218–222.

[8] M. Benidir, «On the Root Distribution of General Polynomials with Respect to the Unit Circle» *Signal Processing* 53, 1996, p. 53–82.

[9] B. Picinbono, «Théorie des signaux et des systèmes» *DUNOD*, Paris 1989.

[10] M. Barret, M. Benidir, «On the Boundary of the Set of Schur Polynomials and Applications to the Stability of 1-D and 2-D Digital Recursive Filters», *IEEE Trans. on Autom., contr.*, Vol. 39, No. 11, p. 2335–2339, November 1994.

[11] M. Benidir, «Caracterization of Polynomial Functions and Application to Time-Frequency Analysis», *IEEE Trans. SP*, Vol. 45, No. 5, May 1997, p. 1351–1354.

[12] M. Benidir and A. Ouldali, «Polynomial Phase Signal Analysis based on the Polynomial Derivatives Decompositions» *accepté, IEEE, Trans. SP*, Septembre 1998.

[13] M. Benidir et M. Barret, «Stabilité des filtres et des systèmes linéaires», *à paraître* chez DUNOD, 1999.

Manuscrit reçu le 2 avril 1998.

L'AUTEUR

Messaoud BENIDIR

Messaoud BENIDIR est ingénieur de l'Ecole Centrale de Paris, (promo. 75). Il a obtenu les diplômes de Docteur-Ingénieur et de Docteur d'Etat à l'Université de Paris-Sud, Orsay, respectivement en 1981 et en 1987. Depuis 1981, il effectue ses recherches au Laboratoire des Signaux et Systèmes, Gif-sur-Yvette et il est actuellement Professeur à l'Université de Paris-Sud. Ses domaine de recherche sont le filtrage multidimensionnel et l'analyse temps-fréquence à l'aide des statistiques d'ordre élevé.