Le filtrage adapté stochastique adaptatif appliqué aux images bruitées

Adaptative stochastic matched filtering applied to noise-corrupted images

par Philippe COURMONTAGNE

Laboratoire MS-GESSY, ISITV
Université de Toulon et du Var
BP 132, 83957 LA GARDE Cedex
e.mail : colline@isitv.univ-tln.fr

résumé et mots clés

La finalité de cet article est de proposer un nouveau traitement adaptatif permettant d'extraire le signal utile contenu dans une image détériorée par la présence d'un bruit additif ou multiplicatif. Ce traitement repose sur l'utilisation du filtrage adapté stochastique bidimensionnel et utilise conjointement une adaptation sur la puissance du signal utile et une adaptation sur la longueur de cohérence du signal utile, c'est-à-dire une adaptation de la taille des imagettes. Sa mise au point nécessitant d'avoir une connaissance *a priori* des contours du signal utile, nous proposons une nouvelle méthode d'extraction de contours, fiable dans le cas d'images bruitées. Des résultats après application de notre traitement sur une donnée simulée (bruit additif) et sur une donnée réelle (bruit multiplicatif) sont présentés.

Filtrage adapté stochastique, transformée en cosinus discrète, équation intégrale, contours, adaptation.

abstract and key words

The purpose of this article is to present a new adaptive processing that allows image filtering, for both the additive and the multiplicative noise case. This processing is based on the two-dimensional stochastic matched filtering technique with a signal power adaptation and a subimage size adaptation. To apply this processing, it is necessary to know the edge areas of the signal so we develop a new method which gives us the edge areas even for a noise-corrupted image. Some results are given for both simulated data (additive noise) and for real data (multiplicative noise).

Stochastic matched filter, discrete cosine transform, integral equation, edge areas, adaptation.

1. introduction

L'extraction de l'information, dite signal utile, contenue dans une image détériorée par la présence de termes perturbateurs additifs ou multiplicatifs est un problème courant en traitement d'images. Nous proposons dans cet article une nouvelle méthode de filtrage basée sur une extension stochastique de la notion de filtrage adapté [5]. Le modèle du signal utile n'étant jamais parfaitement connu, il est remplacé par un signal aléatoire permettant ainsi l'obtention d'une nouvelle écriture du rapport signal à bruit. L'optimisation de ce rapport permet d'obtenir un ensemble de filtres dont le regroupement contribue à un accroissement du rapport signal à bruit.

Nous rappellerons dans une première partie la théorie du filtrage adapté stochastique étendue au cas de signaux bidimensionnels. Nous y étudierons également le cas particulier d'un signal bidimensionnel détérioré par un bruit à corrélation microscopique, faisant ainsi le lien entre le filtrage adapté stochastique et le développement de Karhunen-Loève.

Le filtrage adapté stochastique met en jeu une famille de fonctions obtenues par résolution d'une équation intégrale à second membre intégral, dont l'écriture discrète s'apparente à un problème aux valeurs propres généralisé. Nous proposerons dans une seconde partie une nouvelle méthode permettant l'obtention d'une approximation analytique des fonctions propres solutions de cette équation intégrale.

Afin de limiter d'éventuels problèmes de mémoire et de temps de calcul, nous proposons dans une troisième partie une nouvelle écriture du filtrage adapté stochastique et du développement de Karhunen-Loève par projection dans la base de Fourier.

Pour pouvoir s'assurer de la qualité de l'image restituée, nous proposons une transformation du filtrage adapté stochastique en un traitement adaptatif en ayant recours à une adaptation sur la puissance du signal utile et une adaptation sur la longueur de cohérence du signal utile. Nous verrons que cette modification nécessite la mise au point d'une nouvelle méthode d'extraction de contours qui reste fiable dans le cas d'images détériorées par la présence d'un bruit coloré additif ou multiplicatif. Cette transformation sera développée dans une quatrième partie.

Nous serons alors en mesure dans une cinquième et dernière partie d'expérimenter ce traitement. Une première phase d'expérimentations sera effectuée sur une simulation constituée d'une image, dont le signal utile est détérioré par la présence de termes perturbateurs additifs. Nous validerons le résultat obtenu par une étude sur les valeurs des rapports signal à bruit locaux avant et après traitement. Une seconde phase d'expérimentations sera réalisée sur une donnée réelle, issue de l'imageur SAR[1] ERS-1. La qualité du résultat sera quantifiée par une étude sur les niveaux de speckle avant et après traitement.

2. filtrage adapté stochastique bidimensionnel

Nous allons dans cette partie rappeler le principe fondamental du filtrage adapté stochastique bidimensionnel sous sa forme continue. Ce dernier revient en la décomposition du signal en une série de fonctions ayant pour coefficients de décomposition des variables aléatoires décorrélées. Pour cette raison, nous rappellerons dans un premier temps le principe de la décomposition d'un signal aléatoire. Puis nous nous intéresserons au cas d'un signal détérioré par la présence de termes perturbateurs. Enfin nous étudierons le cas particulier d'un signal bidimensionnel en présence d'un bruit à corrélation microscopique.

1. Synthetic Aperture Radar, Radar à Synthèse d'Ouverture (RSO) en français.

2.1. considérations générales sur la décomposition d'un signal aléatoire

Soit $I(x,y)$ un signal aléatoire bidimensionnel, stationnaire, centré, défini sur $D \times D$ avec $D = [-T;T]$ et soit $\{v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots\}$ une séquence infinie de variables aléatoires centrées et décorrélées. Nous pouvons écrire pour décomposer $I(x,y)$:

$$I(x,y) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} v_n \Psi_n(x,y) \qquad \forall (x,y) \in D \times D \qquad (1)$$

Les fonctions $\Psi_n(x,y)$ sont les fonctions de base. Elles sont déterministes et linéairement indépendantes. Elles sont liées à la séquence $\{v_n\}$ choisie, il existe donc une infinité de décompositions du signal suivant (1).

Soit $E\{v_n I(x,y)\}$ l'espérance mathématique du produit des variables aléatoires avec le signal bidimensionnel $I(x,y)$. Les fonctions $\Psi_n(x,y)$ sont obtenues de la façon suivante :

$$E\{v_n I(x,y)\} = \lim_{N\to\infty} \sum_{m=1}^{N} E\{v_n v_m\} \Psi_m(x,y)$$

en raison de la décorrélation des variables aléatoires, nous pouvons écrire :

$$E\{v_n I(x,y)\} = E\{v_n^2\} \Psi_n(x,y)$$

Ainsi nous obtenons pour expression des fonctions déterministes $\Psi_n(x,y)$:

$$\Psi_n(x,y) = \frac{1}{\sigma_v^2} E\{v_n I(x,y)\} \qquad \forall (x,y) \in D \times D \qquad (2)$$

Dans l'expression (2), σ_v^2 représente la variance des v_n.

Classiquement les variables aléatoires v_n peuvent s'écrire :

$$v_n = \int_D \int_D I(x,y) \Phi_n(x,y) dx dy \qquad (3)$$

où $\{\Phi_n(x,y)\}$ est une famille de fonctions déterministes, choisie de telle sorte que les variables aléatoires v_n soient décorrélées :

$$E\{v_n v_m\} = 0 \qquad \forall n \neq m$$

En notant $M(x-x', y-y')$ la covariance du signal et en utilisant conjointement la relation (3) et la décorrélation des variables aléatoires, nous pouvons montrer :

$$\int_D \int_D \int_D \int_D M(x-x', y-y') \Phi_n(x,y) \Phi_m(x',y') dx dx' dy dy' = 0 \qquad (4)$$

On définit ainsi la famille des fonctions $\Phi_n(x,y)$ solutions de cette équation intégrale, chacune d'entre elles assurant la décorrélation des variables aléatoires v_n.

En normalisant les fonctions comme suit :

$$\int_D \int_D \Phi_n(x,y)dxdy = 1$$

et compte tenu des relations (2) et (4), nous pouvons montrer la biorthogonalité des fonctions $\Phi_n(x,y)$ et $\Psi_m(x,y)$:

$$\int_D \int_D \Phi_n(x,y)\Psi_m(x,y)dxdy = \delta_{n,m}$$

où $\delta_{n,m}$ représente le symbole de Kronecker.

2.2. décomposition simultanée du signal et du bruit

Considérons à présent un signal bidimensionnel $I(x,y)$ détérioré par la présence de termes perturbateurs $B(x,y)$. Le signal et le bruit sont supposés indépendants et stationnaires. Soit $Z(x,y)$ le signal observé, nous avons :

$$Z(x,y) = I(x,y) + B(x,y) \qquad \forall (x,y) \in D \times D$$

Nous désirons décomposer simultanément le signal utile et le bruit :

$$I(x,y) = \sigma_I I_0(x,y) = \sigma_I \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} v_n \Psi_n(x,y)$$

$$B(x,y) = \sigma_B B_0(x,y) = \sigma_B \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} w_n \Psi_n(x,y)$$

Dans ces expressions v_n et w_n sont des variables aléatoires centrées, déterminées par les relations suivantes :

$$\begin{cases} v_n = \int_D \int_D I_0(x,y)\Phi_n(x,y)dxdy \\ w_n = \int_D \int_D B_0(x,y)\Phi_n(x,y)dxdy \end{cases} \tag{5}$$

La détermination des variables aléatoires v_n et w_n dépend de la famille de fonctions déterministes $\{\Phi_n(x,y)\}$ choisie. Nous choisirons la famille assurant la décorrélation de ces variables aléatoires :

$$E\{v_n v_m\} = \sigma_v^2 \delta_{n,m}$$

$$E\{w_n w_m\} = \sigma_w^2 \delta_{n,m}$$

Intéressons-nous, à présent, à la détermination de ces fonctions $\Phi_n(x,y)$. Dans ce but, nous allons considérer l'extension stochastique de la notion de filtrage adapté.

Si nous considérons un signal bidimensionnel stationnaire, déterministe $S(x,y)$, défini sur $D \times D$, perturbé par un bruit ergodique, stationnaire $B(x,y)$, le filtrage adapté revient en la détermination d'une fonction $\Phi(x,y)$, définie sur $D \times D$, qui rend optimal le rapport signal à bruit K, donné par la relation suivante :

$$K = \frac{\left| \int_D \int_D S(x,y)\Phi(x,y)dxdy \right|^2}{E\left\{ \left| \int_D \int_D B(x,y)\Phi(x,y)dxdy \right|^2 \right\}}$$

Si nous considérons le signal aléatoire $I(x,y)$, bidimensionnel centré, stationnaire, ce rapport K devient [5] :

$$K = \frac{E\left\{ \left| \int_D \int_D I(x,y)\Phi(x,y)dxdy \right|^2 \right\}}{E\left\{ \left| \int_D \int_D B(x,y)\Phi(x,y)dxdy \right|^2 \right\}}$$

En notant respectivement $M(x-x', y-y')$ et $R(x-x', y-y')$ la covariance du signal et celle du bruit, K s'écrit :

$$K = \frac{\int_D \int_D \int_D \int_D M(x-x', y-y')\Phi(x,y)\Phi(x',y')dxdx'dydy'}{\int_D \int_D \int_D \int_D R(x-x', y-y')\Phi(x,y)\Phi(x',y')dxdx'dydy'}$$

Cette expression représente le rapport de deux formes quadratiques positives. Il apparaît ainsi comme étant un quotient de Rayleigh. Il s'ensuit que le rapport signal à bruit sera maximal si $\Phi(x,y)$ est la fonction propre bidimensionnelle associée à la plus grande des valeurs propres de l'équation intégrale suivante, pour $(x,y) \in D \times D$:

$$\int_D \int_D M(x-x', y-y')\Phi_n(x',y')dx'dy' = \lambda_n \int_D \int_D R(x-x', y-y')\Phi_n(x',y')dx'dy' \tag{6}$$

La fonction propre $\Phi_1(x,y)$ associée à la valeur propre maximale λ_1 porte le nom de filtre adapté stochastique et est utilisée en détection [18].

Les variables aléatoires v_n et w_n sont décorrélées quand les fonctions déterministes $\Phi_n(x,y)$ sont les fonctions propres de l'équation intégrale (6), avec λ_n telles que :

$$\lambda_n = \frac{E\{v_n^2\}}{E\{w_n^2\}}$$

Lorsque les fonctions propres $\Phi_n(x,y)$ sont normalisées comme suit :

$$\int_D\int_D\int_D\int_D R(x-x',y-y')\Phi_n(x,y)\Phi_n(x',y')dxdx'dydy' = 1$$

on peut aisément montrer que les fonctions déterministes $\Psi_n(x,y)$ sont données par :

$$\Psi_n(x,y) = \frac{1}{\lambda_n}\int_D\int_D M(x-x',y-y')\Phi_n(x',y')dx'dy' \quad (7)$$

ou par :

$$\Psi_n(x,y) = \int_D\int_D R(x-x',y-y')\Phi_n(x',y')dx'dy' \quad (8)$$

Et nous avons, compte tenu des relations (5) :

$$E\{v_n v_m\} = \lambda_n \delta_{n,m}$$

$$E\{w_n w_m\} = \delta_{n,m}$$

Dans ces conditions, le signal observé $Z(x,y)$ se développe de la façon suivante :

$$\begin{aligned} Z(x,y) &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} z_n \Psi_n(x,y) \\ &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}[\sigma_I v_n + \sigma_B w_n]\Psi_n(x,y) \end{aligned}$$

La valeur quadratique moyenne de la $n^{\text{ième}}$ composante de $Z(x,y)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} E\{z_n^2\} &= E\left\{(\sigma_I v_n + \sigma_B w_n)^2\right\} \\ &= \sigma_I^2\lambda_n + \sigma_B^2 + 2\int_D\int_D\int_D\int_D E\{I(x,y)B(x',y')\} \\ &\qquad \Phi_n(x,y)\Phi_n(x',y')dxdx'dydy' \end{aligned}$$

Le signal et le bruit étant supposés indépendants, nous pouvons négliger le terme $E\{I(x,y)B(x',y')\}$. Ainsi le rapport signal à bruit de la $n^{\text{ième}}$ composante de $Z(x,y)$ est :

$$K_n = \frac{\sigma_I^2}{\sigma_B^2}\lambda_n \quad (9)$$

où σ_I^2/σ_B^2 représente le rapport signal à bruit avant traitement.

Ainsi toutes les fonctions propres $\Phi_n(x,y)$ associées à des valeurs propres supérieures à 1 peuvent contribuer à une amélioration du rapport signal à bruit. Pour cette raison, une opération de filtrage peut consister à ne retenir que les composantes telles que le rapport signal à bruit K_n soit supérieur à un certain seuil, fixé à l'avance, et bien entendu supérieur à 1.

2.3. cas particulier d'un bruit blanc

Lorsque le bruit $B(x,y)$ est un bruit à corrélation microscopique de puissance unité, sa covariance s'exprime par :

$$R(x-x',y-y') = \delta(x-x',y-y')$$

Dans ce cas, l'équation intégrale (6) devient :

$$\int_D\int_D M(x-x',y-y')\Phi_n(x',y')dx'dy' = \lambda_n\int_D\int_D \delta(x-x',y-y')\Phi_n(x',y')dx'dy'$$

ou encore :

$$\int_D\int_D M(x-x',y-y')\Phi_n(x',y')dx'dy' = \lambda_n\Phi_n(x,y) \quad (10)$$

Cette équation intégrale est l'équation intégrale homogène de seconde espèce de Fredholm [15]. Compte tenu de (10), nous pouvons réécrire la relation (7) comme suit :

$$\Psi_n(x,y) = \Phi_n(x,y)$$

Le signal bidimensionnel $I(x,y)$ est alors développé en série de la forme :

$$I(x,y) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} v_n\Phi_n(x,y) \qquad \forall(x,y)\in D\times D$$

où les variables aléatoires v_n sont données par la relation (3).

Ce développement est connu sous le nom du développement de Karhunen-Loève [21].

3. approximation analytique des solutions de l'équation intégrale

Il est possible de trouver dans la littérature plusieurs travaux basés sur le filtrage adapté stochastique unidimensionnel ou multidimensionnel, sous sa forme discrète pour des images SAR d'états de surface de la mer [12, 17,18]. Dans ce cadre, il a été montré que ce traitement permettait d'obtenir de meilleurs résultats que les filtrages de Lee [16] et de Yan & Chen [23]. Malheureusement, lorsque nous considérons l'écriture discrète de l'équation intégrale (6), qui s'apparente alors à un problème

aux valeurs propres généralisé, et que nous désirons en déterminer les solutions, les vecteurs propres obtenus ne représentent qu'une approximation plus ou moins fidèle des solutions exactes. En effet, classiquement les algorithmes de recherche de vecteurs et valeurs propres sont des algorithmes itératifs, si bien qu'ils engendrent un cumul des erreurs. Les vecteurs propres sont donc d'autant moins fidèles que leur ordre est élevé [9]. Pour cette raison, nous n'allons pas considérer la forme discrète de l'équation intégrale, mais sa forme continue pour déterminer les fonctions propres $\Phi_n(x,y)$.

3.1. cas d'un bruit coloré

Nous désirons déterminer une approximation analytique pour les fonctions $\Phi_n(x,y)$ solutions de l'équation intégrale (6).

Considérons, tout d'abord, une nouvelle famille de fonctions, définies sur $\widehat{D}\times\widehat{D}$, avec $\widehat{D}=[-2T;2T]$:

$$\begin{cases} \widehat{M}(x-x',y-y') = M(|x'|-|x|,|y'|-|y|) \\ \widehat{R}(x-x',y-y') = R(|x'|-|x|,|y'|-|y|) \\ \widehat{\Phi}_n(x,y) = \Phi_n(T-|x|,T-|y|) \end{cases}$$

En utilisant cette nouvelle famille de fonctions, nous pouvons montrer que résoudre l'équation intégrale (6) revient à déterminer les solutions de l'équation intégrale suivante, pour $(x,y)\in\widehat{D}\times\widehat{D}$:

$$\int_{\widehat{D}}\int_{\widehat{D}} \widehat{M}(x-x',y-y')\widehat{\Phi}_n(x',y')dx'dy' = \lambda_n \int_{\widehat{D}}\int_{\widehat{D}} \widehat{R}(x-x',y-y')\widehat{\Phi}_n(x',y')dx'dy' \qquad (11)$$

Ces fonctions $\widehat{M}(x-x',y-y')$, $\widehat{R}(x-x',y-y')$ et $\widehat{\Phi}_n(x',y')$ présentent un grand intérêt de part leur parité. En effet, ces dernières étant obtenues par composition des fonctions $M(x-x',y-y')$, $R(x-x',y-y')$ et $\Phi_n(x',y')$ avec la fonction valeur absolue décalée, elles sont paires par rapport à chacune des variables. Elles peuvent donc être décomposer en série de Fourier, tout en s'affranchissant du phénomène de Gibbs, garantissant ainsi la convergence uniforme [1,2]. Ce développement en série de Fourier se réduit alors à un développement en série de cosinus.

Soit le développement en série de cosinus, des fonctions $\widehat{\Phi}_n(x',y')$:

$$\widehat{\Phi}_n(x',y') = \sum_{p=0}^{N}\sum_{q=0}^{N} \alpha_{p,q}^n \cos\left(\frac{\pi p}{2T}x'\right)\cos\left(\frac{\pi q}{2T}y'\right)$$

et soient $K_{p,q}(x,y)$ et $L_{p,q}(x,y)$ les coefficients de Fourier, respectivement, des noyaux $\widehat{M}(x-x',y-y')$ et $\widehat{R}(x-x',y-y')$.

Ces derniers sont donnés par les relations suivantes :

$$\begin{cases} K_{p,q}(x,y) = \dfrac{1}{4T^2}\displaystyle\int_{\widehat{D}}\int_{\widehat{D}} \widehat{M}(x-x',y-y')\cos\left(\frac{\pi p}{2T}x'\right) \\ \qquad \cos\left(\frac{\pi q}{2T}y'\right)dx'dy' \\ L_{p,q}(x,y) = \dfrac{1}{4T^2}\displaystyle\int_{\widehat{D}}\int_{\widehat{D}} \widehat{R}(x-x',y-y') \\ \qquad \cos\left(\frac{\pi p}{2T}x'\right)\cos\left(\frac{\pi q}{2T}y'\right)dx'dy' \end{cases}$$

En remplaçant dans la relation (11), les fonctions $\widehat{\Phi}_n(x',y')$ par leur série de cosinus, nous obtenons après identification avec les coefficients $K_{p,q}(x,y)$ et $L_{p,q}(x,y)$:

$$\sum_{p=0}^{N}\sum_{q=0}^{N} \alpha_{p,q}^n K_{p,q}(x,y) = \lambda_n \sum_{p=0}^{N}\sum_{q=0}^{N} \alpha_{p,q}^n L_{p,q}(x,y)$$

Multiplions cette relation par :

$$\widehat{\theta}_{k,l}(x,y) = \cos\left(\frac{\pi k}{2T}x\right)\cos\left(\frac{\pi l}{2T}y\right),$$

pour $(k,l)=0,1,\ldots,N$. Nous obtenons après intégration par rapport aux variables x et y sur le carré $\widehat{D}\times\widehat{D}$ du plan :

$$\sum_{p=0}^{N}\sum_{q=0}^{N} \alpha_{p,q}^n \Omega_{p,q,k,l}^M = \lambda_n \sum_{p=0}^{N}\sum_{q=0}^{N} \alpha_{p,q}^n \Omega_{p,q,k,l}^R \qquad (12)$$

avec :

$$\begin{cases} \Omega_{p,q,k,l}^M = \displaystyle\int_{\widehat{D}}\int_{\widehat{D}} K_{p,q}(x,y)\cos\left(\frac{\pi k}{2T}x\right)\cos\left(\frac{\pi l}{2T}y\right)dxdy \\ \Omega_{p,q,k,l}^R = \displaystyle\int_{\widehat{D}}\int_{\widehat{D}} L_{p,q}(x,y)\cos\left(\frac{\pi k}{2T}x\right)\cos\left(\frac{\pi l}{2T}y\right)dxdy \end{cases}$$

Le calcul des coefficients $\Omega_{p,q,k,l}^M$ et $\Omega_{p,q,k,l}^R$ peut être effectué numériquement à l'aide de transformées de Fourier successives. La résolution du système (12) conduit à la détermination des coefficients de Fourier $\alpha_{p,q}^n$ et des valeurs propres λ_n associées.

Finalement l'approximation analytique $\widetilde{\Phi}_n(x,y)$ des fonctions propres $\Phi_n(x,y)$ est obtenue par reconstruction, pour tout $(x,y)\in D\times D$, par la relation suivante :

$$\widetilde{\Phi}_n(x,y) = \sum_{p=0}^{N}\sum_{q=0}^{N} \alpha_{p,q}^n \cos\left(\frac{\pi p}{2T}(T-x)\right)\cos\left(\frac{\pi q}{2T}(T-y)\right) \qquad (13)$$

3.2. cas particulier d'un bruit blanc

Dans le cas d'un bruit à corrélation microscopique, le problème est de déterminer les fonctions $\Phi_n(x,y)$ solutions de l'équation intégrale de Fredholm homogène de seconde espèce décrite par la relation (10).

En appliquant un raisonnement similaire à celui qui nous a conduit à la détermination des solutions de l'équation intégrale dans le cas d'un bruit coloré, nous pouvons montrer que résoudre cette équation intégrale revient à rechercher les solutions de : $\forall(x,y) \in \widehat{D} \times \widehat{D}$

$$\frac{1}{4}\int_{\widehat{D}}\int_{\widehat{D}} \widehat{M}(x-x',y-y')\widehat{\Phi}_n(x',y')dx'dy' = \lambda_n \widehat{\Phi}_n(x,y) \quad (14)$$

En considérant la série de Fourier de $\widehat{\Phi}_n(x,y)$ et les coefficients de Fourier $K_{p,q}(x,y)$ du noyau $\widehat{M}(x-x',y-y')$, nous pouvons écrire (14) comme suit :

$$T^2 \sum_{p=0}^{N}\sum_{q=0}^{N} \alpha_{p,q}^n K_{p,q}(x,y) = \lambda_n \widehat{\Phi}_n(x,y)$$

De cette relation préalablement multipliée par $\widehat{\theta}_{k,l}(x,y)$ pour $(k,l) = 0,1,\ldots,N$, nous obtenons après intégration par rapport aux variables x et y sur le carré $\widehat{D} \times \widehat{D}$ du plan :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{16}\displaystyle\sum_{p=0}^{N}\sum_{q=0}^{N} \alpha_{p,q}^n \Omega_{p,q,0,0} = \lambda_n \alpha_{0,0}^n \\[2ex] \dfrac{1}{8}\displaystyle\sum_{p=0}^{N}\sum_{q=0}^{N} \alpha_{p,q}^n \Omega_{p,q,k,0} = \lambda_n \alpha_{k,0}^n \\[2ex] \dfrac{1}{8}\displaystyle\sum_{p=0}^{N}\sum_{q=0}^{N} \alpha_{p,q}^n \Omega_{p,q,0,l} = \lambda_n \alpha_{0,l}^n \\[2ex] \dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{p=0}^{N}\sum_{q=0}^{N} \alpha_{p,q}^n \Omega_{p,q,k,l} = \lambda_n \alpha_{k,l}^n \end{cases} \quad (15)$$

avec :

$$\Omega_{p,q,k,l} = \int_{\widehat{D}}\int_{\widehat{D}} K_{p,q}(x,y)\cos\left(\frac{\pi k}{2T}x\right)\cos\left(\frac{\pi l}{2T}y\right)dxdy$$

La résolution du système (15) conduit à la détermination des coefficients $\alpha_{p,q}^n$ et des valeurs propres λ_n associées.

Finalement, l'approximation analytique des fonctions propres est obtenue par reconstruction, pour tout $(x,y) \in D \times D$, par la relation (13).

4. nouvelle écriture du filtrage adapté stochastique

Nous proposons, dans cette partie, une nouvelle écriture pour le filtrage adapté stochastique par projection des principales relations dans la base de Fourier. Nous verrons que dans ces conditions, il n'est plus nécessaire de reconstruire les fonctions propres $\Phi_n(x,y)$, ce qui permet de limiter d'éventuels problèmes de mémoire et de temps de calcul. Nous cherchons donc pour la suite à déterminer les coefficients en série de Fourier de l'image filtrée, cette dernière étant reconstruite dans la phase finale du traitement.

4.1. cas d'un bruit coloré

Soit $Z(x,y)$ une image dont le signal utile est détérioré par la présence de termes perturbateurs et soit $Z^F(x,y)$ l'image filtrée. Cette dernière est obtenue à l'aide de la série suivante :

$$Z^F(x,y) = \sum_{n=1}^{Q} z_n \Psi_n(x,y) \qquad \forall(x,y) \in D \times D \quad (16)$$

où les z_n sont des variables aléatoires obtenues à partir de la relation suivante :

$$z_n = \int_D\int_D Z(x,y)\Phi_n(x,y)dxdy \quad (17)$$

Ces variables sont décorrélées si les fonctions propres $\Phi_n(x,y)$ sont solutions de l'équation intégrale (6).
Les fonctions de base $\Psi_n(x,y)$ sont liées aux fonctions propres $\Phi_n(x,y)$ par la relation (8).

Pour effectuer l'opération de filtrage, seules les Q premières variables aléatoires z_n et fonctions de base $\Psi_n(x,y)$ sont retenues. Les valeurs propres λ_n, obtenues par résolution du système (12), ayant préalablement été ordonnées par valeurs décroissantes, l'entier Q est choisi de telle sorte que la valeur propre λ_Q soit supérieure à un certain seuil, bien évidemment supérieur à 1 pour garantir une amélioration du rapport signal à bruit (compte tenu de (9)).

Nous allons modifier la relation (8) afin de déterminer les coefficients de Fourier $\beta_{k,l}^n$ des fonctions $\widehat{\Psi}_n(x,y)$. Ces dernières sont définies sur $\widehat{D} \times \widehat{D}$ comme suit :

$$\widehat{\Psi}_n(x,y) = \Psi_n(T-|x|, T-|y|)$$

Après intégration, par rapport aux variables x et y sur le carré $D \times D$ du plan, de la relation (8) multipliée par la fonction

bidimensionnelle :

$$\theta_{k,l}(x,y) = \cos\left(\frac{\pi k}{2T}(T-x)\right)\cos\left(\frac{\pi l}{2T}(T-y)\right)$$

nous obtenons :

$$\int_D\int_D \Psi_n(x,y)\theta_{k,l}(x,y)dxdy$$

$$= \int_D\int_D\int_D\int_D R(x-x',y-y')\Phi_n(x',y')\theta_{k,l}(x,y)dxdx'dydy' \tag{18}$$

En considérant les fonctions paires $\widehat{\Psi}_n(x,y)$, $\widehat{\Phi}_n(x,y)$, $\widehat{R}(x-x',y-y')$ et $\widehat{\theta}_{k,l}(x,y)$, la relation (17) peut être réécrite :

$$\int_{\widehat{D}}\int_{\widehat{D}} \widehat{\Psi}_n(x,y)\widehat{\theta}_{k,l}(x,y)dxdy$$

$$= \frac{1}{4}\int_{\widehat{D}}\int_{\widehat{D}}\int_{\widehat{D}}\int_{\widehat{D}} \widehat{R}(x-x',y-y')\widehat{\Phi}_n(x',y')\widehat{\theta}_{k,l}(x,y)dxdx'dydy'$$

Après identification avec les coefficients de Fourier $\beta^n_{k,l}$, $\alpha^n_{p,q}$ et $\Omega^R_{p,q,k,l}$, nous obtenons le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 4\beta^n_{0,0} = T^2\sum_{p=0}^{N}\sum_{q=0}^{N}\alpha^n_{p,q}\Omega^R_{p,q,0,0} \\ 2\beta^n_{k,0} = T^2\sum_{p=0}^{N}\sum_{q=0}^{N}\alpha^n_{p,q}\Omega^R_{p,q,k,0} \\ 2\beta^n_{0,l} = T^2\sum_{p=0}^{N}\sum_{q=0}^{N}\alpha^n_{p,q}\Omega^R_{p,q,0,l} \\ \beta^n_{k,l} = T^2\sum_{p=0}^{N}\sum_{q=0}^{N}\alpha^n_{p,q}\Omega^R_{p,q,k,l} \end{cases}$$

Intéressons-nous à présent à la relation (16). En considérant la fonction paire $\widehat{Z}^F(x,y) = Z^F(T-|x|,T-|y|)$, il est possible de modifier l'écriture de la relation (16)

$$\widehat{Z}^F(x,y) = \sum_{n=1}^{Q} z_n\widehat{\Psi}_n(x,y) \qquad \forall(x,y)\in\widehat{D}\times\widehat{D} \tag{19}$$

La fonction $\widehat{Z}^F(x,y)$ étant paire suivant x et y sur le domaine $\widehat{D}\times\widehat{D}$, son développement en série de Fourier devient le développement en série de cosinus suivant :

$$\widehat{Z}^F(x,y) = \sum_{p=0}^{N}\sum_{q=0}^{N}\vartheta^F_{p,q}\cos\left(\frac{\pi p}{2T}x\right)\cos\left(\frac{\pi q}{2T}y\right)$$

Dans ces conditions, il est possible de montrer que la relation (19) devient équivalente à :

$$\vartheta^F_{p,q} = \sum_{n=1}^{Q} z_n\beta^n_{p,q} \tag{20}$$

Pour finir, il nous reste à exprimer les coefficients z_n en fonctions des coefficients de Fourier du signal et des fonctions propres. Nous rappelons que ces variables aléatoires sont déterminées à l'aide de la relation (17).

Cette relation est équivalente à :

$$z_n = T^2\sum_{p=0}^{N}\sum_{q=0}^{N}\vartheta_{p,q}\alpha^n_{p,q} \tag{21}$$

où $\vartheta_{p,q}$ désignent les coefficients en série de cosinus de l'image avant traitement.

Les relations (20) et (21) permettent d'obtenir l'expression des coefficients en série de cosinus $\vartheta^F_{p,q}$ de l'image filtrée :

$$\vartheta^F_{p,q} = T^2\sum_{n=1}^{Q}\left[\beta^n_{p,q}\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}\vartheta_{k,l}\alpha^n_{k,l}\right]$$

Finalement l'image filtrée sera reconstruite en utilisant la relation suivante :

$$Z^F(k\Delta T, l\Delta T) = \sum_{p=0}^{N}\sum_{q=0}^{N}\vartheta^F_{p,q}\cos\left(\frac{\pi p}{2T}(T-k\Delta T)\right)\cos\left(\frac{\pi q}{2T}(T-l\Delta T)\right) \tag{22}$$

où ΔT représente le pas d'échantillonnage natif de l'image.

Principe algorithmique

• *Détermination des $\alpha^n_{p,q}$:*

Construction de $\widehat{\mathbf{M}}$ et $\widehat{\mathbf{R}}$ à partir de $\mathbf{M}$ et $\mathbf{R}$.

Détermination des matrices $\Omega^{\mathbf{M}}$ et $\Omega^{\mathbf{R}}$, de dimensions $(N+1)^2\times(N+1)^2$:

en notant $\Theta^M_{\nu_x,\nu_{x'},\nu_y,\nu_{y'}}$ les coefficients de la transformée de Fourier discrète de $\widehat{\mathbf{M}}$, $\Omega^{\mathbf{M}}$ est composée des éléments génériques $\Omega^M_{p,q,k,l}$ obtenus comme suit :

$$\Omega^M_{p,q,k,l} = \frac{1}{4T^2}\,\Theta^M_{\nu_x,\nu_{x'},\nu_y,\nu_{y'}}\Big|_{\nu_x=\frac{\pi k}{4T},\nu_{x'}=\frac{\pi p}{4T},\nu_y=\frac{\pi l}{4T},\nu_{y'}=\frac{\pi q}{4T}}$$

A l'élément générique de la matrice $\Omega^{\mathbf{M}}$ correspondant à la $r^{\text{ème}}$ ligne et à la $c^{\text{ème}}$ colonne est associé le coefficient $\Omega^M_{p,q,k,l}$ dont les indices p, q, k et l vérifient :

$$\begin{cases} r = (N+1)p+q+1 \\ c = (N+1)k+l+1 \end{cases}$$

pour p, q, k et l prenant leur valeur de 0 à N.
Il en est de même pour $\mathbf{\Omega^R}$.

Diagonalisation du faisceau de matrices $\mathbf{\Omega^M}\alpha_{\mathbf{n}} = \lambda_n \mathbf{\Omega^R}\alpha_{\mathbf{n}}$, où le vecteur propre $\alpha_{\mathbf{n}}$ est composé des $(N+1)^2$ coefficients $\alpha^n_{p,q}$.

• *Détermination des* $\beta^{\mathbf{n}}_{\mathbf{k,l}}$ *:*

En notant $\mathbf{C}$ la matrice diagonale définie comme suit :

$$\mathbf{C} = \mathrm{diag}\,[(0.25, \underbrace{0.5, \cdots, 0.5}_{2N \text{ termes}}, \underbrace{1, \cdots, 1}_{N^2 \text{ termes}})],$$

le vecteur $\beta_{\mathbf{n}}$ composé des éléments $\beta^n_{k,l}$ est obtenu par le produit matriciel : $\beta_{\mathbf{n}} = T^2 \mathbf{C}\, \mathbf{\Omega^R}\, \alpha_{\mathbf{n}}$.

• *Détermination des* $\mathbf{z_n}$ *:*

Construction de $\widehat{\mathbf{Z}}$ à partir de $\mathbf{Z}$.

En notant $\Theta^Z_{\nu_x,\nu_y}$ les coefficients de la transformée de Fourier discrète bidimensionnelle de $\widehat{\mathbf{Z}}$, les coefficients $\vartheta_{p,q}$ sont obtenus comme suit :

$$\vartheta_{p,q} = \frac{1}{4T^2}\, \Theta^Z_{\nu_x,\nu_y}\Big|_{\nu_x = \frac{\pi p}{4T},\, \nu_y = \frac{\pi q}{4T}}$$

Ces coefficients sont alors rangés dans le vecteur ϑ de dimensions $1 \times (N+1)^2$.

Soit $\mathbf{X}^\alpha$ la matrice de dimensions $(N+1)^2 \times Q$ ayant pour colonnes les $\alpha_{\mathbf{n}}$. Le vecteur $\mathbf{z}$, de dimensions $1 \times Q$, constitué des variables aléatoires z_n est obtenu comme suit :

$$\mathbf{z} = T^2 \vartheta\, \mathbf{X}^\alpha$$

• *Détermination des* $\vartheta^{\mathbf{F}}_{\mathbf{p,q}}$ *:*

Soit $\mathbf{X}^\beta$ la matrice de dimensions $Q \times (N+1)^2$ ayant pour lignes les $\beta_{\mathbf{n}}$. Le vecteur $\vartheta^{\mathbf{F}}$, de dimensions $1 \times (N+1)^2$, constitué des coefficients $\vartheta^F_{p,q}$ est obtenu comme suit :

$$\vartheta^{\mathbf{F}} = \mathbf{z}\, \mathbf{X}^\beta$$

• Reconstruction de l'image filtrée :

Application de la relation 22.

4.2. cas d'un bruit blanc

Dans le cas d'un bruit à corrélation microscopique, la relation (15) devient :

$$Z^F(x,y) = \sum_{n=1}^{Q} z_n \Phi_n(x,y) \qquad \forall (x,y) \in D \times D$$

En adoptant un raisonnement similaire à celui développé dans le cas d'un bruit coloré, nous obtenons pour expression des coefficients de Fourier $\vartheta^F_{p,q}$ de l'image filtrée :

$$\vartheta^F_{p,q} = T^2 \sum_{n=1}^{Q} \left[\alpha^n_{p,q} \sum_{k=0}^{N} \sum_{l=0}^{N} \vartheta_{k,l} \alpha^n_{k,l} \right]$$

L'image filtrée est alors reconstruite avec la même relation que dans le cas d'un bruit coloré (relation (21)).

Ces nouvelles écritures du développement de Karhunen-Loève et du filtrage adapté stochastique ont été validées dans le cadre de l'interpolation d'images [7, 8].

5. adaptation de la taille des imagettes et adaptation sur la puissance du signal utile

Nous sommes conscients du fait qu'une image quelconque n'est pas une réalisation d'un processus stationnaire. Bien entendu certaines images peuvent être considérées comme telles. Il en est ainsi pour les images d'état de surface de la mer, pour certaines images satellitaires, c'est-à-dire pour toutes les images pouvant être assimilées à une texture. Mais en général, une image ne peut être considérée comme une réalisation d'un processus stochastique, stationnaire. En revanche, après une opération de segmentation, on définit souvent des zones texturées. Une zone particulière de l'image (une imagette) peut donc être considérée comme une réalisation d'un processus bidimensionnel, stochastique et stationnaire. Les dimensions de ces imagettes doivent bien évidemment être représentatives de la longueur de cohérence de la texture qu'elles décrivent. Certaines zones de l'image doivent donc être représentées par des imagettes de grande taille alors que pour d'autres il est nécessaire d'avoir recours à des imagettes de petite taille. Pour ces raisons, nous allons proposer ici une méthode originale permettant de segmenter l'image en imagettes de dimensions différentes en fonction des zones texturées. Ce principe repose sur une métho-de originale d'extraction de contours fiable dans le cas d'images détériorées par la présence de termes perturbateurs.

5.1. extraction de contours

Il existe dans la littérature de nombreuses méthodes d'extraction de contours. Pour la plupart des techniques proposées à ce jour, il s'agit d'utiliser des filtres de dérivation du 1er ordre (par exemple : le gradient) ou du 2nd ordre (par exemple : le Laplacien). Mais ces méthodes ne donnent pas, le plus souvent, de bons résultats sur des

images détériorées par la présence de termes perturbateurs. On a alors recours à une opération de seuillage et un suivi de contours afin d'atténuer l'effet néfaste du bruit. De nouvelles approches en extraction de contours ont été proposées depuis quelques années. Ces dernières procèdent par optimisation de critères prenant en compte un modèle prédéfini du contour à détecter. Ces dernières techniques ce sont révélées performantes et ont permis l'obtention de résultats de bonne qualité (voir : [Boss, Canny, Cheh, Deri]).

Nous ne prétendons pas ici développer une méthode qui se veut plus performante que ces dernières approches. Nous recherchons simplement une méthode d'extraction de contours qui soit simple à mettre en œuvre, robuste dans le cas de signaux bruités et de faible coût en temps de calcul et en mémoire.

Nous allons dans cette partie détailler les différentes phases du traitement permettant l'obtention des contours d'une image et ceci dans le cas d'une image en présence d'un bruit à corrélation microscopique de faible puissance. Les résultats obtenus sur des images dont le signal utile est détérioré par la présence d'un bruit coloré seront présentés dans la partie 5 dans le cadre d'applications du filtrage adapté stochastique adaptatif.

Si nous considérons une image bruitée, les perturbations sont principalement gênantes dans les zones homogènes de l'image, en revanche, elles altèrent peu la lecture des zones de changement brusque de niveaux de gris. La puissance de l'observation est donc nettement plus faible dans les zones homogènes que sur les contours. Une image représentative des puissances locales devrait ainsi permettre d'améliorer la lisibilité des contours. Cette dernière sera obtenue en effectuant un balayage par fenêtre glissante. Nous déterminerons numériquement la puissance de l'observation, pour chaque imagette ainsi constituée. Ces différentes puissances seront alors rangés dans une matrice, la visualisation de cette dernière révélant les contours de l'image traitée. Considérons l'image « Lena » codée sur 8 bits (soit 256 niveaux de gris) présentée figure 1.

En appliquant le traitement proposé avec des imagettes de dimensions 5×5 pixels, pour respecter au mieux la longueur de cohérence du signal, nous obtenons l'image des rapports signal à bruit locaux, notée $I^{\frac{F}{B}}$. Cette dernière est donnée figure 2 après avoir ramené sa dynamique entre 0 et 255.

L'étude de cette figure montre l'efficacité de la méthode proposée. Effectivement, les contours de l'image Lena sont dans leur quasi-totalité restitués. Il est bien évident que ce traitement ne correspond pas à un extracteur de contours au sens strict du terme, l'image après traitement présentant plus de deux niveaux de gris. Pour restituer une image ne possédant que deux niveaux de gris, il serait intéressant d'avoir recours à un seuil, dont le choix serait lié à l'histogramme des niveaux de gris. Malheureusement en raisonnant comme tel, il y a soit apparition d'un fort épaississement de ces contours qui perdent alors en précision, soit disparition de certains contours. Pour ces raisons, nous allons utiliser en aval de ce traitement les masques de Frei et Chen [11]. Ces derniers ont proposé en 1977 une formulation vectorielle permettant la détection au sein

Figure 1. – Image Lena 512×512 **pixels.**

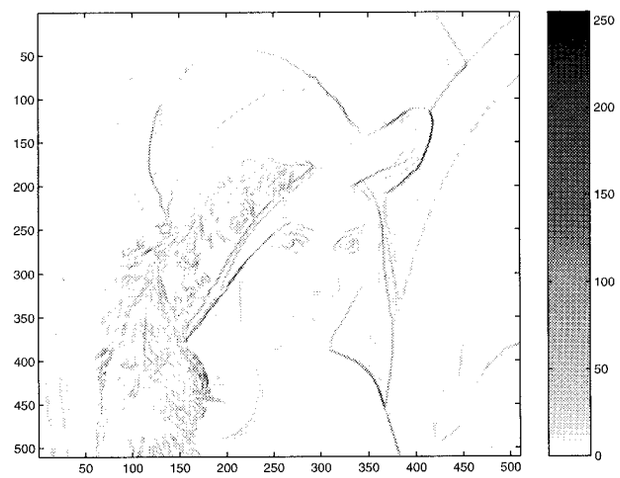


Figure 2. – Image $I^{\frac{F}{B}}$ 512×512 **pixels.**

d'une image de lignes, de changements de niveaux ou d'irrégularités ponctuelles isolées. Ils ont ainsi défini neuf masques. Nous n'utiliserons que les quatre destinés à la détection de lignes qui sont donnés figure 3.

En notant $I_{W_i}^{\frac{S}{B}}$ le résultat obtenu après convolution de l'image des rapports signal à bruit locaux avec le masque W_i, nous pouvons définir l'image I^L représentative des lignes de $I^{\frac{F}{B}}$ comme suit :

$$I^L = \sum_{i=1}^{4} I_{W_i}^{\frac{S}{B}}$$

En considérant l'histogramme des niveaux de gris de cette image, la dynamique de cette dernière ayant été ramenée entre 0 et 255, nous pouvons définir un seuil au-delà duquel les pixels prennent 1 pour valeur, le reste de l'image admettant 0 pour valeur. On définit ainsi les contours de l'image Lena donnée figure 1. Le résultat obtenu après ce traitement est présenté figure 4.

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ W_1	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ W_2
$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ W_3	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ W_4

Figure 3. – Masques de Frei et Chen pour la détection de lignes.

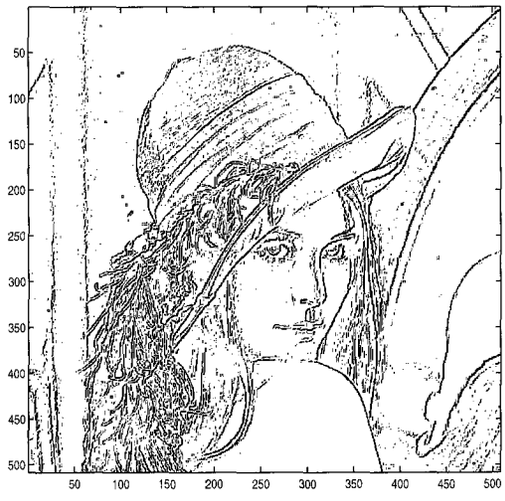


Figure 4. – Contours de l'image Lena 512×512 **pixels.**

Ce traitement permet de restituer assez fidèlement les contours d'une image, sans en épaissir les traits. Il bien évident qu'il est possible de retenir plus ou moins de contours en fonction du seuil choisi. Le seuil minimal retenu correspond au niveau de gris le plus représenté sur l'image I^L. Plus le seuil choisi est élevé par rapport à ce seuil minimal, plus les contours secondaires disparaissent, ne laissant visibles que les contours principaux. Nous verrons dans la partie 5 que cette méthode reste fiable dans le cas d'images dont le signal utile est détérioré par la présence d'un bruit coloré.

5.2. adaptation de la taille des imagettes

Pour pouvoir appliquer le filtrage adapté stochastique sur une image, il importe que la condition de stationnarité soit vérifiée. En traitement d'images, on a recours classiquement à un traitement par fenêtre glissante, afin de segmenter l'image en imagettes de taille identique. On considère alors que ces dernières sont représentatives d'une texture. Le choix des dimensions pour ces imagettes est alors conditionné par la valeur moyenne de la longueur de cohérence des textures présentes sur l'image. Si bien que ces dimensions seront pour certaines imagettes bien représentatives de la longueur de cohérence de la texture étudiée, alors que pour d'autres cela ne sera absolument pas le cas. Le résultat obtenu après un tel traitement sera de manière générale de qualité médiocre. Pour cette raison, nous allons segmenter l'image avec des imagettes de dimensions variables en fonction de la texture étudiée.

Pour définir les dimensions adéquates des imagettes en fonction de la zone étudiée, nous n'allons pas raisonner sur l'image mais sur ses contours. Nous allons prendre pour dimensions minimales de ces imagettes 3×3 pixels, afin de décrire au mieux les zones de contours de l'image et nous allons effectuer un balayage de haut en bas et de gauche à droite. Considérons une imagette de dimensions 3×3 pixels dont le sommet en haut à gauche est localisé par ses coordonnées (i, j). Nous allons augmenter les dimensions de cette dernière jusqu'à rencontrer un contour fixant ainsi la taille de l'imagette pour cette zone. L'imagette ainsi constituée sera alors filtrée et nous ne retiendrons que la valeur du pixel central. Puis nous allons faire de même pour l'imagette suivante, toujours de dimensions natives 3×3 pixels, dont le sommet a pour coordonnées $(i, j+1)$. Il en sera ainsi jusqu'au moment où toute l'image aura été décrite.

5.3. adaptation sur la puissance du signal utile

Pour chaque imagette extraite de l'observation, nous allons appliquer la méthode de filtrage proposée dans la partie 3. Chaque imagette filtrée sera reconstruite avec un nombre Q de fonctions propres, différent d'une imagette à l'autre. Le choix de ce nombre dépend du rapport signal à bruit de l'imagette étudiée. Nous avons montré que le rapport signal sur bruit après traitement de la $n^{\text{ième}}$ composante de l'imagette s'écrit en fonction du produit de la valeur propre λ_n par le rapport signal sur bruit avant traitement (relation (9)).

Ce rapport signal sur bruit natif sera estimé en déterminant numériquement la puissance du bruit dans une zone homogène de l'image native. Cette zone pourra être sélectionnée automatiquement, c'est-à-dire sans interaction humaine, en ayant recours par exemple à l'image I^L dont sera extraite la plus grande imagette possible ne présentant pas de contours. La puissance du signal sera quant à elle estimée sur l'imagette étudiée et sera donc différente d'une imagette à l'autre. Les valeurs propres λ_n ayant été classées par valeurs décroissantes, le nombre Q est alors choisi de telle sorte que $K_Q \geq$ seuil. On pourra par exemple choisir cet

entier Q de telle sorte que le rapport signal sur bruit après traitement soit supérieur à 0 dB, garantissant une puissance du signal supérieure à celle du bruit. Chaque imagette sera donc reconstruite avec un nombre Q de fonctions propres associées aux valeurs propres vérifiant :

$$\left.\frac{S}{B}\right|_{\text{après traitement}} = \left.\frac{S}{B}\right|_{\text{avant traitement}} \times \lambda_n \geq 1$$

Une imagette présentant un rapport signal sur bruit favorable sera donc traitée avec un plus grand nombre de fonctions propres que dans le cas d'un rapport signal sur bruit défavorable, ceci afin de restituer au mieux le signal utile présent. Effectivement, si le rapport signal sur bruit natif est favorable, c'est-à-dire par exemple supérieur au seuil choisi, un plus grand nombre de valeurs propres vérifiera la relation (9) entraînant une reconstruction de l'imagette avec un nombre plus important de fonctions propres.

6. expérimentations

Nous présentons, dans cette partie, deux exemples d'applications du filtrage adapté stochastique adaptatif. Pour le premier exemple, le signal bidimensionnel à traiter est une image simulée, construite en superposant une image représentative d'une texture perturbatrice stationnaire et l'image Lena. Connaissant le signal utile et le bruit, nous serons en mesure de quantifier l'apport de notre traitement en terme d'amélioration du rapport signal à bruit. Pour le deuxième exemple, nous allons appliquer notre traitement sur une donnée réelle, une image issue de l'imageur SAR ERS-1.

6.1. exemple d'application sur une image simulée

Nous avons vu que la mise en œuvre de la méthode de filtrage proposée nécessitait d'avoir une connaissance *a priori* des fonctions d'autocorrélation du signal utile et du bruit. Il est bien évident que ces données sont facilement accessibles compte tenu du fait que nous appliquons notre traitement sur une image simulée. Mais pour cette expérimentation, nous nous sommes placés dans le cas d'une absence de connaissances quant au signal utile et au bruit et nous avons choisi de modéliser ces fonctions d'autocorrélation en ne considérant que l'image observée. Ainsi, la fonction d'autocorrélation du bruit sera déterminée numériquement dans une zone homogène de l'observation, c'est-à-dire une zone de l'image ne présentant *a priori* aucune information sur le signal utile (cette zone homogène sera déterminée automatiquement en appliquant le même procédé que pour l'estimation de la puissance du bruit). L'autocorrélation du bruit sera calculée en moyennant plusieurs réalisations. Quant à la fonction d'autocorrélation du signal, nous avons choisi de prendre le modèle le plus général

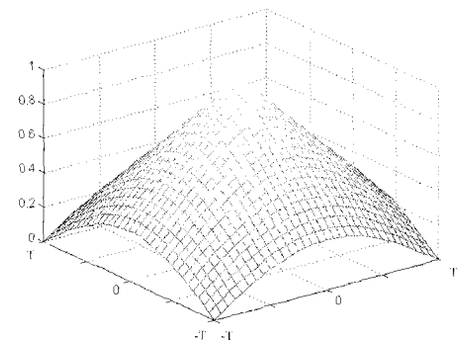


Figure 5. – Fonction d'autocorrélation normalisée du signal utile.

possible afin qu'il puisse s'appliquer aux différentes textures de l'image. Il est classique de modéliser en traitement du signal mono-dimensionnel l'autocorrélation du signal par une fonction triangulaire. En effet, la densité spectrale de puissance associée à une telle fonction d'autocorrélation correspond à des signaux dont l'énergie est principalement répartie dans les basses-fréquences du spectre, ce qui est généralement le cas dans la pratique. Nous étendrons donc ce modèle aux signaux bidimensionnels. De plus, afin de ne privilégier aucune direction particulière de la texture décrite par l'imagette, le modèle choisi doit être isotrope. Compte tenu de ces différentes remarques, nous avons choisi de représenter l'autocorrélation du signal par le modèle présenté figure 5.

Nous allons donc traiter l'observation donnée figure 6 correspondant à une image détériorée par des termes perturbateurs additifs.

Pour pouvoir utiliser l'adaptation sur la taille des imagettes, nous avons vu qu'il était nécessaire d'extraire les contours de l'image à traiter. Nous avons donc appliqué le traitement proposé dans la partie 4.1 en utilisant des imagettes de dimensions 7×7 pixels pour le calcul de l'image représentative des rapports signal à bruit locaux. Nous avons choisi de telles dimensions d'imagettes afin de respecter la longueur de cohérence du bruit. Les contours extraits de l'image donnée figure 6 sont présentés figure 7.

Figure 6. – Image Lena en présence de termes perturbateurs additifs.

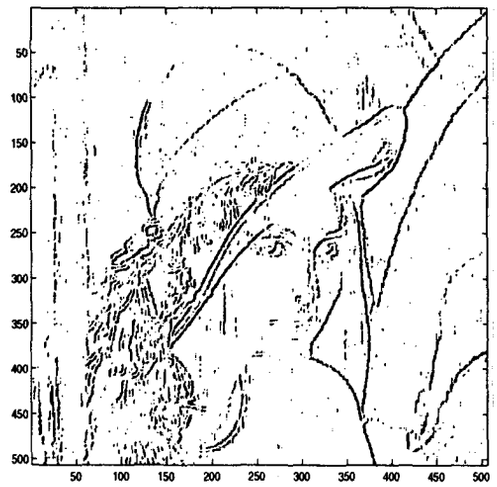


Figure 7. – Contours de l'image Lena détériorée additivement 512×512 **pixels.**

Cette méthode d'extraction de contours reste fiable bien qu'il y ait une perte de certains détails. En revanche, la quasi-totalité des contours principaux est présente et le trait reste fin.

Disposant de ces contours, il est alors possible de rechercher les tailles adéquates des imagettes pour traiter chaque zone de l'image. Nous nous sommes imposés pour dimensions minimales 3×3 pixels et pour dimensions maximales 17×17 pixels. Il est possible de choisir une taille maximale supérieure à 17×17 pixels, mais cela n'aurait aucune incidence sur la qualité de l'image restituée et n'aurait pour effet qu'une augmentation du temps de calcul. En effet, l'intérêt principal de ce pré-traitement est de délimiter précisément les zones présentant une faible longueur de cohérence. Nous proposons figure 8 différentes images représentatives de la position (en noir) des pixels centraux des imagettes en fonction de la taille de ces dernières.

Cette méthode de découpage par imagettes de dimensions différentes se révèle efficace. Effectivement, nous pouvons constater en observant la figure 8 que les zones homogènes seront traitées avec des imagettes de plus ou moins grande taille en fonction de leur superficie, et qu'en revanche les contours seront traités avec des imagettes de petites dimensions. Ainsi, les contours seront traités avec des imagettes de dimensions 3×3 pixels (figure 8.a). Plus la distance entre le pixel central de l'imagette et le contour sera importante, plus les dimensions de l'imagette seront grandes (figures 8.b à 8.h). Pour finir, les zones homogènes de grande taille seront traitées avec des imagettes de dimensions 17×17 pixels (zones noires de la figure 8.i). Contrairement à la continuité de représentation entre les figures 8.a à 8.h, il apparaît dans la figure 8.i des zones noires qui constituent une discontinuité de représentation. Cette dernière s'explique tout simplement en remarquant que nous avions choisi 17×17 pixels pour taille maximale des imagettes, aussi toutes les zones de l'image, n'étant pas encore décrite par des imagettes, le sont avec des imagettes de dimensions 17×17 pixels, d'où les zones noires.

Un tel pré-traitement permettra donc la restitution d'une image nette après filtrage, c'est-à-dire pour laquelle le signal utile n'apparaîtra pas lissé.

Pour pouvoir appliquer le filtrage proposé, il ne reste plus qu'à déterminer la fonction d'autocorrélation du bruit. Le modèle, obtenu en appliquant le raisonnement exposé en début de chapitre, est présenté figure 9.

Disposant de toutes les données nécessaires, nous pouvons à présent filtrer l'image donnée figure 6. Le nombre de fonctions propres retenues pour chaque imagette a été choisi de telle sorte que le rapport signal sur bruit des imagettes après traitement soit strictement supérieur à 0 dB, garantissant ainsi une puissance du signal supérieure à celle du bruit. L'image restituée après filtrage est présentée figure 10.

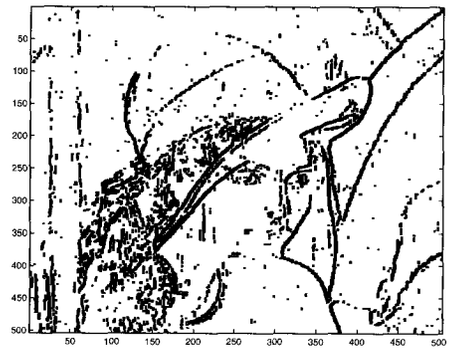
L'étude de ce résultat montre que le traitement proposé est performant dans le cas de termes perturbateurs additifs. En effet, il permet d'éliminer la quasi-totalité du bruit sans altérer la netteté de l'image restituée. Visuellement, les zones texturées et les contours de l'image permettent de juger de la qualité de la restitution (par exemple : la texture des plumes du chapeau). De plus, en considérant l'image « Lena » représentative du signal utile donnée figure 1, nous constatons que seuls certains détails ont disparu, notamment les plis du bandeau présent sur le chapeau, car ces derniers n'apparaissaient pas sur les contours extraits de l'image.

Afin de quantifier la qualité de ce résultat, il est apparu intéressant de réaliser une étude sur les différents rapports signal à bruit locaux avant et après traitement. Comme nous avons pu le voir, l'image traitée est une donnée simulée, nous disposons donc du signal natif et du bruit. Le traitement utilisé pour l'image donnée figure 6 a été appliqué avec les mêmes conditions expérimentales (taille des imagettes, nombre Q de fonctions propres pour la reconstruction) sur l'image native et sur l'image représentative du bruit. Les résultats obtenus ont été segmentés en imagettes et nous avons calculé numériquement la puissance de chacune d'entre elles. Le rapport des puissances obtenues à partir du signal natif sur celles obtenues à partir du bruit permet d'obtenir une estimation des rapports signal à bruit locaux. Ces résultats sont présentés à la figure 11.

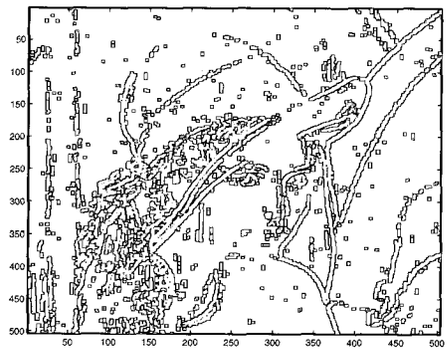
L'analyse de cette figure montre que le filtrage adapté stochastique bidimensionnel adaptatif permet d'améliorer fortement les rapports signal à bruit locaux. En effet, avant traitement il y a 97% des imagettes présentant un rapport signal à bruit défavorable (inférieur à 0 dB) de l'ordre de -17 dB en moyenne. Après traitement, il n'y a plus que 50% des imagettes présentant un rapport signal à bruit défavorable de l'ordre -8 dB en moyenne.

Le rapport signal à bruit étant peu significatif de la qualité visuelle d'une image, nous avons également déterminé la valeur du peak SNR (PSNR) pour cette image :

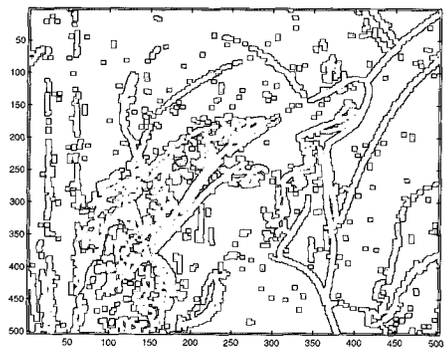
$$PSNR = 20 \log_{10} \left(\frac{255}{\sqrt{EQM}} \right)$$



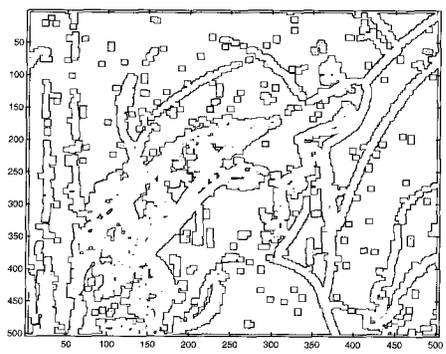
a) Imagettes 3 × 3 pixels



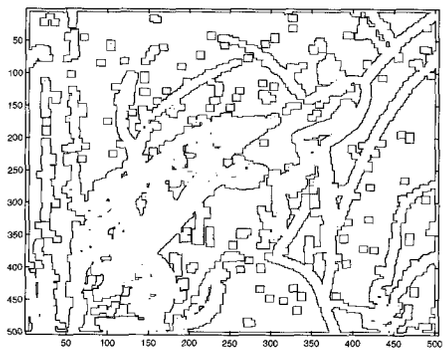
b) Imagettes 5 × 5 pixels



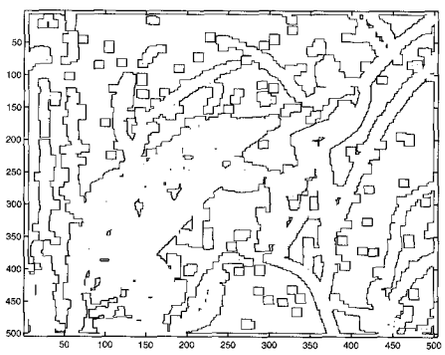
c) Imagettes 7 × 7 pixels



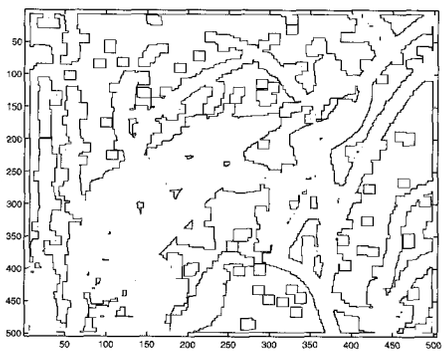
d) Imagettes 9 × 9 pixels



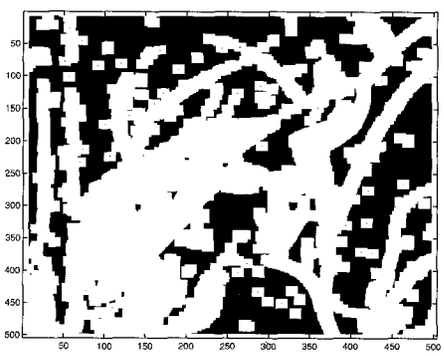
e) Imagettes 11 × 11 pixels



f) Imagettes 13 × 13 pixels



g) Imagettes 15 × 15 pixels



h) Imagettes 17 × 17 pixels

Figure 8. – Position des pixels centraux des imagettes.

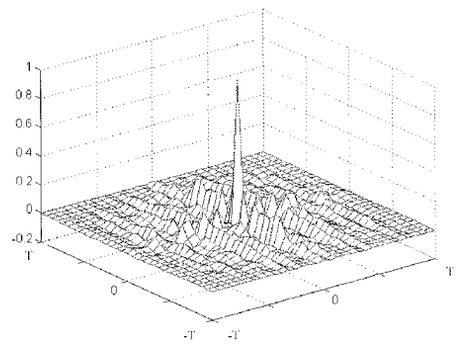


Figure 9. – Fonction d'autocorrélation normalisée du bruit.

Figure 10. – Image Lena restaurée 512×512 **pixels.**

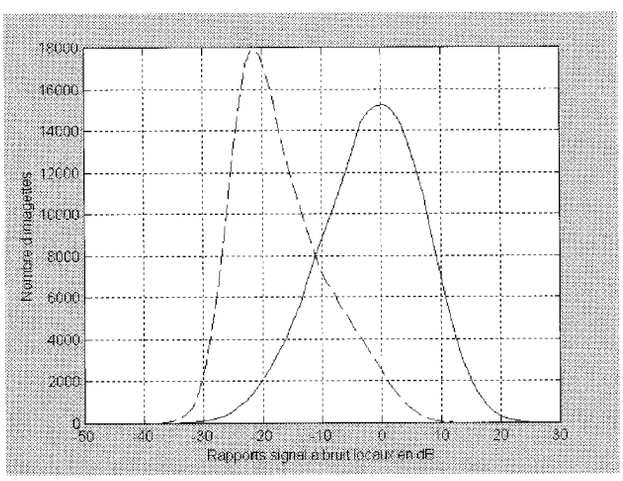


Figure 11. – Rapports signal à bruit locaux
— — — : image native. ____ : image filtrée

où EQM représente l'erreur quadratique moyenne entre le signal utile (l'image native, figure 1) et le signal dont le PSNR est recherché. Nous avons obtenu un PSNR de 28 dB pour l'image restaurée, alors que l'observation présentait un PSNR de 19 dB, soit une amélioration de 9 dB.

Ce traitement permet donc de restaurer une image détériorée par la présence de termes perturbateurs additifs, sans en altérer la netteté. De plus, la formulation de ce traitement étant à base de transformées de Fourier, le temps de calcul est relativement rapide (nombre d'opérations en virgule flottante (instruction « flops » de Matlab) : 1.3×10^{10} , temps CPU : 30 minutes, simulation effectuée sous le logiciel Matlab, sur un Pentium II, 400 MHz, avec 128 Mo de RAM). Nous allons, à présent, nous intéresser à son application dans le cas d'une donnée réelle et pour un bruit multiplicatif.

6.2. exemple d'application sur une donnée réelle

Afin de valider le traitement proposé dans le cas d'une donnée réelle, nous l'avons appliqué sur une image SAR générée par l'imageur ERS-1, représentant une portion du fleuve Amazone. Cette image est détériorée par la présence d'un bruit granulaire multiplicatif, le speckle (le caractère multiplicatif du speckle a fait l'objet de nombreuses études, notamment [22]). La présence de ces perturbations affectent la lisibilité de certains détails de cette image (certains bras du fleuve, quelques reliefs, ...). Cette image est présentée figure 12.

L'autocorrélation du bruit a été estimée dans une zone homogène de l'image déterminée automatiquement. Le modèle obtenu en moyennant plusieurs réalisation est présenté figure 13.

Les contours ont été extraits avec des imagettes de dimensions 5×5 pixels respectant ainsi la longueur de cohérence présumée du bruit. Le traitement a été appliqué avec une valeur du seuil pour le rapport signal à bruit après traitement égale à 0 dB. Le résultat obtenu est présenté figure 14.

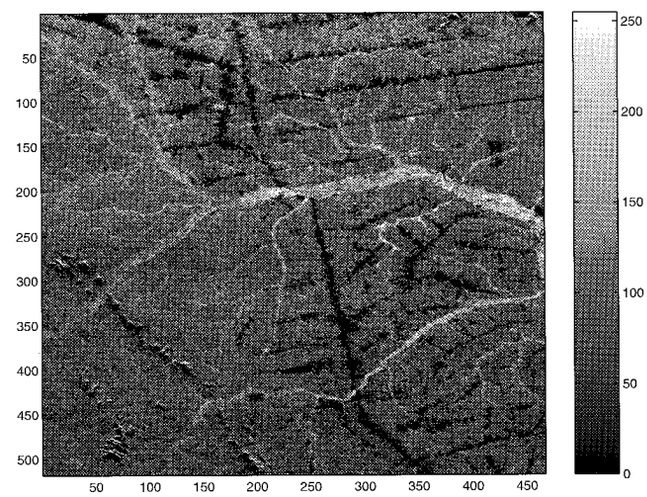


Figure 12. – Image SAR ERS-1 510×459 **pixels.**

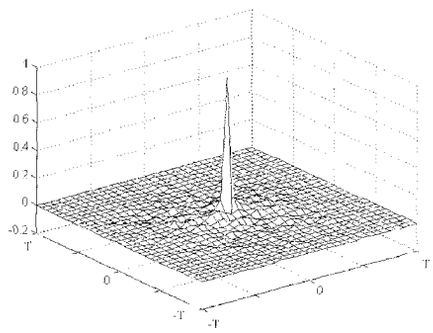


Figure 13. – Fonction d'autocorrélation normalisée du bruit.

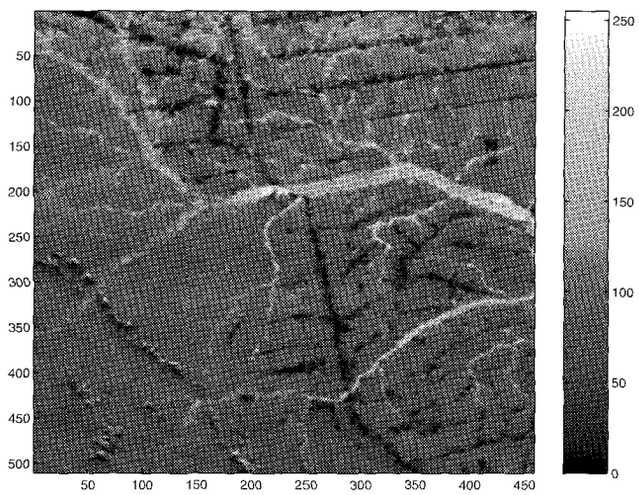


Figure 14. – Image SAR ERS-1 filtrée. 510×459 **pixels**

Nous pouvons constater visuellement l'efficacité du traitement proposé. Effectivement certains détails qui étaient difficilement visibles apparaissent clairement sur l'image restaurée. Ainsi, les affluents du fleuve sont à présent facilement repérables. Il en est de même pour certains détails du relief (en bas à gauche de l'image).

Afin d'évaluer les performances de la méthode proposée en terme de réjection du bruit, nous avons calculé le niveau de speckle de l'observation et de l'image restaurée. Ce niveau de speckle, critère de qualité en imagerie SAR, est évalué par la détermination du coefficient de variation calculé sur plusieurs zones homogènes de l'image. En notant M le nombre de zones homogènes I_i prises en compte, nous avons :

$$C = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} \frac{\sigma_{I_i}}{E\{I_i\}}$$

En appliquant cette relation, nous avons trouvé pour coefficients de variation 0.4530 pour l'observation et 0.0241 pour l'image restaurée. Ces résultats confortent les observations faites sur le plan visuel.

7. conclusions

Ce traitement adaptatif dont le principe repose sur le filtrage adapté stochastique permet d'extraire le signal utile présent au sein d'une image détériorée par la présence de termes perturbateurs.

Les expérimentations effectuées sur des signaux réels ou simulés ont révélé l'efficacité de ce traitement. Les images restaurées permettent d'améliorer la lisibilité des détails et ne présentent pas un phénomène de lissage du signal utile. De plus, la proposition d'une écriture ne faisant intervenir que des transformées en cosinus discrètes pourra permettre son implantation au sein de cartes dédiées au traitement d'images. Nous nous sommes également intéressés à la mise au point d'une méthode originale d'extraction de contours simple dans sa mise en œuvre, peu sensible au bruit et de faible coût en temps de calcul et en mémoire. Cependant certains contours sont absents et d'autres représentatifs du bruit apparaissent. Ces défauts entraînent une dégradation du résultat après filtrage, compte tenu du fait que les contours conditionnent les dimensions des imagettes retenues pour le traitement. Il serait donc intéressant d'avoir recours aux dernières techniques d'extraction de contours qui utilisent un modèle prédéfini du contour à détecter. Cet apport risque d'augmenter le temps de calcul mais permettrait d'améliorer les résultats après filtrage. De plus, pour pouvoir situer notre traitement par rapport aux méthodes les plus récentes et les plus performantes de filtrage d'images, il serait intéressant d'effectuer une étude comparative avec ces différentes méthodes. Ainsi, on pourrait envisager de comparer notre traitement aux approches basées sur le modèle LIP (Logarithmic Image Processing, voir notamment [13], [19]), aux traitements par ondelettes ou paquets d'ondelettes (par exemple : [14]) et aux méthodes basées sur la représentation multi-échelle (par exemple : [20]).

8. Remerciements

Je tiens à remercier les experts qui par leurs remarques pertinentes ont permis d'améliorer la qualité de cet article.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.-F. Blinn, *What's the deal with the DCT?*, IEEE Computer Graphics & Applications, pp. 78-83, Juillet 1993.

[2] N. Boccara, *Analyse fonctionnelle - une introduction pour les physiciens*, Ellipses, Paris, 1984.

[3] P.-L. Bossart, D. David, J.-M. Dinten, J.-M. Chassery, *Détection de contours réguliers dans des images bruitées et texturées : une approche par contours actifs multiéchelle*, Traitement du Signal, Vol. 14, N° 2, pp. 209-225, 1997.

[4] J.-F. Canny, *A computational approach to edge detection*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. 8, N° 6, pp. 679-698, Novembre 1987.

[5] J.-F. Cavassilas, B. Xerri, *Extension de la notion de filtre adapté. Contribution à la détection de signaux courts en présence de termes perturbateurs*, Traitement du Signal, Vol. 10, N° 3, pp. 215-221, 1993.

[6] A. Chéhikian, *Filtres récursifs pour l'estimation du gradient et la détection de contours par interpolation spline*, Traitement du signal, Vol. 14, N° 1, pp. 29-42, 1997.

[7] P. Courmontagne, J.-F. Cavassilas, *Une nouvelle écriture du développement de Karhunen-Loève. Application à l'interpolation d'images*, Colloque GRETSI, Grenoble, pp. 455-458, 1997.

[8] P. Courmontagne, J.-F. Cavassilas, *An interpolation-filtering method for noise-corrupted images*, Colloque Digital and Signal Processing, Santorin, Vol. II, pp. 1091-1094, Juillet 1997.

[9] P. Courmontagne, *Interpolation d'un signal bidimensionnel en présence de termes perturbateurs*, Mémoire de thèse, Laboratoire MS-GESSY, Toulon, Juin 1997.

[10] R. Deriche, *Using Canny's criteria to derive a recursively implemented optimal edge detector*, International Journal of Computer Vision, Vol. 1, N° 2, pp. 167-187, Mai 1987.

[11] R.-C. Gonzalez, P. Wintz, *Digital image processing*, Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1983.

[12] M. Grandchamp, J.-F. Cavassilas, *Improved mutlilook tchnics applied to complex SAR images*, ICASSP, vol. 4, pp. 2821-2824, Munich, Avril 1997.

[13] M. Jourlin, J.-C. Pinoli, *A model for logarithmic image processing*, J. Macroscopy, Vol. 149, N° 1, pp. 21-35, Janvier 1988.

[14] J. Kalifa, S. Mallat, B. Rougé, *Restauration d'images par paquets d'ondelettes*, Colloque GRETSI, Grenoble, pp. 1339-1342, 1997.

[15] M. Krasnov, A. Kisselev, G. Makarenko, *Equations intégrales*, Edition de Moscou, 1977.

[16] J.-S. Lee, *Digital image enhancement and noise filtering by use of local statistics*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, PAMI-2, pp. 165-168, 1980.

[17] C. Lévèque, J.-F. Cavassilas, *Généralisation du concept de filtrage adapté, application au filtrage d'images SAR d'états de surface de la mer*, 14ième Colloque GRETSI, Juan-les-Pins, Vol. 1, pp. 539-543, 1993.

[18] C. Lévèque, *Une extension du filtre adapté bidimensionnel - Applications aux images radar à ouverture synthétique*, Mémoire de thèse, Laboratoire MS-GESSY, Toulon, 1994.

[19] F. Mayet, J.-C. Pinoli, M. Jourlin, *Justification physique et applications du modèle LIP pour le traitement des images obtenues en lumière transmise*, Traitement du Signal, Vol. 13, N° 3, pp. 251-262, 1996.

[20] A. Serir, A. Serir, B. Sansal, *Restauration d'images SAR ERS-1 par une méthode multi-échelle*, Colloque GRETSI, Grenoble, pp. 1229-1232, 1997.

[21] H.-L. Van Trees, *Detection, estimation and modulation theory*, Part I, John Wiley & Sons, New-York, 1968.

[22] M. Tur, K.-C. Chin, J.-W. Goodman, *When is speckle noise multiplicative?*, Applied optics, Vol. 21, N° 7, pp. 1157-1159, Avril 1982.

[23] P.-F. Yan, C.-H. Chen, An algorithm for filtering multiplicative noise in wide range, *Traitement du Signal, Vol. 3, N° 1, pp. 91-97, 1986.*

Manuscrit reçu le 20 juillet 1998.

L' AUTEUR

Philippe COURMONTAGNE

DEA de Propagation, Télécommunication, Télédétection des universités de Nice Sophia-Antipolis et Toulon, Docteur de l'université de Toulon et du var, spécialisté physique en 1997. Il effectue actuellement un post-doctorat au sein du laboratoire MS-GESSY où il s'intéresse aux problèmes liés à la décomposition des signaux, à la détection et la restauration d'un signal utile présent au sein d'une observation bruitée avec des applications aux signaux bidimensionnels.