

# La variance de B. Picinbono

## The variance of B. Pincibono

par Jean-Jacques GAGNEPAIN

Centre National de la Recherche Scientifique

### *résumé et mots clés*

Même le meilleur oscillateur présente du bruit de phase et de fréquence dû à des fluctuations aléatoires provenant de ses composants. Pour les caractériser expérimentalement la variance d'Allan est une méthode usuelle basée sur la différence entre deux échantillons successifs de la fréquence instantanée. Elle fonctionne bien pour les bruits dont le spectre est de type  $1/f$  ou  $1/f^2$ . Mais elle diverge pour une croissance plus rapide près de la porteuse. La variance de B. Picinbono, quant à elle, est basée sur trois échantillons (différence du second ordre) et la pondération spectrale correspondante est adaptée à des divergences en  $1/f^3$  ou  $1/f^4$ . C'est donc un excellent outil d'analyse des différentes sources de bruit d'un oscillateur. Ces deux variances, ainsi qu'une troisième prévue pour supprimer une dérive de fréquence, ont été comparées pour un oscillateur à quartz très stable à 10Mhz. Effectivement, la variance de B. Picinbono s'avère la plus efficace pour réduire les composantes très basses du bruit de fréquence et ses non stationnarités telles que dérive et marche au hasard.

Oscillateur, bruit et fluctuations de phase et de fréquence, variance d'Allan, variance de B. Picinbono, dérive et marche aléatoire de fréquence, spectres en  $1/f$ ,  $1/f^2$ ,  $1/f^3$ ,  $1/f^4$ .

### *abstract and key words*

Even the best oscillators exhibit random fluctuations of their instantaneous frequency. A usual measurement method is the Allan variance which relies on the difference between two successive instantaneous frequency samples. For frequency fluctuations with power spectrum of the kind of  $1/f$  or  $1/f^2$  this variance is well suited. However for a faster increase near the zero frequency, it is divergent. With the variance of Picinbono, the idea is to use a second order difference, based on three measurements. This yields a spectral shaping which can cancel a power spectrum divergence of the kind  $1/f^3$  or  $1/f^4$ . Hence a very accurate tool to analyse the various noise sources of an oscillator. We have compared these two variances, plus a third one that is intended to remove a frequency drift, in the case of a highly stable quartz oscillator at 10 MHz. The variance of B. Picinbono turns out to be indeed more efficient to reduce very low components of the frequency noise, as well as certain types of nonstationarities (drift and random walk).

Oscillator, noise and fluctuations of phase and frequency, Allan variance, Picinbono variance, frequency drift and random walk, Flicker noise.

## 1. introduction

Les étalons de fréquence, oscillateurs à quartz, horloges atomiques, oscillateurs micro-ondes ont une stabilité qui est limitée par différentes sources de bruit et dérives qui affectent leur fréquence et leur phase. Les travaux menés dans ce domaine répondent à un double objectif. L'un est d'améliorer les performances de ces oscillateurs en réduisant les causes d'instabilité et leurs effets. L'autre est de mieux identifier les sources de bruit.

Les instabilités du signal délivré par l'oscillateur sont caractérisées dans le domaine fréquentiel par analyse de Fourier ou dans le domaine temporel à l'aide de variances. Différents outils mathématiques ont ainsi été définis, mais il a fallu aussi normaliser ces outils afin de pouvoir comparer les résultats des mesures effectuées dans des laboratoires et dans des pays différents. C'est ainsi que s'est généralisée la variance dite d'Allan. Cependant cette variance diverge pour certains bruits et ne permet pas une analyse fine de toutes les composantes. La variance, à trois échantillons, proposée en 1976 par Bernard Picinbono fut un réel progrès car elle permit d'éliminer certaines divergences et de

réduire l'influence des phénomènes non stationnaires. Elle connut donc un succès certain pour la caractérisation des oscillateurs de grande stabilité.

## 2. le signal de l'oscillateur

Le signal idéal, c'est-à-dire sans bruit, pourrait être représenté par une pure sinusoïde.

$$V(t) = V_0 \sin 2\pi\nu_0 t \quad (1)$$

Où  $V_0$  et  $\nu_0$  représentent l'amplitude et la fréquence de ce signal. En réalité les sources de bruit et de dérive affectent l'amplitude et la phase. Le signal réel est alors représenté par :

$$V(t) = V_0[1 + a(t)] \sin [2\pi\nu_0 t + \phi(t)] \quad (2)$$

où  $a(t)$  et  $\phi(t)$  sont des grandeurs aléatoires correspondant aux fluctuations d'amplitude et de phase, encore appelées bruits.

La fréquence instantanée  $\nu(t)$  est, à  $2\pi$  près, la dérivée par rapport au temps de la phase totale, soit :

$$\nu(t) = \nu_0 + \Delta\nu(t) \quad (3)$$

avec

$$\Delta\nu(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (4)$$

La variation relative instantanée de fréquence est notée  $y(t)$  :

$$y(t) = \frac{\Delta\nu(t)}{\nu_0} \quad (5)$$

## 3. mesure des fluctuations de phase et de fréquence

Le modèle le plus général d'un oscillateur est celui de la figure 1, qui comprend d'une part une boucle d'oscillation composée d'un résonateur et d'un dispositif d'entretien, et d'autre part d'un amplificateur d'isolation et de sortie.

Ces sources de bruit peuvent être classées en bruits internes (dans la boucle d'oscillation) et bruits externes (dans l'amplificateur de sortie). Une distinction est également faite entre bruit additif qui provient des sources de bruit blanc (les amplificateurs) et bruit paramétrique qui est une modulation des éléments fixant la phase et la fréquence de l'oscillateur.

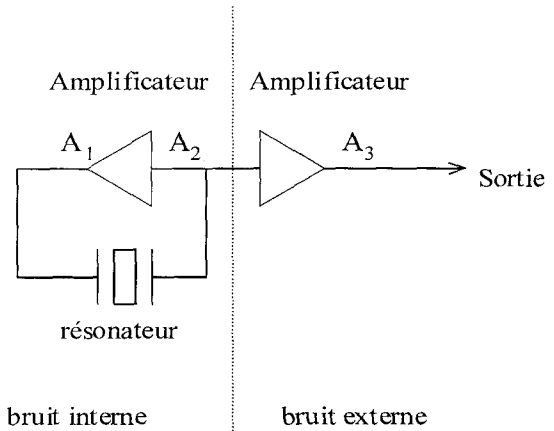


Figure 1. - Schéma général d'un oscillateur et sources de bruit.

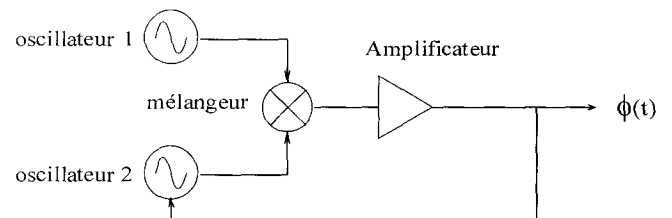


Figure 2. - Système de mesure à boucle d'asservissement de phase.

La mesure de la stabilité de fréquence ou de la pureté spectrale d'un oscillateur est faite par comparaison avec un second oscillateur (en général identique au premier) à l'aide du système de démodulation de la figure 2.

Ce système permet d'asservir en fréquence l'un des oscillateurs sur l'autre à l'aide d'un mélangeur doublement équilibré. Le signal de sortie est proportionnel aux fluctuations de la différence de phase des oscillateurs asservis, en dehors de la bande passante de l'asservissement. Dans la bande passante la sortie est proportionnelle aux fluctuations de fréquence. L'intérêt de cette méthode est de rendre le signal obtenu après démodulation stationnaire.

## 4. caractérisation dans le domaine spectral

Dans l'hypothèse d'un signal de phase  $\phi(t)$  stationnaire, la fonction d'autocorrélation est indépendante du temps  $t$  et s'écrit :

$$R_\phi(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \phi(t')\phi(t' + \tau) dt' \quad (6)$$

La densité spectrale bilatérale  $S_\phi^B(f)$  s'en déduit par transformation de Fourier :

$$S_\phi^B(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_\phi(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau \quad (7)$$

D'un point de vue pratique, l'utilisation du spectre unilatéral  $S_\phi(f)$  est préférable (en raison du phénomène de repliement dû au montage de la figure 2) :

$$S_\phi(f) = 2S_\phi^B \text{ pour } 0 \leq f < \infty \quad (8)$$

De la même façon peut être définie la densité spectrale des fluctuations relatives de fréquence :

$$S_y(f) = 2 \int_0^{+\infty} R_y(\tau) e^{-i2\pi f\tau} dt \quad (9)$$

Fréquence et phase étant liées, on en déduit facilement que :

$$S_y(f) = \left(\frac{f}{\nu_0}\right)^2 S_\phi(f) \quad (10)$$

Les densités spectrales qui viennent d'être présentées sont des concepts mathématiques qui nécessitent une plage de fréquence d'analyse infinie (ou pour la fonction d'autocorrélation un temps infini), ce qui n'est pas réalisable. En pratique, ce n'est donc qu'une estimation de ces fonctions qui est obtenue.

## 5. caractérisation dans le domaine temporel : variances

Toute mesure d'une grandeur ne peut se faire que sur un certain laps de temps. Par conséquent, le résultat de la mesure correspond à une moyenne obtenue sur un intervalle de temps  $\tau$  à un instant  $t_k$ ; ainsi le résultat d'une mesure de la variation relative instantanée de fréquence  $y(t)$  sera l'échantillon :

$$\bar{y}_k = \frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_k+\tau} y(t) dt \quad (11)$$

On montre à partir de (4) la relation :

$$\bar{y}_k = \frac{\phi(t_k + \tau) - \phi(t_k)}{2\pi\nu_0\tau} \quad (12)$$

La répétition de la mesure donne un ensemble d'échantillons  $\bar{y}_k$  de valeurs aléatoires. Le calcul de leurs moments statistiques permet de caractériser la stabilité de l'oscillateur dans le domaine temporel.

### 5.1. valeur moyenne

Elle est définie au sens de moyenne d'ensemble (notée  $\langle \rangle$ ) :

$$\langle \bar{y}_k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \bar{y}_k \quad (13)$$

Où  $N$  est le nombre d'échantillons.

### 5.2. variance vraie

$$I^2(\tau) = \langle \bar{y}_k^2 - \bar{y}_k^2 \rangle \quad (14)$$

La variance vraie, au sens mathématique, correspond à un nombre  $N$  d'échantillons infini. Elle ne peut donc être atteinte expérimentalement et seule une estimation correspondant à une valeur finie de  $N$  sera obtenue lors d'une série de mesures.

La vraie variance  $I(\tau)$  peut être exprimée en fonction de l'autocorrélation de la phase  $R_\phi(\tau)$  (en utilisant 4) si les conditions de stationnarité et d'ergodicité sont remplies.

$$I^2(\tau) = \frac{1}{2\pi^2\nu_0^2\tau^2} [R_\phi(0) - R_\phi(\tau)] \quad (15)$$

En utilisant la relation inverse de (7), on obtient :

$$I^2(\tau) = \int_0^\infty S_y(f) \left(\frac{\sin \pi f\tau}{\pi f\tau}\right)^2 df \quad (16)$$

Cette relation montre que la variance vraie peut-être calculée à partir de la densité spectrale en utilisant une fonction de transfert

$$|H(f)|^2 = \left(\frac{\sin \pi f\tau}{\pi f\tau}\right)^2$$

Remarque : Lorsque  $f \rightarrow 0$ , cette fonction de transfert tend vers 1, et par conséquent les composantes basses fréquences du spectre sont entièrement prises en compte; en particulier  $I^2(\tau)$  diverge pour un bruit en  $1/f$ . La variance vraie n'est donc pas appropriée à la caractérisation d'oscillateurs réels, qui présentent de tels spectres.

### 5.3. variance à $N$ échantillons

Elle est définie à partir d'un ensemble fini de  $N$  valeurs de  $\bar{y}_k$ ; ( $k = 1, 2, \dots, N$ ), mesurées sur des intervalles de temps  $\tau$ , avec une période  $T$  de répétition des mesures (figure 3).

Première définition :

$$\sigma_{1y}^2(N, T, \tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left( \bar{y}_k - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \bar{y}_j \right)^2 \quad (17)$$

Cette quantité est elle-même une variable aléatoire puisque  $N$  est fini. On peut dire qu'elle n'est pas déviée si :

$$\langle \sigma_{1y}^2(N, T, \tau) \rangle = I^2(\tau) \quad (18)$$

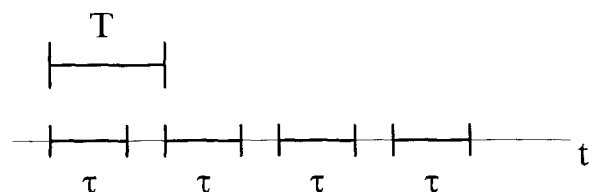


Figure 3. - Séquence de prise d'échantillons :  $T = \tau +$  temps mort.

Ceci n'est pas vrai dans le cas du bruit blanc. On montre en particulier que pour ce bruit et pour  $T = \tau$ , que :

$$\langle \sigma_{1y}^2(N, T, \tau) \rangle = \left(1 - \frac{1}{N}\right) I^2(\tau) \quad (19)$$

Pour cette raison, une seconde définition a été proposée :

$$\langle \sigma_{2y}^2(N, T, \tau) \rangle = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N \left( \bar{y}_k - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \bar{y}_j \right)^2 \quad (20)$$

qui conduit bien à  $\langle \sigma_{2y}^2 \rangle = I^2(\tau)$ .

### 5.4. variance d'Allan ou variance à deux échantillons

Dans un souci de normalisation permettant la comparaison de mesures différentes, le sous comité IEEE pour la stabilité de fréquence a proposé d'utiliser une variance à deux échantillons ( $N = 2$ ) avec une prise d'échantillon sans temps mort ( $T = \tau$ ). Définie à partir de la relation (20), cette variance est souvent appelée « variance d'Allan ».

$$\langle \sigma_y^2(2, \tau, \tau) \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^2 \left( \bar{y}_k - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \bar{y}_j \right)^2 \right\rangle \quad (21)$$

En notation abrégée elle est écrite  $\sigma_y^2(\tau)$ .

Elle prend la forme simple :

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2} \langle (\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k)^2 \rangle \quad (22)$$

Comme pour le cas de la variance vraie, il est possible de relier la variance d'Allan à la densité spectrale, on obtient :

$$\sigma_y^2(\tau) = 2 \int_0^\infty S_y(f) \frac{\sin^4 \pi f \tau}{(\pi f \tau)^2} \quad (23)$$

La fonction de transfert est différente de la précédente et est telle que l'intégrale converge lorsque  $f \rightarrow 0$  pour la plupart des bruits habituellement rencontrés.

On remarquera que cette fonction de transfert apparaît comme la transformée de Fourier de la fonction  $h(t)$  de la figure 4.

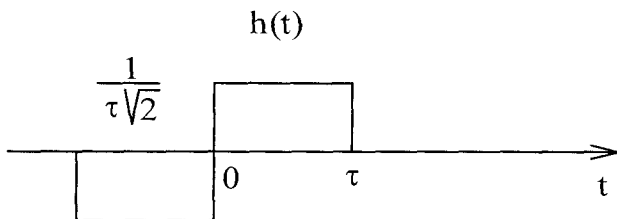


Figure 4. – Prise d'échantillons de la variance d'Allan.

Cette fonction correspond à la séquence de prise d'échantillons telle qu'elle apparaît dans la définition de la variance d'Allan.

### 5.5. variance de Hadamard

Les considérations précédentes de fonctions de transfert ont conduit au développement de la variance de Hadamard pour effectuer des analyses spectrales aux très faibles fréquences de Fourier.

Cette variance correspond à une séquence de prise de  $N$  échantillons représentée sur la figure 5.

Le calcul de la variance s'effectuant suivant la relation :

$$\sigma_H^2(N, \tau, \tau) = \langle (\bar{y}_1 - \bar{y}_2 + \bar{y}_3 - \bar{y}_4 + \bar{y}_5 - \bar{y}_6)^2 \rangle \quad (24)$$

De façon générale, pour  $N$  échantillons :

$$\sigma_H^2(N, T, \tau) = \int_0^\infty S_y(f) |H_H(f)|^2 df \quad (25)$$

Avec :

$$|H_H(f)|^2 = \left( \frac{\sin \pi f \tau}{\pi f \tau} \right)^2 \left( \frac{\sin N \pi f T}{\cos \pi f T} \right)^2 \quad (26)$$

Cette fonction de transfert présente un lobe central beaucoup plus étroit que celui de la variance d'Allan, la largeur décroissant en  $1/N$ . Quelques complications proviennent de la présence des lobes secondaires qui devront être réduits par pondération des échantillons ou par filtrage.

En pratique, de la mesure de cette variance est déduite une estimation ( $\hat{\sigma}$ ) de la pureté spectrale :

$$\hat{S}_y(f) \approx \frac{\tau}{N} \sigma_H^2(N, T, \tau) \quad (27)$$

Cette méthode permet d'effectuer des analyses spectrales avec une largeur équivalente de filtre de l'ordre de 0.001 Hz ou même inférieure.

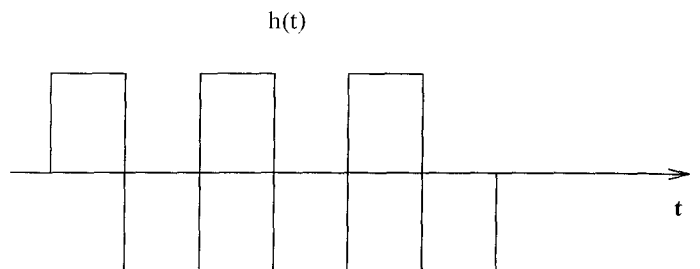


Figure 5. – Prise d'échantillons de la variance de Hadamard ( $N = 6$ ).

### 5.6. variance de Picinbono

Ou variance modifiée à trois échantillons, qui a été proposée par Picinbono et Boileau. Elle consiste à prendre trois échantillons adjacents (sans temps mort entre les échantillons), suivant la relation :

$$\Sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{9} < (\overline{2y_{k+1}} - \overline{y_k} - \overline{y_{k+2}})^2 > \quad (28)$$

La variance Picinbono a le grand avantage de converger même pour les bruits présentant des spectres à pente importante tels que les bruits en  $f^{-3}$  et  $f^{-4}$ . Elle conduit pour les mêmes bruits aux mêmes lois de dépendance en  $\tau$  que la variance d'Allan. Le rapport  $\Sigma_y(\tau)/\sigma_y(\tau)$  est de l'ordre de 0,9 pour le bruit blanc de phase, et de l'ordre de 0,6 pour la marche aléatoire de fréquence. La bande passante du système de mesure doit aussi être spécifiée.

Cette variance, en raison de sa structure, est relativement efficace pour éliminer l'influence des composants très basse fréquence des fluctuations et donc la dérive, que cette dérive soit parfaitement déterministe ou encore aléatoire; elle est aussi efficace dans le cas de composants périodiques; sa fonction de transfert équivalente correspond à un filtre passe-bande centré à la fréquence  $1/2\tau$  suivant la relation :

$$\Sigma_y^2(\tau) = \frac{16}{9} \int_0^\infty S_y(f) \frac{\sin^6 \pi f \tau}{(\pi f \tau)^2} df \quad (29)$$

La fonction de transfert est représentée par la figure 6.

### 5.7. variance d'Allan avec suppression de dérive

La dérive est un phénomène déterministe, mais qui n'est pratiquement jamais prévisible, ce qui empêche toute possibilité de

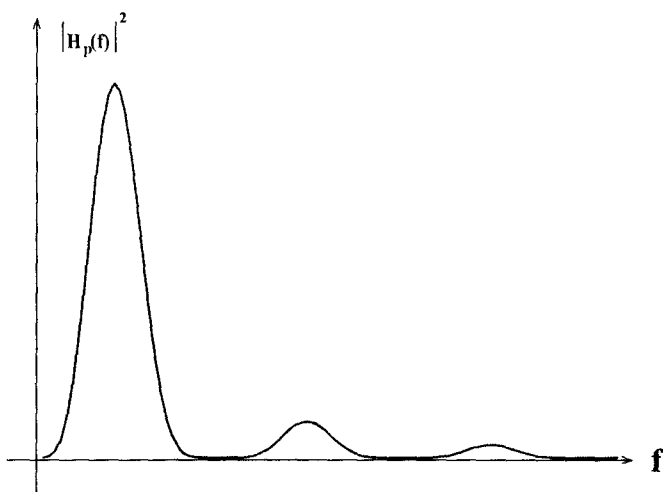


Figure 6. - Fonction de transfert de la variance de Picinbono.

la compenser, et presque toutes les tentatives de modélisation se sont révélées jusqu'à présent infructueuses.

Une dérive linéaire, représentée par  $y(t) = dt$  conduit à :

$$\sigma_y(\tau) = \frac{d}{\sqrt{2}} \tau \quad (30)$$

c'est-à-dire à une loi de dépendance de  $\sigma_y(\tau)$  proportionnelle à  $\tau$ .

Cette dérive peut être supprimée en prenant, pour le calcul de la variance, des échantillons suivant la relation :

$$\sigma_{y_{der.ret.}}^2(\tau) = \frac{1}{2} < (\overline{y_{k+1}} - \overline{y_k} - d\tau)^2 > \quad (31)$$

où  $d$  est la pente de la dérive, calculée préalablement.

On remarquera que la méthode est rigoureuse si la dérive est parfaitement linéaire. Par contre, si l'évolution est non monotone, en particulier si des variations lentes de fréquence dues par exemple à la température se superposent, la méthode s'avère beaucoup moins efficace.

### 5.8. comparaison de la variance de Picinbono et de la variance d'Allan

Les trois variances, de Picinbono et d'Allan avec et sans suppression de dérives ont été utilisées pour mesurer la stabilité d'un même oscillateur (oscillateur à quartz à 10 MHz) de grande stabilité. Ces résultats obtenus à l'aide de ces trois méthodes sont présentés sur la figure 6.

Les trois variances donnent des résultats voisins sur les temps les plus courts qui correspondent à la prépondérance du bruit blanc de phase (rapport de 0,9) et s'écartent sur les temps plus longs où interviennent la marche aléatoire de fréquence et la dérive.

Le rapport entre Picinbono et Allan est donné, pour les principaux types de bruits en  $h_a f$  rencontrés dans les oscillateurs, dans le tableau I.

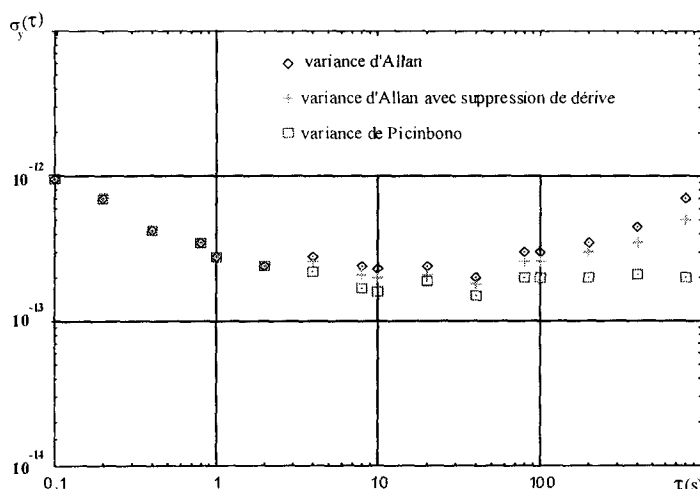


Figure 7. - Comparaison des variances de Picinbono et d'Allan.

Tableau 1. – Relation entre les variances d’Allan et de Picinbono pour les différents spectres de bruit.

Bruit	$S_y(f)$	Variance de Picinbono $\sum_y^2(\tau)$	Variance d’Allan $\sigma_y^2(\tau)$	Rapport $\sum_y(\tau)/\sigma_y(\tau)$
	$h_{-4}f^{-4}$	$\frac{44}{90}\pi^4 h_{-4}\tau^3$	diverge	
	$h_{-3}f^{-3}$	$\frac{27 \ln 3 - 33 \ln 2}{9}\pi^2 h_{-3}\tau^2$	diverge	
Marche aléatoire de fréquence	$h_{-2}f^{-2}$	$\frac{2}{9}\pi^2 h_{-2}\tau$	$\frac{2}{3}\pi^2 h_{-2}\tau$	0,58
Flicker de fréquence	$h_{-1}f^{-1}$	$\frac{8 \ln 2 - 3 \ln 3}{3}h_{-1}$	$2h_{-1} \ln 2$	0,74
Blanc de fréquence	$h_0$	$h_0/3\tau$	$h_0/2\tau$	0,82
Fliker de phase	$h_1 f$ Filtre à $f_n$	$(9 + \ln \pi f_n \tau) \frac{5h_1}{9\pi^2 \tau^2}$	$\frac{h_1}{4\pi^2 \tau^2} (1 + 3 \ln 2\pi f_h \tau)$	0,85
Blanc de phase	$h_2 f^{-2}$ Filtre à $f_n$	$\frac{5h_2 f_h}{9\pi^2 \tau^2}$	$\frac{3h_2 f_h}{4\pi^2 \tau^2}$	0,86

## 6. conclusion

En fait la variance de Picinbono peut être considérée comme une méthode de mesure par différence du second ordre, qui sera donc plus efficace pour réduire les composantes non stationnaires du bruit. Elle présente aussi l’avantage de ne pas diverger, à la différence de la variance d’Allan, pour les bruits de plus basses fréquences, tels que ceux en  $f^{-4}$  et  $f^{-3}$ . Pour ces raisons, elle est un excellent outil d’analyse des différentes sources de bruit d’un oscillateur.

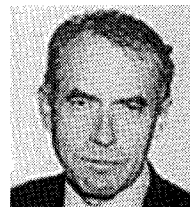
### BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. Rutman, «Characterization of phase and frequency instabilities in precision frequency sources : fifteen years of progress», Proc. IEEE. Vol. 66, n°9, 1978.
- [2] F. Boisleau, B. Picinbono, «Statistical study of phase fluctuations and oscillator stability», IEEE. Trans. Instr. Meas. IM-25, n°1, 1976.
- [3] Chronos, «La mesure de la fréquence des oscillateurs», Coll. Technique et Scientifique des Telecom, Masson, Paris, 1991.

Manuscrit reçu le 1 mars 1999.

L’AUTEUR

Jean-Jacques GAGNEPAIN



Assistant (1964-73). Maître assistant (1973-75) à l’Ecole nationale supérieure de chronométrie et de micromécanique de Besançon, Visiting Scientist au National Bureau of Standards à Boulder (Etats-Unis) (1975-76), Directeur de laboratoire de recherche (1978-88), Directeur de recherche (depuis 1988) au Centre national de la recherche scientifique (CNRS), Directeur de laboratoire de physique et métrologie des oscillateurs à Besançon (1978-92). Responsable de l’Insitut des microtechniques de Franche-Comté (1989-92) Président du Centre technique de l’industrie horlogère (1989-95). Directeur scientifique du département des sciences pour l’ingénieur du CNRS (depuis 1991). Nombreux travaux sur la piezoélectricité, les phénomènes non linéaires dans les résonateurs à quartz, sur les oscillateurs et les étalons de fréquence et de temps, la physique des ondes. Chevalier de l’ordre national du Mérite. Médaille d’or de la Société d’encouragement de l’industrie nationale (1991). Cady award (1995).