

# Calcul des variations et analyse spectrale : équations de Fourier et de Burgers pour modèles autorégressifs régularisés

## Calculus of variations and spectrum analysis : Fourier and Burgers equations for regularized autoregressive models

par Frédéric BARBARESCO

THALES AIR DEFENCE, RD/RDTA (ex THOMSON-CSF AIRSYS)  
Unité de Développement Radar, Direction Technique Opérationnelle  
Service Algorithmie & Études Fonctionnelles  
7/9 rue des mathurins, 92223 Bagneux Cedex  
e-mail : frederic.barbaresco@airsys.thomson-csf.com

### *résumé et mots clés*

Nous proposons une reformalisation de l'analyse spectrale autorégressive régularisée dans le cadre de l'approche variationnelle en considérant le polynôme autorégressif comme une transformation du cercle complexe unité en une courbe paramétrique fermée et orientée dans le plan complexe (théorie globale des courbes planes fermées : classe d'équivalences d'immersions du cercle complexe unité dans le plan Euclidien). Nous montrons que l'Equation d'Euler-Lagrange associée nous ramène à la solution par moindres carrés régularisés classique. Nous posons ensuite le problème sous une forme géométrique intrinsèque pour laquelle la solution est définie comme une géodésique minimale particulière dont la métrique dépend explicitement du terme d'adéquation aux données. Le calcul des variations alors, en redéfinissant la notion de courbure d'une fonction complexe, une équation aux dérivées partielles (EDP) de type « flot de courbure moyenne ». La discrétisation du problème via la transformée en  $Z$  aboutit à une EDP agissant sur le vecteur des paramètres autorégressifs. Cette seconde approche permet de s'affranchir de l'optimisation de l'hyperparamètre de régularisation intervenant dans l'approche de Tikhonov classique, en stoppant l'EDP dès que sa vitesse d'évolution est ralentie. Le second avantage réside dans la formalisation EDP qui permet naturellement l'estimation continue, en ligne, du spectre au rythme du flot des données. L'extension de cette formalisation au Cepstre, dont la distance induite ainsi que celle du retard de groupe sont très utilisées en signal, fait apparaître le cepstre différentiel comme la transformation de Hopf-Cole du polynôme autorégressif et induit donc une évolution associée selon l'équation de Burgers conditionnellement aux données. Nous concluons en utilisant l'interprétation de l'intégration complexe par Polya en terme de flux et de travail d'un champ de vecteurs pour montrer que la régularisation tend à rendre non-divergent et irrotationnel le champ de vecteurs autorégressifs conjugués sur le cercle complexe unité.

Modèles autorégressifs, régularisation, calcul des variations, géodésique minimale, équations aux dérivées partielles, équations d'Euler-Lagrange, équation de Fourier, coefficients de réflexion, théorème de Noether, coefficients cepstraux, cepstre différentiel, transformation de Hopf-Cole, équation de Burgers, courbure complexe, flot de courbure moyenne, champ de vecteurs de Polya, reconnaissance de forme, théorie globale des courbes planes.

*abstract and key words*

Autoregressive analysis regularisation is considered as a variational problem solved by calculus of variations where the autoregressive polynomial is regarded as a transformation of the unitary complex circle into a parametric closed orientated curve embedded in the complex space. We prove that the Euler-Lagrange equation of this problem is equivalent to the classical regularized Yule-Walker equation. Then, this regularization problem is formulated, by an intrinsic geometrical approach, as a geodesic distance minimization with respect to a metric defined by the data fitting criteria. Then, Calculus of Variations provides, after a recall of complex function curvature definition, a « Mean Curvature Flow » Partial Differential Equation (PDE). Its discretization by  $Z$  transform leads to a PDE acting on the vector of autoregressive parameters. This second approach allows to set regularization free from the optimization of the additional hyperparameter, classically introduced in the Tikhonov approach, simply by stopping PDE when its evolution speed decreases. The second advantage lies in the fact that the PDE numerical scheme is naturally adapted for on-line continuous estimation at the rate of data flow. Extension of the way the previous problem is formulated for the estimation of Cepstrum, whose the associate distance as well as the group delay distance performances are accepted to be very efficient for signal processing applications, shows that the differential cepstrum is exactly identifiable with the Hopf-Cole transform of the autoregressive polynomial and then induces an associate according to Burgers equation with respect to data. We conclude by using Polya's interpretation of complex function integration by means of vectors field flux and work to illustrate regularization as a process that tends to make non-divergent and non-rotational the conjugate autoregressive vectors field along the unitary complex circle.

Autoregressive models, regularization, calculus of variations, minimal geodesic, partial differential equation, Euler-Lagrange equation, Fourier equation, reflection coefficient, Noether theorem, cepstral coefficients, differential cepstrum, Hopf-Cole transform, Burgers equation, complex curvature, Mean Curvature Flow, Polya vectors Field, pattern recognition, global theory of plane curves.

## 1. préambule

*Les équations différentielles de la propagation de la chaleur expriment les conditions les plus générales, et ramènent les questions physiques à des problèmes d'analyse pure, ce qui est proprement l'objet de la théorie ...*

*Les formes des corps sont variées à l'infini, la distribution de la chaleur qui les pénètre peut être arbitraire et confuse; mais toutes les inégalités s'effacent rapidement et disparaissent à mesure que le temps s'écoule. La marche du phénomène devenue plus régulière et plus simple, demeure enfin assujettie à une loi déterminée qui est la même pour tous les cas, et qui ne porte plus aucune empreinte sensible de la disposition initiale ...*

*Les théories nouvelles, expliquées dans notre ouvrage sont réunies pour toujours aux sciences mathématiques et reposent comme elles sur des fondements invariables; elles conserveront tous les éléments qu'elles possèdent aujourd'hui, et elles acquerront, continuellement plus d'étendue.*

Joseph Fourier (1768-1830), « Discours préliminaire à la théorie analytique de la chaleur »  
[Four1822],[Dho98],[Gratt72],[Her75],[Her80],[Robin82]

L'analyse autorégressive, liée à l'algorithme de Schur [Schur18][Alp98] et à la théorie des polynômes orthogonaux [Szegö39,58], peut être considérée comme un problème inverse linéaire mal-posé [Tik77][Nash74][Nash87], c'est-à-dire que les conditions, définies par Hadamard, d'existence, d'unicité et de stabilité de la solution ne sont plus respectées. Si la première condition est souvent vérifiée, les deux suivantes ne le sont que rarement. L'analyse autorégressive, qui demande l'estimation conjointe des paramètres autorégressifs mais également de l'ordre du modèle, fait partie de cette classe de problème et le caractère mal-posé devient critique lorsque la série temporelle analysée possède très peu d'échantillons.

Une première approche consiste à estimer l'ordre du modèle par des critères statistiques ce qui revient à tronquer l'analyse AR à la dimension de l'espace signal afin d'éviter l'apparition de pics parasites. Cette approche a comme inconvénient majeur la grande sensibilité du spectre à l'estimation de cet ordre du modèle : une sous-estimation de l'ordre conduit à un lissage du spectre et inversement, une sur-estimation induit l'apparition de fréquences non présentes dans le signal analysé. Cet inconvénient est d'autant plus gênant que le nombre d'échantillons analysés est faible, car les tests statistiques utilisés pour l'estimation de l'ordre du modèle ne sont plus consistants. Dans la suite, nous nous placerons dans ce dernier cas de figure d'analyse de jeux de données très courts, pour lequel nous choisirons, sans *a priori* sur la solution recherchée, de fixer l'ordre à la valeur maximum permise (c'est-à-dire le nombre d'échantillons moins un).

La seconde approche, décrite dans notre article, considère les solutions données par les méthodes de régularisation de type quadratique (approche de Tikhonov). Plusieurs auteurs ont étudié ces méthodes pour l'analyse de modèles autorégressifs longs [Her97][Kita85][Pim92], et ont formalisé le problème par des techniques de moindres carrés régularisés, la régularisation étant introduite par l'ajout d'un terme quadratique et réglée par un hyperparamètre lagrangien. D'autres ont proposé, le calcul exact du Maximum de vraisemblance [Pham88][Kay83]. Nous proposons une formalisation différente et montrons que l'analyse autorégressive régularisée peut être ramenée à la minimisation d'une fonctionnelle attachée à une courbe complexe, c'est-à-dire une fonction intégrale définie sur un ensemble de courbes. Dans le cadre du calcul des variations, il est alors aisé de trouver le minimum de cette fonctionnelle qui est solution de l'équation d'Euler-Lagrange associée. Nous obtenons une EDP de type équation de Fourier avec potentiel. Nous observerons que la transformée en  $z$  de l'équation d'Euler-Lagrange conduit à l'équation de Yule-Walker régularisée comme dans le cas des moindres carrés classiques.

En traitement d'image, les approches EDP (Equations aux Dérivées Partielles) [Morel98], ont connu un fort développement depuis l'axiomatisation [Lions92] et la formalisation, entre autres, des problèmes de segmentation [Mum84] [Kim95] [Osher88] [Seth99][Coh96a], de restauration d'image [Kich95][Kimm97], de stéréoscopie [Faug98] et d'estimation du flot optique [Der95] sous forme variationnelle. Nous proposons dans cet article d'étendre ces approches au cas de l'analyse autorégressive en reformalisant le problème en terme géométrique intrinsèque comme la détermination d'une géodésique minimale sur une variété différentielle dont la métrique est déduite du terme d'attache du spectre aux données. Contrairement aux approches EDP en traitement d'image, nous verrons que la métrique n'est pas « extérieure » à la courbe mais dépend explicitement de la « courbe spectrale » recherchée. La solution est encore donnée par l'équation d'Euler-Lagrange et fournie comme état stable d'une EDP. La notion de courbure complexe [Need98][Bear87] pour les modèles autorégressifs nous permettra une interprétation en terme de flot de courbure moyenne de cette EDP. Comme précédemment, la transformée en  $z$ , nous permettra d'en déduire un schéma numérique vectoriel, qui ramène le problème à une EDP sur le vecteur des paramètres autorégressifs. En utilisant les structures blocs des matrices de corrélation, nous déduirons également un schéma EDP agissant à chaque ordre du modèle sur le coefficient de réflexion. Sur ce dernier schéma, le terme d'arrêt de l'EDP sera basé sur la pente de la distance entre coefficients de réflexions itérés successifs à l'intérieur du cercle complexe unité.

Les avantages de la modélisation de l'analyse autorégressive sous forme EDP sont liés, premièrement au fait que le paramètre de régularisation n'est plus explicite mais induit implicitement par la vitesse de convergence du processus (l'arrêt de l'EDP dès que la variation devient faible permet d'éviter une sur ou sous-régularisation) et deuxièmement, de part la structure d'une équation différentielle, à la possibilité de traiter naturellement les données en ligne au rythme du flot des données, ce qui permet d'envisager de suivre en analyse spectrale, par un processus d'estimation continu, l'évolution de phénomènes instationnaires.

Nous faisons également la remarque, qu'à partir de la transformation de Hopf-Cole, il est possible de montrer que lorsque le spectre autorégressif évolue selon l'EDP de l'approche quadratique, c'est-à-dire équation de Fourier avec potentiel, le Cepstre différentiel associé est astreint à se modifier de façon dynamique suivant l'équation de Burgers. Nous donnerons également une interprétation géométrique, en terme de champ vectoriel de Polya, de la régularisation. Nous concluerons enfin sur quelques généralisations possibles de l'approche EDP et de l'analyse AR complexe en considérant le polynôme autoregressif comme une courbe « spatiale ». Pour éviter de donner un statut particulier à la fréquence, nous nous placerons dans un nouvel espace dit de configuration-fréquence, ce qui correspond au cas du Lagrangien homogène dans  $C \times R$ .

Le calcul des variations constitue un outil élégant et fécond pour de très nombreux domaines de la physique. Contrairement aux approches par moindres carrés qui ne remplissent que deux des quatre conditions caractérisant l'efficacité du formalisme mathématique, capacités prédictives et rétrodictives, l'approche fondée sur le calcul des variations est plus « efficace » dans le sens où elle possède également une capacité explicative (reliant la description du phénomène à un principe fondamental, en l'occurrence le principe de moindre action de Maupertuis, et ramenant la diversité des phénomènes à un petit nombre de principes) et une capacité générative (engendrant des idées ou des concepts potentiellement riches). De plus, l'approche variationnelle permet, comme la plupart des théories fécondes, de mettre en évidence de riches classes d'invariants sur la base du principe mathématique général, qui associe à chaque symétrie infinitésimale d'une équation différentielle une quantité, de façon telle que pour toute solution de cette équation, cette quantité soit conservée. Une des manifestations les plus importantes de ce lien symétrie-lois de conservation concerne les équations différentielles variationnelles et est contenue dans le théorème d'Emmy Noether [Hé198], qui sera mis en œuvre, au cours de notre développement, pour notre cas applicatif.

## 2. analyse autorégressive et géométrie différentielle dans l'espace complexe

Avant de modéliser la régularisation de l'analyse AR sous forme variationnelle, il nous faut faire quelques rappels d'analyse complexe, qui nous seront utiles par la suite. L'idée principale de notre approche est de considérer le polynôme autorégressif  $\{A^{(n)}(z) / |z| = 1\}$  comme une courbe géométrique paramétrée, orientée et fermée d'un plan Euclidien orienté (l'indice supérieur «  $n$  » indique l'ordre du polynôme). C'est l'évolution de cette courbe sous l'effet d'un processus de régularisation qui sera analysée. Nous substituons ainsi à la vision statique classique de la régularisation une vision dynamique dont les avantages seront décrits dans la suite.

Nous allons définir les notions de courbure algébrique, de vecteur tangent et normal à la courbe  $\{A^{(n)}(z) / |z| = 1\}$  qui apparaîtront de façon naturelle dans les équations qui seront établies.  $A^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^n a_k^{(n)} \cdot z^{-k}$  avec  $a_0^{(n)} = 1$  peut être considérée comme une transformation complexe qui transforme le cercle complexe unité en une courbe fermée orientée dans l'espace complexe :

$$A^{(n)} : D = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto A^{(n)}(z)$$

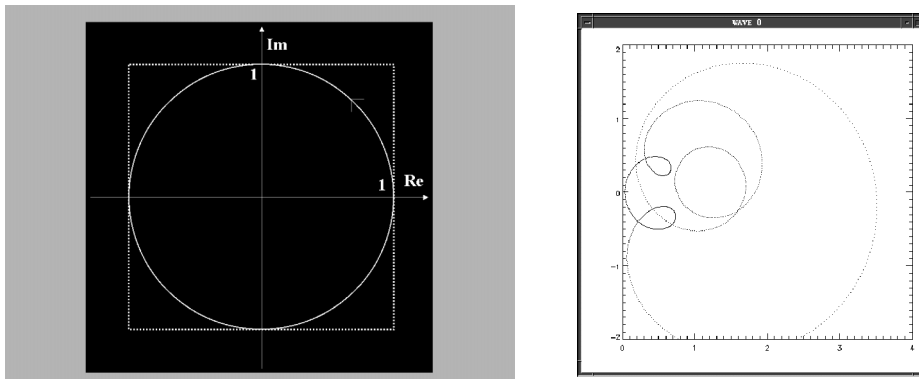


Figure 1. – Transformation du cercle complexe unité  $D = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$  par  $A^{(n)}(z)$ .

$z$  appartenant au cercle complexe unité, il peut être décrit par un seul paramètre  $f$  (la fréquence):  $z = e^{i \cdot 2\pi \cdot f}$ , pour lequel, on a la relation différentielle suivante :  $\frac{dz}{df} = i \cdot 2\pi \cdot z$

ce qui donne :

$$\frac{d.}{df} = \frac{d.}{dz} \cdot \frac{dz}{df} = i2\pi z \cdot \frac{d.}{dz}$$

Sur cette courbe  $A^{(n)}(z)$ , on peut définir l'abscisse curviligne  $s$  par :

$$ds = \left| \frac{dA^{(n)}(f)}{df} \right| \cdot df \tag{1}$$

On définit alors le vecteur tangent unitaire à  $A^{(n)}(z)$  par la définition classique en utilisant (1) :

$$\vec{\tau} = \frac{dA^{(n)}(f)}{ds} = \frac{dA^{(n)}(f)}{df} \cdot \frac{df}{ds} = \frac{\frac{dA^{(n)}(f)}{df}}{\left| \frac{dA^{(n)}(f)}{df} \right|} = \frac{\nabla_f A^{(n)}}{|\nabla_f A^{(n)}|} \tag{2}$$

$\vec{\tau}$  est bien un vecteur dans l'espace complexe défini par : 
$$\vec{\tau} = \frac{\nabla_f A^{(n)}}{|\nabla_f A^{(n)}|}$$

Le vecteur  $\vec{\tau}$  peut être indifféremment considéré comme un vecteur ou comme une valeur complexe :

$$\vec{\tau} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = u + i.v \quad \text{dans } C(\text{Re}(z), \text{Im}(z))$$

La notion de vecteur dans l'espace complexe nécessite également la définition d'un produit scalaire  $\vec{x} \circ \vec{y}$  entre vecteurs qui est classiquement donné par :

$$\begin{aligned} \text{si } \vec{x} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad \text{soit } x = u + i.v \quad \text{et } \vec{y} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \quad \text{soit } y = p + i.q \quad \text{alors } \vec{x} \circ \vec{y} = \text{Re}[x.y^*] \\ \vec{x} \circ \vec{y} = \text{Re}[(u + i.v) \cdot (p - i.q)] = \text{Re}[(u.p + v.q) + i.(v.p - u.q)] = u.p + v.q = \vec{x}^T \cdot \vec{y} \end{aligned} \quad (3)$$

Pour définir la notion de vecteur normal à la courbe complexe  $A^{(n)}(z)$ , il est utile de rappeler que la multiplication d'un vecteur par une valeur complexe unitaire  $e^{i.\theta}$  correspond à une rotation d'un angle  $\theta$  de ce vecteur :  $\text{Rot}(\vec{x}, \theta) = e^{i.\theta} . x$ . Le vecteur normal  $\vec{n}$  à la courbe  $A^{(n)}(z)$  est alors défini par une rotation d'un angle  $\pi/2$  du vecteur tangent unitaire  $\vec{\tau}$  :

$$\vec{n} = e^{i.\frac{\pi}{2}} . \vec{\tau} = i.\vec{\tau} \quad (4)$$

On retrouve bien l'orthogonalité à travers le produit scalaire des vecteurs tangent et normal :

$$\vec{n} \circ \vec{\tau} = \text{Re} \left[ i \cdot \frac{\nabla_f A^{(n)}}{|\nabla_f A^{(n)}|} \cdot \frac{\nabla_f A^{(n)*}}{|\nabla_f A^{(n)*}|} \right] = \text{Re}[i] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{n} \perp \vec{\tau}$$

Il faut insister sur le fait que le cercle complexe unité  $D = \{z \in C / |z| = 1\}$  est décrit de façon orientée (sens trigonométrique) et donc que la courbe  $A^{(n)}(z)$  est également orientée. L'orientation de la courbe  $A^{(n)}(z)$  permet ainsi de définir le vecteur normal unitaire et ceci même en présence de boucles (cf. figure. 1). En traitement d'image, les courbes (front de propagation, isophotes) ne sont pas orientées et par exemple dans l'approche Level-set [Seth99], une condition d'entropie est introduite pour éviter l'apparition de boucles (problèmes liés au croisement du front, à la notion d'intérieur et d'extérieur à la courbe).

Finalement, il nous reste à définir la courbure algébrique de  $A^{(n)}(z)$ . Soit la courbe  $A^{(n)}(z)$ , sachant que  $z$  appartient à une courbe  $\tilde{\Gamma}$  de courbure connue  $\tilde{\kappa}$ , la courbure  $\kappa$  de la courbe image  $\Gamma = \{A^{(n)}(z) / z \in \tilde{\Gamma}\}$  est donnée par [Need98] :

$$\kappa = \frac{1}{\left| \frac{dA^{(n)}(z)}{dz} \right|} \left( \text{Im} \left[ \frac{\frac{d^2 A^{(n)}(z)}{dz^2} \cdot z_\varphi}{\frac{dA^{(n)}(z)}{dz}} \right] + \tilde{\kappa} \right) \quad \text{avec } z_\varphi = e^{i\varphi} \quad (5)$$

$z_\varphi$  est le nombre complexe de module unité tangent, à la courbe original  $\tilde{\Gamma}$  en  $z$  :  $z_\varphi = \vec{\tau}_{\tilde{\Gamma}}(z)$

Dans le cas de l'analyse spectrale autorégressive,  $\tilde{\Gamma} = \{z \in C / |z| = 1\}$ , et donc  $z_\varphi = e^{i.(\arg(z)+\frac{\pi}{2})} = i.z$  et  $\tilde{\kappa} = 1$ .

Ce qui nous donne pour la courbure de  $A^{(n)}(z)$  quand  $z$  décrit  $D = \{z \in C / |z| = 1\}$  :

$$\kappa = \frac{1}{\left| z \cdot \frac{dA^{(n)}(z)}{dz} \right|} \left( \operatorname{Im} \left[ \frac{i \cdot z^2 \cdot \frac{d^2 A^{(n)}(z)}{dz^2}}{z \cdot \frac{dA^{(n)}(z)}{dz}} \right] + 1 \right) \quad (6)$$

Cette courbure peut être réécrite selon le paramètre fréquentielle  $f$  en remarquant que :

$$\begin{aligned} \nabla_f A^{(n)}(f) &= \frac{dA^{(n)}(f)}{df} = \nabla_z A^{(n)}(z) \cdot \frac{dz}{df} = i2\pi z \cdot \nabla_z A^{(n)}(z) \\ \Delta_f A^{(n)}(f) &= \frac{d^2 A^{(n)}(f)}{df^2} = \frac{d}{dz} \left[ i2\pi z \cdot \nabla_z A^{(n)}(z) \right] \cdot i2\pi z = (i2\pi)^2 \cdot z \cdot \nabla_z A^{(n)}(z) \cdot \left[ \frac{z^2 \cdot \Delta_z A^{(n)}(z)}{z \cdot \nabla_z A^{(n)}(z)} + 1 \right] \end{aligned}$$

On peut alors réécrire la courbure de  $A^{(n)}(f)$  sous la forme :

$$\kappa = \operatorname{Re} \left[ \frac{-i \cdot \Delta_f A^{(n)}(f)}{\nabla_f A^{(n)}(f) \cdot |\nabla_f A^{(n)}(f)|} \right] \quad (7)$$

Et c'est sous cette forme que nous l'utiliserons par la suite. Il faut remarquer que la courbe  $A^{(n)}(z)$  est déterminée à un déplacement près, par sa courbure algébrique (équation intrinsèque) (cf. chap. 8.5 de [berger87]).

Nous montrons également en annexe 1, en utilisant la définition de la courbure (7), la relation dans le cas complexe reliant vecteurs unitaires tangent et normal avec la courbure pour une courbe plane :

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \kappa \cdot \vec{n} \quad (8)$$

Cette relation (équation de Frenet dans le cas complexe) permettra de condenser l'expression des équations que nous utiliserons dans la suite de notre exposé.

Enfin, nous concluons cette première partie en rappelant le résultat suivant d'analyse complexe sur la notion de « nombre de révolution » en établissant le lien avec la notion de polynôme à minimum de phase.

Le « nombre de révolution »  $\nu(L, p)$  [Need98] d'une boucle  $L$  dans  $C$  par rapport au point  $p$  est égal au nombre de révolutions effectuées par  $L$  autour de  $p$  (comptées positivement dans le sens direct et négativement dans le sens inverse), lorsque  $z$  décrit entièrement la courbe  $D$  à laquelle il est astreint.

Le « nombre de révolution » apparaît ainsi dans la généralisation du théorème de Cauchy :

$$\oint_K f(z) \cdot dz = 2\pi \cdot i \cdot \sum_j \nu(K, s_j) \cdot \operatorname{Res}[f(z), s_j] \quad \text{avec } s_j : \text{ point singulier de } f(z) \quad (9)$$

Dans le cas d'une fonction analytique, le « nombre de révolution » est relié aux nombres de racines et de pôles de la fonction par le théorème suivant [Need98] :

*Théorème :*

Soit  $f$  une fonction analytique sur une boucle simple  $\Gamma$  et analytique à l'intérieur à l'exception d'un nombre fini de pôles. Si  $N$  et  $M$  sont respectivement le nombre de racines et pôles à l'intérieur de  $\Gamma$ , comptés avec leur ordre de multiplicité, alors :

$$\nu[f(\Gamma), 0] = N - M$$

Dans le cas autorégressif, nous avons :  $A^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^n a_k^{(n)} \cdot z^{-k} = z^{-n} \cdot \prod_{i=1}^n (z - z_i^{(n)})$ . Il apparaît immédiatement que  $A^{(n)}(z)$  possède zéro comme pôle d'ordre  $n$  ainsi que  $n$  racines  $\{z_i^{(n)}\}_{i=1, \dots, n}$ . On peut remarquer que si  $A^{(n)}(z)$  est à minimum de phase, c'est-à-dire si ses racines sont à l'intérieur du disque complexe unité  $\{z_i^{(n)} / d|z_i^{(n)}| < 1\}_{i=1, \dots, n}$ , le « nombre de révolution » est nul à l'origine :

$$\nu [A^{(n)}(D), 0] = n - n = 0 \quad \text{avec} \quad D = \{z \in C / |z| = 1\} \quad (10)$$

C'est ce que nous observons sur la figure 1, sur laquelle  $A^{(n)}(z)$  à minimum de phase n'effectue aucune révolution autour de l'origine. Nous voyons apparaître l'équivalence des deux notions de filtre à minimum de phase et de nullité du « nombre de révolutions » à l'origine pour la courbe complexe associée.

Il est sous-entendu dans ce que nous dirons dans la suite que  $A^{(n)}(z)$  est à minimum de phase (en particulier, l'initialisation de notre processus  $A_0^{(n)}(z)$  sera fourni par l'algorithme de Burg classique [Burg67] assurant d'avoir à l'initialisation les pôles à l'intérieur du cercle unité). Nous vérifierons que la régularisation fait évoluer les racines du polynôme autorégressif à l'intérieur du cercle complexe et conserve la propriété de minimum de phase (s'il en était autrement, il y aurait modification du « nombre de révolutions »,  $A^{(n)}(z)$  serait amené à croiser l'origine, nous observerions une discontinuité de la phase et le processus global serait instable). De façon identique, lorsque nous serons amené à parler de cepstre différentielle, on supposera être à minimum de phase, pour des problèmes de définition de l'expression :

$$\frac{d \ln [A^{(n)}(z)]}{dz} = \frac{1}{A^{(n)}(z)} \cdot \frac{dA^{(n)}(z)}{dz} = \frac{1}{|A^{(n)}(z)|} \cdot \frac{d|A^{(n)}(z)|}{dz} + i \cdot \frac{d \text{Arg} [A^{(n)}(z)]}{dz} \quad (11)$$

Dans la suite, nous ferons l'hypothèse d'initialiser notre processus par un polynôme à minimum de phase  $A_0^{(n)}(z)$  et nous vérifierons que le processus de régularisation d'évolution suivant les EDP (Equations aux Dérivées Partielles) illustre le théorème de Hopf [Need98] :

*Théorème de Hopf dans C :*

*Une boucle K peut être continuellement déformée en une autre boucle L, sans jamais croiser le point p, si et seulement si K et L ont le même « nombre de révolution » par rapport à p.*

### 3. équation d'Euler-Lagrange et analyse AR régularisée

Après avoir formalisé le problème d'analyse autorégressive régularisée sous forme variationnelle, et avoir fait quelques rappels sur le calcul des variations, nous établirons l'équation d'Euler-Lagrange associée au problème et en fournirons un schéma de calcul de la solution.

#### 3.1. formalisation variationnelle de l'analyse autorégressive

Les méthodes classiques en analyse autorégressive cherchent à minimiser la moyenne de l'erreur quadratique d'estimation, dans le cas de l'hypothèse d'un signal échantillonné, autoregressif  $s_n$ , bruité par un bruit blanc  $b_n$ , en supposant de plus que le signal est stationnaire et ergodique :

$$x_i = s_i + b_i \quad \text{avec} \quad s_i = - \sum_{k=1}^n a_k^{(n)} \cdot s_{i-k} \quad \text{et} \quad E [b_i \cdot b_{i-k}^*] = \sigma^2 \cdot \delta_{k,0} \quad (12)$$

De façon asymptotique, l'erreur quadratique moyenne est donnée par :

$$\rho_0 = E \left[ \left| x_i - \hat{x}_i^{(n)} \right|^2 \right] = E \left[ |e_n(i)|^2 \right] \quad \text{avec} \quad e_n(i) = x_i - \hat{x}_i^{(n)} \quad \text{et} \quad \hat{x}_i^{(n)} = - \sum_{p=1}^n a_p^{(n)} \cdot x_{i-p} \quad (13)$$

Dans la suite, nous noterons :

$$e_n(i) = \sum_{p=0}^n a_p^{(n)} \cdot x_{i-p} \quad \text{avec} \quad a_0^{(n)} = 1.$$

On peut remarquer, en utilisant le fait que  $\int_{-1/2}^{1/2} e^{-j2\pi kf} \cdot df = \delta_{k,0}$ , que ce critère quadratique asymptotique peut également s'écrire sous forme intégrale :

$$\rho_0 = \int_{-1/2}^{1/2} E^{(n)}(f) \cdot df \quad \text{avec} \quad E^{(n)}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \rho_k \cdot e^{-j2\pi kf} \quad \text{et} \quad \rho_k = E[e_n(i) \cdot e_n^*(i-k)] \quad (14)$$

Le point de départ de notre développement est lié à la simple remarque suivante : le critère d'adéquation aux données dépend de façon explicite de la variable  $A^{(n)}(f)$  et de la densité spectrale de puissance du signal  $S_x(f)$  :

Soit

$$E^{(n)}(f) = |A^{(n)}(f)|^2 \cdot S_x(f) \quad \text{avec} \quad A^{(n)}(f) = \sum_{p=0}^n a_p^{(n)} \cdot e^{-j2\pi fp} \quad \text{et} \quad S_x(f) = E[|X(f)|^2] \quad (15)$$

L'égalité  $\int_{-1/2}^{1/2} |A^{(n)}(f)|^2 \cdot S_x(f) \cdot df = E[|e_n(i)|^2]$  avec  $S_x(f) = E[|X(f)|^2]$  découle directement du *théorème de Parseval*.

La borne inférieure nous est donnée par le *Théorème de Kolmogorov-Szegö-Krein* [Szegö58][Hels61] :

$$\inf_{A^{(n)}} \int_{-1/2}^{1/2} |A^{(n)}(f)|^2 \cdot S_x(f) \cdot df = e^{\int_{-1/2}^{1/2} \log S_x(f) \cdot df}$$

Finalement, nous avons montré qu'il est possible d'utiliser comme terme asymptotique d'adéquation aux données, un terme intégral qui dépend explicitement de  $A^{(n)}(f)$  :

$$\int_{-1/2}^{1/2} g(A^{(n)}(f))^2 \cdot df = \rho_0 \quad \text{avec} \quad g(A^{(n)}(f))^2 = |A^{(n)}(f)|^2 \cdot S_x(f) \quad (16)$$

Ceci représente le cas asymptotique pour lequel on analyse une infinité d'échantillons du signal, le signal étant stationnaire et ergodique. Dans le cas réel, on dispose d'un nombre fini d'échantillons et nous avons :

$$\hat{S}_x(f) = \sum_{l=-N}^{+N} \hat{r}_l^x \cdot e^{-j2\pi fl} \quad \text{avec} \quad \hat{r}_l^x = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n \cdot x_{n-l}^* \quad \text{et la propriété :} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{S}_x(f) = S_x(f) \quad (17)$$

$$S_x(f) = E[|X(f)|^2] = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} r_l^x \cdot e^{-j2\pi fl} \quad \text{avec} \quad r_l^x = E[x_n \cdot x_{n-l}^*] \quad \text{et} \quad r_k^x = \int_{-1/2}^{1/2} S_x(f) \cdot e^{j2\pi kf} \cdot df$$



Lorsque  $N$  devient petit, le problème d'analyse autorégressive devient un problème inverse linéaire mal-posé. Une des approches pour régulariser la solution consiste à rajouter une contrainte sur la solution qui traduit notre *a priori* sur cette dernière. Cet *a priori* peut s'introduire par une interprétation bayésienne de la régularisation quadratique comme cela est fait dans [Dem89] [Bonnet99]. Le critère le moins informationnel consiste à imposer une contrainte quadratique sur la dérivée (approche de Tikhonov) imposant une douceur du spectre :

$$\text{Min}_{A^{(n)}} \int_{-1/2}^{1/2} g \left( A^{(n)}(f) \right)^2 .df \quad \text{avec} \quad g \left( A^{(n)}(f) \right)^2 = \left| A^{(n)}(f) \right|^2 .\hat{S}_x(f) \quad (18)$$

sous la contrainte : 
$$\int_{-1/2}^{1/2} \Phi \left( \left| \frac{dA^{(n)}(f)}{df} \right| \right) .df = \beta \quad \text{avec} \quad \Phi \left( \left| \frac{dA^{(n)}(f)}{df} \right| \right) = \left| \frac{dA^{(n)}(f)}{df} \right|^2 \quad (19)$$

Le problème se résoud alors en définissant un Lagrangien *via* un hyperparamètre  $\lambda$  réglant l'équilibre entre l'adéquation du spectre estimé aux données et la contrainte de douceur spectrale :

$$\text{Min}_{A^{(n)}} \int_{-1/2}^{1/2} g \left( A^{(n)}(f) \right)^2 .df + \lambda . \int_{-1/2}^{1/2} \Phi \left( \left| \frac{dA^{(n)}(f)}{df} \right| \right) .df \quad (20)$$

Il apparaît alors de façon immédiate que l'analyse autorégressive régularisée peut se formaliser sous forme variationnelle :  $A^{(n)}(f)$  est considéré comme une courbe paramétrée par  $f$  qui doit minimiser un critère intégral qui dépend explicitement de  $A^{(n)}(f)$  et de  $\frac{dA^{(n)}(f)}{df}$ . Pour ce faire, on définit la fonctionnelle paramétrée par  $A^{(n)}(f)$  :

$$W \left( A^{(n)} \right) = \int_{-1/2}^{1/2} F \left( f, A^{(n)}(f), \frac{dA^{(n)}(f)}{df} \right) .df \quad (21)$$

avec

$$F \left( f, A^{(n)}(f), \frac{dA^{(n)}(f)}{df} \right) = \left( \left| A^{(n)}(f) \right|^2 .\hat{S}_x(f) \right) + \lambda . \left| \frac{dA^{(n)}(f)}{df} \right|^2 \quad (22)$$

Considérons l'ensemble des courbes  $A^{(n)}(f)$  de classe  $C^1$  muni d'une structure d'espace vectoriel  $V$ . Le choix de la norme  $\|A^{(n)}\| = \text{Sup}_{f \in [-1/2, 1/2]} |A^{(n)}(f)| + \text{Sup}_{f \in [-1/2, 1/2]} \left| \frac{dA^{(n)}(f)}{df} \right|$ , permet de montrer que cet espace vectoriel est complet et définie sur  $V$

une structure d'espace de Banach [Cart77][Berest97]. Soit alors une fonction  $F : U \subset R \times C \times C \rightarrow R$  de classe  $C^k$  et étant

donnée une courbe  $\left| \begin{array}{l} A^{(n)} : I = [-1/2, 1/2] \rightarrow C \\ f \mapsto A^{(n)}(f) \end{array} \right.$  de classe  $C^1$  telle que l'on ait  $\left( f, A^{(n)}(f), \frac{dA^{(n)}(f)}{df} \right) \in U$  pour  $f \in I$ . On peut

attacher à cette courbe le nombre réel suivant :  $W \left( A^{(n)} \right) = \int_{-1/2}^{1/2} F \left( f, A^{(n)}(f), \frac{dA^{(n)}(f)}{df} \right) .df$  et l'application sur un ensemble

$\Omega$  de fonctions appartenant à  $V$ , donnée par la fonctionnelle :

$$\left| \begin{array}{l} W : \Omega \rightarrow R \\ A^{(n)} \mapsto W \left( A^{(n)} \right) \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \Omega = \left\{ A^{(n)} / \left( f, A^{(n)}(f), \frac{dA^{(n)}(f)}{df} \right) \in U \quad \text{et} \quad f \in I = [-1/2, 1/2] \right\}$$

Alors pour que  $A^{(n)}(f)$  réalise un extrémum de  $W(A^{(n)})$ , il faut et il suffit que (cf. annexe 2) :

$$\frac{d}{df} \left( \frac{\partial F}{\partial \left( \frac{dA^{(n)*}}{df} \right)} \right) = \frac{\partial F}{\partial A^{(n)*}} \quad \text{et} \quad \frac{d}{df} \left( \frac{\partial F}{\partial \left( \frac{dA^{(n)}}{df} \right)} \right) = \frac{\partial F}{\partial A^{(n)}} \quad \forall f \in I = [-1/2, 1/2] \quad (23)$$

Il s'agit simplement des équations d'Euler-Lagrange dans le cas complexe qui déterminent les extrémales de  $W(A^{(n)})$ .

Si nous nous ramenons à notre problème, pour lequel la fonction  $W(A^{(n)})$  est définie par (22), on remarque en premier lieu que le système de deux équations se réduit à une seule. En effet, le fait que nous ayons

$$\hat{S}_x^*(f) = \sum_{k=-N}^{+N} \hat{r}_k^* \cdot e^{j2\pi f k} \stackrel{\hat{r}_k^* \hat{r}_{-k}^*}{=} \sum_{k=-N}^{+N} \hat{r}_{-k} \cdot e^{j2\pi f k} = \hat{S}_x(f)$$

nous permet de montrer que :

$$\frac{\partial F}{\partial A^{(n)}} = \left( \frac{\partial F}{\partial A^{(n)*}} \right)^* \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial \left( \frac{dA^{(n)}}{df} \right)} = \left( \frac{\partial F}{\partial \left( \frac{dA^{(n)*}}{df} \right)} \right)^* \quad (24)$$

Il nous faut maintenant développer l'équation d'Euler-Lagrange, en rappelant la définition de la notion de dérivation pour les complexes [Cara54][Sieg69]  $\frac{\partial F}{\partial z^*} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial F}{\partial \text{Re}(z)} + i \cdot \frac{\partial F}{\partial \text{Im}(z)} \right)$ . Ce qui nous permet d'écrire chaque terme de l'équation d'Euler-Lagrange de façon explicite :

$$\frac{\partial F}{\partial \left( \frac{dA^{(n)*}}{df} \right)} = \lambda \cdot \frac{dA^{(n)}(f)}{df} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial A^{(n)*}} = A^{(n)}(f) \cdot \hat{S}_x(f) \quad (25)$$

Nous obtenons finalement l'équation différentielle du second ordre d'Euler-Lagrange pour notre cas applicatif de l'analyse autorégressive régularisée :

$$\lambda \cdot \frac{d^2 A^{(n)}(f)}{df^2} = A^{(n)}(f) \cdot \hat{S}_x(f)$$

avec  $\hat{S}_x(f) = \sum_{l=-N}^{+N} \hat{r}_l^x \cdot e^{-j2\pi f l}$  et  $\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{r}_l^x = r_l^x = E[x_n \cdot x_{n-l}^*]$

(26)

On peut remarquer que  $A^{(n)}(f)$  pourrait également être obtenue comme état stable de l'EDP suivante :

$$\frac{\partial A^{(n)}(f)}{\partial t} = \lambda \cdot \frac{\partial^2 A^{(n)}(f)}{\partial f^2} - A^{(n)}(f) \cdot \hat{S}_x(f)$$

que nous appellerons *équation de Fourier de l'analyse spectrale autorégressive*, et que nous utiliserons par la suite. En posant  $c = 1/\lambda$  et  $V(f) = -\frac{\hat{S}_x(f)}{\lambda}$ , on retrouve l'équation de la chaleur avec potentiel :

$$c \cdot \frac{\partial A}{\partial t} = \Delta A + V.A \quad \text{avec} \quad \Delta A = \frac{\partial^2 A}{\partial f^2} \quad c > 0$$

Cette équation de la chaleur en présence d'un potentiel  $V(f)$ , pour la valeur  $c = \frac{2m}{i\hbar}$ , est équivalente à l'équation de Schrödinger de la mécanique quantique :  $i\hbar \cdot \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{(i\hbar)^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r}, t) + U \cdot \psi(\vec{r}, t)$ , en identifiant :

$$\lambda = \frac{i\hbar}{2m}, \quad S_x(f) = \frac{iU}{\hbar} \quad \text{et} \quad A^{(n)}(f, t) = \psi(\vec{r}, t).$$

Il existe une méthode pour résoudre l'équation de la chaleur avec potentiel [Cart95] basée sur la méthode d'itération de Picard en prenant une nouvelle unité de temps  $t' = \frac{t}{c} = \lambda \cdot t$ , la solution est obtenue de proche en proche :  $\left(\frac{\partial}{\partial t'} - \Delta\right) \cdot A_{k+1} = V \cdot A_k$ . L'opérateur  $\left(\frac{\partial}{\partial t'} - \Delta\right)$  s'inverse et correspond à des convolutions par le noyau de la chaleur  $\frac{1}{\sqrt{t}} \cdot e^{-\frac{f^2}{4t}}$ . La solution s'écrit alors comme une série d'intégrales :  $A(f, t) = \sum_{n \geq 0} \int_{s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_n} \dots$ , chaque intégrale correspondant à l'application de l'opérateur intégral, inverse de  $\left(\frac{\partial}{\partial t'} - \Delta\right)$  correspondant à des convolutions par le noyau de la chaleur. La solution est alors fournie par la formule de Feynman-Kac [Alb 76][Kac 57][Roe 96] :

$$A(f, t) = \int e^{-\Sigma(\phi, t)} \cdot A(\phi(0), 0) \cdot D\phi \quad \text{avec} \quad \Sigma(\phi, t) = \int_{t_0}^t \left[ \frac{1}{2\lambda} \cdot \left| \frac{d\phi(\tau)}{d\tau} \right|^2 + \hat{S}_x(\phi(\tau)) \right] \cdot d\tau \quad (28)$$

### 3.2. régularisation non-quadratique

Dans l'approche précédente, la régularisation était quadratique, or il est possible comme en traitement d'image de définir une régularisation non-quadratique. La régularisation est établie avec une fonction  $\Phi(|\nabla_f A^{(n)}|)$  non-définie *a priori*. Une fois, l'équation de régularisation établie, il s'agit alors de définir les propriétés de la fonction  $\Phi(|\nabla_f A^{(n)}|)$  qui vérifient les propriétés recherchées. On définit en premier lieu la fonctionnelle de façon générale :

$$W(A^{(n)}) = \int_{-1/2}^{1/2} F\left(f, A^{(n)}(f), \frac{dA^{(n)}(f)}{df}\right) \cdot df \quad \text{avec} \quad F\left(f, A^{(n)}(f), \frac{dA^{(n)}(f)}{df}\right) = g^2(A^{(n)}(f)) + \lambda \cdot \Phi\left(\left|\frac{dA^{(n)}(f)}{df}\right|\right)$$

et  $g^2(A^{(n)}(f)) = \left(|A^{(n)}(f)|^2 \cdot \hat{S}_x(f)\right)$

L'équation d'Euler-Lagrange associée est donnée par :

$$\frac{d}{df} \left( \lambda \cdot \frac{\partial \Phi\left(\left|\frac{dA^{(n)}(f)}{df}\right|\right)}{\partial \left(\frac{dA^{(n)*}(f)}{df}\right)} \right) = \frac{\partial g^2(A^{(n)}(f))}{\partial A^{(n)*}(f)} \quad (29)$$

Un développement simple, fourni en annexe 3, permet alors d'établir l'équation générale :

$$\frac{\lambda}{2} \cdot \left( \Phi'' \left( \left| \frac{dA^{(n)}(f)}{df} \right| \right) \cdot \left( \frac{d^2 A^{(n)}(f)}{df^2} \circ \vec{\tau} \right) \cdot \vec{\tau} + \frac{\Phi' \left( \left| \frac{dA^{(n)}(f)}{df} \right| \right)}{\left| \frac{dA^{(n)}(f)}{df} \right|} \cdot \left( \frac{d^2 A^{(n)}(f)}{df^2} \circ \vec{n} \right) \cdot \vec{n} \right) = A^{(n)}(f) \cdot \hat{S}_x(f) \quad (30)$$

Il s'agit alors de choisir la fonction  $\Phi(|\nabla_f A^{(n)}|)$  qui vérifie les comportements de l'EDP que l'on souhaite. Pour plus de détails sur ce type d'approche, le lecteur pourra avantageusement se reporter au travail de P. Charbonnier [Charb97] ainsi qu'à l'article [Der95].

On notera que pour le cas quadratique  $\Phi(|\nabla_f A^{(n)}|) = |\nabla_f A^{(n)}|^2$ , on retrouve la solution précédente (26) en remarquant que  $\Delta_f A^{(n)}$  se décompose sur la base de Frenet  $(\vec{\tau}, \vec{n})$  locale à la courbe :

$$\Delta_f A^{(n)} = \left( \Delta_f A^{(n)} \circ \vec{\tau} \right) \cdot \vec{\tau} + \left( \Delta_f A^{(n)} \circ \vec{n} \right) \cdot \vec{n} \quad (31)$$

### 3.3. résolution de l'équation d'Euler-Lagrange

Afin d'établir le schéma numérique de mise en œuvre de l'équation (26) précédemment établie, il suffit de réécrire l'équation en prenant la transformée en  $z$  :

$$-\lambda \cdot 4\pi^2 \cdot \left[ z^{-2} \cdot \frac{d^2 A^{(n)}(z)}{d(z^{-1})^2} + z^{-1} \cdot \frac{dA^{(n)}(z)}{dz^{-1}} \right] = A^{(n)}(z) \cdot \hat{S}_x(z)$$

avec  $z = e^{i \cdot 2\pi \cdot f}$ . Pour en déduire l'équation matricielle associée, il suffit alors de faire une comparaison terme à terme en fonction des puissances de  $z^{-1}$  (cf. annexe 4). On retrouve ainsi la solution par moindres carrés régularisés classique [Her97][Kita85] aboutissant à l'équation de Yule-Walker régularisée consistant en une inversion robuste de la matrice de corrélation des données  $\hat{R}_n$  :

$$\begin{bmatrix} a_1^{(n)} \\ a_2^{(n)} \\ \vdots \\ a_n^{(n)} \end{bmatrix} = - \left[ \hat{R}_n + \lambda \cdot J_n^+ \cdot J_n \right]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \hat{r}_1^x \\ \hat{r}_2^x \\ \vdots \\ \hat{r}_{n-1}^x \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad J_n = (2\pi i) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{R}_n = [\hat{r}_i]_{Toeplitz} \quad (32)$$

Ce type d'approche a largement été étudié par différents auteurs [Her97][Ruzin89]. L'auteur en a donné une solution récursive en régularisant l'algorithme de Burg dans [Barb95][Barb99a] (cf. annexe 5) en modifiant l'expression du coefficient de réflexion classique par la nouvelle expression :

$$\hat{\mu}_n = - \frac{\frac{2}{N-n} \sum_{k=n+1}^N f_{n-1}(k) \cdot b_{n-1}^*(k-1) + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k^{(n)} \cdot a_k^{(n-1)} \cdot a_{n-k}^{(n-1)}}{\frac{1}{N-n} \sum_{k=n+1}^N |f_{n-1}(k)|^2 + |b_{n-1}(k-1)|^2 + 2 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k^{(n)} \cdot |a_k^{(n-1)}|^2} \quad \text{avec} \quad \beta_k^{(n)} = \lambda \cdot (2\pi)^2 \cdot (k-n)^2$$

## 4. formalisation géométrique intrinsèque : équation de Fourier généralisée

Dans cette deuxième partie, nous allons reformuler le problème d'analyse autorégressive régularisée sous une forme géométrique intrinsèque, comme étant équivalent au calcul d'une géodésique minimale définie par une métrique différentielle induite par le terme d'attache aux données. Nous montrerons que la solution est état stable d'une EDP de type « Mean Curvature Flow ». Cette substitution de la vision statique classique par une vision dynamique possède le double avantage, premièrement de ne plus introduire l'hyperparamètre de régularisation classique (dont le réglage optimal est peu aisé ou complexifie l'algorithmie [Thom91]) et deuxièmement fournit un schéma numérique naturel (une équation aux dérivées partielles) qui permet une estimation en ligne du spectre au rythme du flot des données.

Ainsi, la fonctionnelle à minimiser est maintenant définie comme suit :

$$\int_{-1/2}^{1/2} g(A^{(n)}(f)) \cdot \left| \frac{dA^{(n)}(f)}{df} \right| \cdot df \quad \text{avec} \quad g(A^{(n)}(f))^2 = |A^{(n)}(f)|^2 \cdot \hat{S}_x(f) \quad (33)$$

qui s'interprète comme la longueur géodésique de la courbe fermée  $A^{(n)}(f)$  lorsque la métrique non-Euclidienne associée est définie par  $ds^2 = g(A^{(n)}(f))^2 \cdot df^2 = g(A^{(n)}(f))^2 \cdot \left| \frac{dA^{(n)}(f)}{df} \right|^2 \cdot df^2$ , ce qui modifie la mesure d'arc classique ou seul intervient habituellement  $ds^2 = \left| \frac{dA^{(n)}(f)}{df} \right|^2 \cdot df^2$ .

Nous allons voir comment lui associer une EDP que nous interpréterons en terme de flot de courbure moyenne en faisant intervenir le terme de courbure complexe précédemment établi par l'expression (7).

### 4.1. géodésique minimale

Les auteurs de [Osher88][Cas97][Set99][Coh96a][Coh96b] ont montré que la solution du problème variationnel que nous avons considéré dans la première partie pouvait se ramener à la détermination d'une courbe géodésique minimale dans un espace de Riemann de métrique différentielle induite par le terme d'adéquation aux données. Sur la base d'une analogie physique en utilisant le principe de Maupertuis [Berest97], ils ont montré que le premier problème (22) est équivalent à la minimisation de la fonctionnelle suivante :

$$\text{Min}_{A^{(n)}(f)} \int_{-1/2}^{1/2} g(A^{(n)}(f)) \cdot \left| \frac{dA^{(n)}(f)}{df} \right| \cdot df$$

Il s'agit d'une formalisation intrinsèque de notre problème de minimisation, en terme de géodésique minimale. En effet,

$\int_{-1/2}^{1/2} \left| \frac{dA^{(n)}(f)}{df} \right| \cdot df = \int_0^{L(A^{(n)})} ds$  correspond à la longueur de la courbe fermée  $A^{(n)}(f)$ . Or la fonction que nous avons à minimiser fait intervenir une nouvelle mesure de la longueur d'arc qui est modifiée par une pondération de la longueur d'arc  $ds$  par une métrique Riemannienne définie par  $g(A^{(n)}(f))$  :  $L = \int_{-1/2}^{1/2} g(A^{(n)}(f)) \cdot \left| \frac{dA^{(n)}(f)}{df} \right| \cdot df = \int_0^L g(A^{(n)}) \cdot ds = \int_0^{L_g} ds'$ . On

cherche donc à minimiser le chemin de longueur minimale dans une nouvelle métrique  $ds'$  définie par  $ds'^2 = g(A^{(n)})^2 \cdot ds^2$ . Pour le lecteur intéressé par les détails de l'établissement de cette équivalence, nous le renvoyons à la lecture des articles précédemment cités, en particulier [Cas97], ainsi que le cours de calcul des variations de P. Bérest [Berest97, chap.5], et l'utilisation de la méthode de Routh (en construisant un Routhien particulier appelé Maupertuisien).

Une autre démonstration [Aub98][Aub99] a été donnée pour montrer que le problème initial de minimisation possédait une formalisation géométrique intrinsèque, et que les deux problèmes de minimisation suivant  $(P_1)$  et  $(P_2)$  étaient équivalents  $(P_1) = (P_2)$  :

$$(P_1) : \min_{A \in D} \int_{-1/2}^{1/2} g(A^{(n)}(f))^2 + \lambda \cdot \left| \frac{dA^{(n)}(f)}{df} \right|^2 \cdot df \Leftrightarrow (P_2) : \min_{A \in D} 2 \cdot \int_{-1/2}^{1/2} g(A^{(n)}(f)) \cdot \left| \frac{dA^{(n)}(f)}{df} \right| \cdot df \quad (34)$$

$$D = \left\{ A^{(n)} : [-1/2, 1/2] \rightarrow C, A^{(n)} \text{ est } C^1 \text{ par morceaux} \right\}$$

La première inégalité est évidente et donnée par la positivité de :

$$\int_{-1/2}^{1/2} \left[ g(A^{(n)}(f)) - \sqrt{\lambda} \cdot \left| \frac{dA^{(n)}(f)}{df} \right| \right]^2 \cdot df \geq 0 \quad (35)$$

$$\Rightarrow \int_{-1/2}^{1/2} g(A^{(n)}(f))^2 + \lambda \cdot \left| \frac{dA^{(n)}(f)}{df} \right|^2 \cdot df \geq 2 \cdot \sqrt{\lambda} \cdot \int_{-1/2}^{1/2} g(A^{(n)}(f)) \cdot \left| \frac{dA^{(n)}(f)}{df} \right| \cdot df \quad (36)$$

L'inégalité dans l'autre sens est plus délicate à démontrer. L'idée principale développée dans [Aub98] est la suivante :

Soit  $A^{(n)} \in D$  une courbe, ils montrent qu'il existe une autre courbe  $A_0^{(n)} \in D$  telle que :

$$\int_{-1/2}^{1/2} g(A_\diamond(f))^2 + \lambda \cdot \left| \frac{dA_\diamond(f)}{df} \right|^2 \cdot df \leq 2 \cdot \sqrt{\lambda} \cdot \int_{-1/2}^{1/2} g(A(f)) \cdot \left| \frac{dA(f)}{df} \right| \cdot df \quad (37)$$

La prise de l'infimum sur  $A \in D$  successivement à droite et à gauche de l'inégalité précédente conduit à la seconde inégalité cherchée :  $(P_1) \leq (P_2)$ , d'où l'équivalence des problèmes  $P_1$  et  $P_2$ .

## 4.2. EDP associée au calcul de la géodésique minimale

Une fois cette nouvelle fonctionnelle (33) établie, ou posée *a priori* comme critère à minimiser, il nous reste à en établir l'équation d'Euler-Lagrange. Soit donc la nouvelle fonctionnelle :

$$L = \int_{-1/2}^{1/2} F \left( f, A^{(n)}(f), \frac{dA^{(n)}(f)}{df} \right) \cdot df \quad \text{avec} \quad F \left( f, A^{(n)}(f), \frac{dA^{(n)}(f)}{df} \right) = g(A^{(n)}(f)) \cdot \left| \frac{dA^{(n)}(f)}{df} \right| \quad (38)$$

et  $g(A^{(n)}(f)) = \sqrt{|A^{(n)}(f)|^2 \cdot \hat{S}_x(f)}$

Les équations d'Euler-Lagrange nous donnent :

$$\frac{\partial F}{\partial A^{(n)*}} - \frac{d}{df} \left[ \frac{\partial F}{\partial \left( \frac{dA^{(n)*}}{df} \right)} \right] = 0 \quad (39)$$

En rappelant que la dérivation complexe impose :

$$\frac{\partial |z|}{\partial z^*} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2}}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2}}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{|z|} \quad (40)$$

On obtient un premier développement de l'équation :

$$\frac{\partial g}{\partial A^{(n)*}} \cdot \left| \frac{dA^{(n)}}{df} \right| - \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{df} \left[ g(A^{(n)}) \cdot \frac{\frac{dA^{(n)}}{df}}{\left| \frac{dA^{(n)}}{df} \right|} \right] = 0 \quad (41)$$

Or nous avons vu, en (2), qu'il était possible d'écrire le vecteur tangent sous la forme :

$$\vec{\tau} = \frac{\frac{dA^{(n)}}{df}}{\left| \frac{dA^{(n)}}{df} \right|}$$

En intégrant cette expression dans l'équation (41), l'Equation d'Euler-Lagrange se réduit à :

$$\frac{\partial g(A^{(n)})}{\partial A^{(n)*}} \cdot \left| \frac{dA^{(n)}}{df} \right| - \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{df} \left[ g(A^{(n)}) \cdot \vec{\tau} \right] = 0 \Rightarrow \frac{\partial g(A^{(n)})}{\partial A^{(n)*}} \cdot \left| \frac{dA^{(n)}}{df} \right| - \frac{1}{2} \cdot \frac{dg(A^{(n)})}{df} \cdot \vec{\tau} - \frac{1}{2} \cdot g(A^{(n)}) \cdot \frac{d\vec{\tau}}{df} = 0 \quad (42)$$

Au préalable, nous avons établi en annexe 1, que :

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \kappa \cdot \vec{n} = \frac{d^2 A^{(n)}}{ds^2} = \frac{1}{\left| \frac{dA^{(n)}}{df} \right|} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{df}$$

En notant de plus que la dérivation totale est :

$$\frac{dg(A^{(n)})}{df} = \frac{\partial g(A^{(n)})}{\partial A^{(n)}} \cdot \frac{dA^{(n)}}{df} + \frac{\partial g(A^{(n)})}{\partial A^{(n)*}} \cdot \frac{dA^{(n)*}}{df} + \frac{\partial g(A^{(n)})}{\partial f} \quad (43)$$

Nous pouvons faire apparaître un produit scalaire dans le plan complexe, en écrivant :

$$\begin{aligned} \frac{dg(A^{(n)})}{df} &= \left| \frac{dA^{(n)}}{df} \right| \cdot \left( \frac{\partial g(A^{(n)})}{\partial A^{(n)}} \cdot \vec{\tau} + \frac{\partial g(A^{(n)})}{\partial A^{(n)*}} \cdot \vec{\tau}^* + \frac{1}{\left| \frac{dA^{(n)}}{df} \right|} \frac{\partial g(A^{(n)})}{\partial f} \right) \\ &= \left| \frac{dA^{(n)}}{df} \right| \cdot \left( 2 \cdot \text{Re} \left[ \frac{\partial g(A^{(n)})}{\partial A^{(n)*}} \cdot \vec{\tau}^* \right] + \frac{1}{\left| \frac{dA^{(n)}}{df} \right|} \frac{\partial g(A^{(n)})}{\partial f} \right) \end{aligned}$$

Or, nous avons rappelé, en (3), au début de l'article que :

$$\text{Re} \left[ \frac{\partial g(A^{(n)})}{\partial A^{(n)*}} \cdot \vec{\tau}^* \right] = \left( \frac{\partial g(A^{(n)})}{\partial A^{(n)*}} \circ \vec{\tau} \right) \quad (44)$$

Finalement, en utilisant cette expression dans l'équation (42), nous aboutissons à :

$$\left| \frac{dA^{(n)}}{df} \right| \left( 2 \cdot \frac{\partial g(A^{(n)})}{\partial A^{(n)*}} - \left( 2 \cdot \frac{\partial g(A^{(n)})}{\partial A^{(n)*}} \circ \vec{\tau} \right) \cdot \vec{\tau} - \frac{1}{\left| \frac{dA^{(n)}}{df} \right|} \frac{\partial g(A^{(n)})}{\partial f} \cdot \vec{\tau} - g(A^{(n)}) \cdot \kappa \cdot \vec{n} \right) = 0 \quad (45)$$

On peut de plus décomposer le premier vecteur sur la base orthogonale locale  $(\vec{\tau}, \vec{n})$  comme suit :

$$\frac{\partial g(A^{(n)})}{\partial A^{(n)*}} = \left( \frac{\partial g(A^{(n)})}{\partial A^{(n)*}} \circ \vec{\tau} \right) \cdot \vec{\tau} + \left( \frac{\partial g(A^{(n)})}{\partial A^{(n)*}} \circ \vec{n} \right) \cdot \vec{n} \quad (46)$$

Finalement en introduisant cette expression dans (45), l'équation d'Euler-Lagrange nous permet d'établir que la solution est donnée comme état stable de l'EDP de type « Mean-Curvature Flow » suivante :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial A^{(n)}(f, t)}{\partial t} &= \left[ g(A^{(n)}) \cdot \kappa - \left( 2 \cdot \frac{\partial g(A^{(n)})}{\partial A^{(n)*}} \circ \vec{n} \right) \right] \cdot \vec{n} + \frac{1}{|\nabla_f A^{(n)}(f, t)|} \cdot \frac{\partial g(A^{(n)})}{\partial f} \cdot \vec{\tau} \\ \text{avec } \kappa &= \text{Re} \left[ \frac{-i \cdot \Delta_f A^{(n)}(f)}{|\nabla_f A^{(n)}(f)| \cdot |\nabla_f A^{(n)}(f)|} \right], \vec{n} = i \cdot \vec{\tau} = i \cdot \frac{dA^{(n)}(f)}{ds} = \frac{i \cdot \nabla_f A^{(n)}(f)}{|\nabla_f A^{(n)}(f)|} \quad \text{et } \vec{x} \circ \vec{y} = \text{Re}[x \cdot y^*] \end{aligned}} \quad (47)$$

Le premier terme  $g(A^{(n)}) \cdot \kappa \cdot \vec{n}$  fait évoluer la courbe  $A^{(n)}(z)$  suivant sa normale  $\vec{n}$  proportionnellement à sa courbure  $\kappa$  (effet de régularisation) et au terme d'attache aux données  $g(A^{(n)})$  (terme d'arrêt stoppant la courbe aux endroits où le spectre estimé correspond au spectre du signal).

Le terme suivant  $\left( 2 \cdot \frac{\partial g(A^{(n)})}{\partial A^{(n)*}} \circ \vec{n} \right) \cdot \vec{n}$  fait évoluer la courbe  $A^{(n)}(z)$  dans la direction de sa normale  $\vec{n}$  aux endroits où cette évolution fait diminuer le terme d'attache aux données  $g(A^{(n)})$ .

Enfin, le troisième terme  $\frac{1}{|\nabla_f A^{(n)}|} \cdot \frac{\partial g(A^{(n)})}{\partial f} \cdot \vec{\tau}$  fait évoluer la courbe  $A^{(n)}(z)$  dans la direction de sa tangente  $\vec{\tau}$  de façon à rendre

homogène le terme d'adéquation aux données  $g(A^{(n)})$  le long de la courbe (c'est-à-dire rendre constant  $g(A^{(n)})$  quelque soit la fréquence pour l'extrémum de la fonctionnelle).

Pour les propriétés de convergence du Mean Curvature Flow, nous renvoyons le lecteur aux articles [Gage86][Grays87][Chen91].

Nous pouvons développer l'équation d'Euler-Lagrange (45) pour montrer qu'elle se ramène également à un système de deux équations.

Pour ce faire, nous utilisons l'expression particulière de  $g(A^{(n)})$  donnée par (38), pour arriver à l'équation équivalente (annexe 6) :

$$\frac{\frac{dA^{(n)}}{df}}{2 \cdot g(A^{(n)}) \cdot \left| \frac{dA^{(n)}}{df} \right|^3} \left[ 2 \cdot i \cdot \text{Im} \left( \frac{dA^{(n)*}}{df} \cdot \left( g^2(A^{(n)}) \cdot \frac{d^2 A^{(n)}}{df^2} - A^{(n)} \cdot \hat{S}_x \cdot \left| \frac{dA^{(n)}}{df} \right|^2 \right) \right) + \left| A^{(n)} \right|^2 \cdot \frac{\partial \hat{S}}{\partial f} \cdot \left| \frac{dA^{(n)}}{df} \right|^2 \right] = 0 \quad (48)$$

Les parties purement imaginaires et purement réelles de l'expression doivent être nulles, dans le cas où  $g(A^{(n)}) \neq 0$  et

$\left| \frac{dA^{(n)}}{df} \right| \neq 0 \quad \forall f$ . Soit le système d'équations :



$$\left\{ \begin{array}{l} g^2(A^{(n)}) \cdot \frac{d^2 A^{(n)}}{df^2} - A^{(n)} \cdot \hat{S}_x \cdot \left| \frac{dA^{(n)}}{df} \right|^2 = 0 \\ \left| A^{(n)} \right|^2 \cdot \frac{\partial \hat{S}_x}{\partial f} \cdot \left| \frac{dA^{(n)}}{df} \right|^2 = 0 \end{array} \right. \quad (49)$$

La seconde équation est équivalente à  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial g^2(A^{(n)})}{\partial f} \cdot \left| \frac{dA^{(n)}}{df} \right|^2 = 0$  qui est réalisée si :

$$g^2(A^{(n)}) = \left| A^{(n)}(f) \right|^2 \cdot \hat{S}_x(f) = \text{cste} \quad \forall f \quad (50)$$

Ceci impose que pour la solution optimale le critère d'adéquation aux données sera constant le long de la courbe.

On peut remarquer que la première équation du système (49) est de la même forme que l'équation, du cas quadratique mais avec un

$\lambda$  qui dépend de la fréquence  $f$  :  $\lambda(f) \cdot \frac{d^2 A^{(n)}}{df^2} = A^{(n)} \cdot \hat{S}_x$  avec  $\lambda(f) = \frac{g^2(A^{(n)})}{\left| \nabla_f A^{(n)} \right|^2}$ .

On peut également noter l'équation d'Hamilton-Jacobi du problème en développant les différentielles suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial A^{(n)}} = \frac{\partial F}{\partial \nabla_f A^{(n)}} = \frac{1}{2} \cdot g(A^{(n)}) \cdot \vec{\tau}^* \quad \text{avec} \quad F = g(A^{(n)}) \cdot \left| \nabla_f A^{(n)} \right| \\ \frac{\partial S}{\partial f} = F - \nabla_f A^{(n)*} \cdot \frac{\partial F}{\partial \nabla_f A^{(n)*}} - \nabla_f A^{(n)} \cdot \frac{\partial F}{\partial \nabla_f A^{(n)}} = 0 \end{array} \right.$$

L'équation d'Hamilton-Jacobi s'en déduit directement :

$$\left| 2 \cdot \frac{\partial S}{\partial A^{(n)*}} \right|^2 = g(A^{(n)})^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial S}{\partial f} = 0$$

qui donne par intégration :  $S = \frac{1}{2} \left( \int_1^{A^{(n)*}} g(A^{(n)}) \cdot \vec{\tau} \cdot dA^{(n)*} + \int_1^{A^{(n)}} g(A^{(n)}) \cdot \vec{\tau}^* \cdot dA^{(n)} \right) = \int_1^{A^{(n)}} g(A^{(n)}) \cdot (\vec{\tau} \circ dA^{(n)})$

### 4.3. symétries et invariances : théorème de Noether

Nous allons faire, à cette étape, appel au théorème de Noether. Le théorème de Noether est le principe mathématique générale qui associe à chaque symétrie infinitésimale d'une équation différentielle, une quantité, de façon telle que pour toute solution de cette équation, cette quantité soit conservée. L'expression de ce principe mathématique est donnée ci-dessous pour notre problème :

A chaque  $A^{(n)}(f)$ , nous avons associé la fonctionnelle :  $W(A^{(n)}(f)) = \int_{-1/2}^{1/2} L\left(f, A^{(n)}(f), \frac{dA^{(n)}(f)}{df}\right) \cdot df$

On peut remarquer que ce problème variationnel est invariant sous l'effet d'un groupe de symétrie à un paramètre agissant sur l'espace d'arrivée et sur l'espace de départ. En effet, nous avons les invariances suivantes :

$$W(\phi_s \bullet A^{(n)}(\psi_n(f))) = W(A^{(n)}(f)) \quad (51)$$

avec  $\phi_s \bullet A^{(n)}(f) = \phi_s(A^{(n)}(f)) = e^{i \cdot s} \cdot A^{(n)}(f)$  et  $\psi_n(f) = f + n$  avec  $s \in \text{Re}$  et  $n \in \mathbb{N}$

Ce qui s'écrit également :

$$W(e^{i.s}.A^{(n)}(f+n)) = W(A^{(n)}(f)) \quad \text{avec } s \in \text{Re} \quad \text{et } n \in \mathbb{N} \quad (52)$$

On peut écrire les transformations pour de petites variations :

$$\frac{d\phi_s(A^{(n)}(f))}{ds} = i.e^{i.s}.A^{(n)}(f) = i.\phi_s(A^{(n)}(f)) = U(\phi_s(A^{(n)}(f))) \quad \text{et} \quad \frac{d\psi_n(f)}{dn} = +1 = X(f) \quad (53)$$

Le théorème de Noether nous fournit alors le résultat suivant [Berest97],[Hél98] :

$$\frac{\partial \left[ -X(f) \cdot H(f) + U(A^{(n)}) \cdot P_{A^{(n)}}(f) + U(A^{(n)*}) \cdot P_{A^{(n)*}}(f) \right]}{\partial f} = 0 \quad (54)$$

avec les définitions suivantes : la fonction de Hamilton donnée par l'expression suivante :

$$H(f) = \nabla_f A^{(n)}(f) \cdot \frac{\partial L(f, A^{(n)}, \nabla_f A^{(n)})}{\partial \nabla_f A^{(n)}(f)} + \nabla_f A^{(n)*}(f) \cdot \frac{\partial L(f, A^{(n)}, \nabla_f A^{(n)})}{\partial \nabla_f A^{(n)*}(f)} - L(f, A^{(n)}, \nabla_f A^{(n)}) \quad (55)$$

l'impulsion généralisée :

$$P(f) = \begin{bmatrix} P_{A^{(n)}}(f) \\ P_{A^{(n)*}}(f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L(f, A^{(n)}, \nabla_f A^{(n)})}{\partial \nabla_f A^{(n)}(f)} \\ \frac{\partial L(f, A^{(n)}, \nabla_f A^{(n)})}{\partial \nabla_f A^{(n)*}(f)} \end{bmatrix} \quad (56)$$

Dans le cas où l'on a, comme précédemment, défini :  $L(f, A^{(n)}, \nabla_f A^{(n)}) = g(A^{(n)}) \cdot |\nabla_f A^{(n)}|$

Alors :

$$H(f) = 0 \quad P(f) = \frac{1}{2} \cdot \frac{g(A^{(n)})}{|\nabla_f A^{(n)}|} \begin{bmatrix} \nabla_f A^{(n)*} \\ \nabla_f A^{(n)} \end{bmatrix} \quad (57)$$

Ce qui entraîne que dans (54), seul reste :

$$U(A^{(n)}) \cdot P_{A^{(n)}}(f) + U(A^{(n)*}) \cdot P_{A^{(n)*}}(f) = i.g(A^{(n)}) \cdot (A^{(n)}(f) \circ \vec{\tau}) \quad (58)$$

Ce qui prouve que le terme d'adéquation aux données  $g(A^{(n)})$  est constant quelque soit  $f$  pour l'extrémum :

$$\frac{\partial i.g(A^{(n)}) \cdot (A^{(n)}(f) \circ \vec{\tau})}{\partial f} = i \cdot (A^{(n)}(f) \circ \vec{\tau}) \cdot \frac{\partial g(A^{(n)})}{\partial f} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial g(A^{(n)})}{\partial f} = 0 \quad (59)$$

Nous utiliserons ce résultat dans la suite pour définir une nouvelle EDP pouvant plus simplement être discrétisée *via* la transformée en  $Z$ .

Nous obtiendrions un résultat équivalent  $\frac{\partial g(A^{(n)})}{\partial f} = 0$  si la fonctionnelle était :

$$L(f, A^{(n)}, \nabla_f A^{(n)}) = g^2(A^{(n)}) \cdot |\nabla_f A^{(n)}|^2$$

#### 4.4. EDP du cas quadratique homogène

Pour résoudre numériquement le problème de minimisation précédent (33), nous allons d'abord rappeler le lemme suivant [Cart77] (donné en annexe 7) :

LEMME 1 :  
 Soit  $F(f, x, y)$ , si pour l'extrémale  $\frac{\partial F}{\partial f} = 0$   
 alors  $\frac{\partial F}{\partial y} \cdot y - F$  est constant sur chaque extrémale de  $\int_{-1/2}^{1/2} F(f, x, y) \cdot df$

L'équivalent de ce lemme dans le cas complexe est donné par :

$$\frac{d}{df} \left( F - \frac{\partial F}{\partial \left( \frac{dA^{(n)*}}{df} \right)} \cdot \left( \frac{dA^{(n)*}}{df} \right) - \frac{\partial F}{\partial \left( \frac{dA^{(n)}}{df} \right)} \cdot \left( \frac{dA^{(n)}}{df} \right) \right) = \frac{\partial F}{\partial f} \quad (60)$$

Dans le cas applicatif d'analyse autorégressive, nous posons :  $F \left( f, A^{(n)}(f), \frac{dA^{(n)}(f)}{df} \right) = g(A^{(n)})^2 \cdot \left| \frac{dA^{(n)}(f)}{df} \right|^2$

Or nous avons vu que pour l'extrémale le théorème de Noether, par (54) et (57) permettait d'affirmer que  $\frac{\partial g(A^{(n)})}{\partial f} = 0$  pour l'extrémale. Ce qui implique que  $\frac{\partial F}{\partial f} = 0$ . En appliquant alors le lemme 1 et l'équation (60) à notre cas où  $F(f, x, y)$  est quadratique homogène en  $y$  :

$$\frac{d}{df} \left[ F - \frac{\partial F}{\partial \left( \frac{dA^{(n)*}}{df} \right)} \cdot \left( \frac{dA^{(n)*}}{df} \right) - \frac{\partial F}{\partial \left( \frac{dA^{(n)}}{df} \right)} \cdot \left( \frac{dA^{(n)}}{df} \right) \right] = -\frac{dF}{df} = 0 \quad \Rightarrow F = cste \quad (61)$$

$F$  est, dans ce cas, constante pour l'extrémale recherchée. On peut alors utiliser le lemme suivant (cf. annexe 8) :

LEMME 2 :  
 Si  $F$  est quadratique homogène en  $y$ , et si pour l'extrémale  $\frac{\partial F}{\partial f} = 0$ , alors toute extrémale de  $\int_{-1/2}^{1/2} F \cdot df$  est aussi extrémale de  $\int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{F} \cdot df$ .

On préférera la nouvelle fonctionnelle car elle conduira comme nous le verrons à une expression plus simple à discrétiser pour l'équation d'Euler-Lagrange associée. Nous allons donc considérer dans la suite le problème de minimisation suivant :

$$\text{Min}_A \int_{-1/2}^{1/2} F \left( f, A^{(n)}(f), \frac{dA^{(n)}(f)}{df} \right) \cdot df \quad \text{avec} \quad F \left( f, A^{(n)}(f), \frac{dA^{(n)}(f)}{df} \right) = g(A^{(n)}(f))^2 \cdot \left| \frac{dA^{(n)}(f)}{df} \right|^2 \quad (62)$$

Les équation d'Euler-Lagrange pour  $F(\cdot)$  nous donnent dans le cas complexe :

$$\delta L = \frac{d}{df} \left[ \frac{\partial F}{\partial y^*} \right] - \frac{\partial F}{\partial x^*} = 0 \quad \text{avec } x = A^{(n)}(f) \quad \text{et } y = \frac{dA^{(n)}(f)}{df}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y^*} = g^2(x) \cdot y = g^2(A^{(n)}(f)) \cdot \frac{dA^{(n)}(f)}{df} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial x^*} = \frac{\partial g^2(x)}{\partial x^*} \cdot |y|^2 = A^{(n)}(f) \cdot \hat{S}_x(f) \cdot \left| \frac{dA^{(n)}(f)}{df} \right|^2 \quad (63)$$

L'extrémale recherchée est ainsi état stable de l'équation aux dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial A^{(n)}(f)}{\partial t} = \frac{d}{df} \left[ g^2(A^{(n)}(f)) \cdot \frac{dA^{(n)}(f)}{df} \right] - A^{(n)}(f) \cdot \hat{S}_x(f) \cdot \left| \frac{dA^{(n)}(f)}{df} \right|^2$$

$$\text{avec } g^2(A^{(n)}(f)) = \left( |A^{(n)}(f)|^2 \cdot \hat{S}_x(f) \right) \quad \text{et} \quad \hat{S}_x(f) = \sum_{l=-N}^{+N} \hat{r}_l^x \cdot e^{-j2\pi fl} \quad \text{dont } \hat{r}_l^x = \hat{E}[x_n \cdot x_{n-l}^*] \quad (64)$$

Cette EDP peut être également réécrite en développant le premier terme, ainsi :

$$\frac{\partial A^{(n)}(f)}{\partial t} = g^2(A^{(n)}(f)) \cdot \frac{d^2 A^{(n)}(f)}{df^2} + A^{(n)}(f)^* \cdot \frac{dA^{(n)}(f)}{df} \cdot \frac{d[A^{(n)}(f) \cdot \hat{S}_x(f)]}{df} \quad (65)$$

Nous allons à partir de l'équation (64), par discrétisation, définir un schéma numérique d'utilisation de l'EDP.

## 4.5. résolution par un schéma numérique EDP vectoriel

Nous allons décrire, dans ce paragraphe, deux schémas EDP permettant d'estimer les paramètres autorégressifs du modèle. Le premier schéma direct agit sur le vecteur des paramètres autorégressifs et le second, indirect, agit à chaque ordre du modèle sur les coefficients de réflexion.

### 4.5.1. schéma numérique EDP agissant sur le vecteur des paramètres AR

Comme dans la première partie de notre exposé, nous allons prendre la transformée en  $z$  de l'équation (64), et par identification terme à terme des puissances en  $z^{-1}$ , nous allons en déduire son expression matricielle. L'EDP peut alors se réécrire de façon synthétique sous une forme vectorielle comme suit (cf. annexe 9) :

$$\frac{\partial A_n}{\partial t} = J_n^T \cdot [\Sigma_n] \cdot J_n \cdot A_n - K(J_n \cdot A_n) \cdot T_n \cdot J_n \cdot A_n \quad (66)$$

Cette EDP s'interprète facilement en remarquant que  $\Sigma_n$  est la matrice Toeplitz des covariances des erreurs d'estimation  $\rho_k = E[e_n(i) \cdot e_n^*(i-k)]$  où  $e_n(i) = \sum_{p=0}^n a_p^{(n)} \cdot x_{i-p}$  et  $T_n$  la matrice des corrélations entre le signal et les erreurs d'estimation  $\tau_k = E[e_n(i) \cdot x_{i-k}^*]$ . Lorsque  $A_n$  tend vers le bon modèle, nous avons  $\lim_{A_n \rightarrow A_n^{opt}} \Sigma_n = \rho_0 \cdot I_n$  et  $\lim_{A_n \rightarrow A_n^{opt}} T_n = [0]_{n,n}$  et le vecteur autorégressif évolue lentement, puisqu'alors  $\frac{\partial A_n}{\partial t} = \rho_0 \cdot J_n^T \cdot J_n \cdot A_n$ .

Il faut remarquer que ces deux conditions sont celles qui sont utilisées pour aboutir à l'équation de Yule-Walker qui utilise les propriétés recherchées que :

$$\rho_k = E [e_n(i) \cdot e_n^*(i-k)] = \delta_{k,0} \cdot \rho_0 \text{ et } \tau_k = E [e_n(i) \cdot x_{i-k}^*] = 0 \quad , \quad \forall k \quad (67)$$

La première condition impose la blancheur de l'erreur d'estimation, et la seconde la non corrélation entre le signal et l'erreur d'estimation. Nous pouvons, pour simplifier l'algorithme, supprimer le deuxième terme, et ne conserver que le terme associé à l'équation de la chaleur anisotrope :

$$\frac{\partial A^{(n)}(f)}{\partial t} = \frac{d}{df} \left[ g^2(A^{(n)}, f) \cdot \frac{dA^{(n)}(f)}{df} \right] \Leftrightarrow \frac{\partial A_n}{\partial t} = J_n^T \cdot [\Sigma_n] \cdot J_n \cdot A_n \quad (68)$$

La discrétisation est la suivante avec un pas de discrétisation constant  $\Delta t$  :

$$A_{n,k+1} = [I_n + \Delta t \cdot J_n^T \cdot \Sigma_{n,k} \cdot J_n] A_{n,k}$$

La convergence de l'EDP précédente vers l'état stable impose de limiter à des valeurs faibles le pas de temps  $\Delta t$ . Pour lever cette limitation Weickert *et al.* [Weickert98] a proposé un schéma numérique inconditionnellement stable :

$$\frac{\partial}{\partial t} - \frac{d}{df} \left[ g^2(A^{(n)}, f) \cdot \frac{d}{df} \right] \cdot A^{(n)}(f) = 0 \Leftrightarrow [I_n - \Delta t \cdot J_n^T \cdot \Sigma_{n,k} \cdot J_n] \cdot A_{n,k+1} = A_{n,k} \quad (69)$$

soit l'équation récursive suivante :  $A_{n,k+1} = [I_n - \Delta t \cdot J_n^T \cdot \Sigma_{n,k} \cdot J_n]^{-1} \cdot A_{n,k}$

La matrice  $\Sigma_n = [\rho_k]_{Toeplitz}$  avec  $\rho_k = E [e_n(i) \cdot e_n^*(i-k)]$  est estimée par :

$$\hat{\rho}_k = \frac{1}{N-n+k+1} \left[ \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=n+k}^N f_n(i) \cdot f_n(i-k)^* + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=n+k}^N b_n(i) \cdot b_n(i-k)^* \right]$$

avec  $f_n(k) = \sum_{i=0}^n a_i^{(n)} \cdot x_{k-i}$ ,  $b_n(i) = \sum_{i=0}^n a_i^{(n)*} \cdot x_{k-n+i}$  et  $a_0^{(n)} = 1$ .

#### 4.5.2. schéma numérique EDP agissant sur les coefficients de réflexion

Il est également possible de résoudre l'équation de la chaleur anisotrope de façon récursive sur l'ordre à partir d'une EDP agissant sur le coefficient de réflexion  $\mu_n = a_n^{(n)}$ , en utilisant ces trois relations liées aux structures blocs des matrices mises en jeu dans l'équation aux dérivées partielles précédente :

$$J_n = \begin{bmatrix} J_{n-1} & 0 \\ 0 & (-i \cdot 2\pi) \cdot n \end{bmatrix} \quad \Sigma_n = \begin{bmatrix} \Sigma_{n-1} & P_{n-1}^{(-)} \\ P_{n-1}^{(-)+} & \rho_0 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad P_{n-1} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A_n = \begin{bmatrix} A_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_n \cdot \begin{bmatrix} A_{n-1}^{(-)} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (70)$$

On obtient alors l'EDP suivante :

$$\frac{\partial \mu_n}{\partial t} = (-i \cdot 2\pi)^2 \cdot n^2 \cdot \rho_0 \cdot \mu_n + (-i \cdot 2\pi) \cdot n \cdot P_{n-1}^{(-)+} \cdot J_{n-1} \cdot (A_{n-1} + \mu_n \cdot A_{n-1}^{(-)}) \quad (71)$$

qui se discrétise aisément sous la forme suivante :

$$\mu_{n,k+1} = \left[ 1 + (-i \cdot 2\pi)^2 \cdot n^2 \cdot \rho_0 + \Delta t (-i \cdot 2\pi) \cdot n \cdot P_{n-1,k}^{(-)+} \cdot J_{n-1} \cdot A_{n-1}^{(-)} \right] \cdot \mu_{n,k} + \Delta t (-i \cdot 2\pi) \cdot n \cdot P_{n-1,k}^{(-)+} \cdot J_{n-1} \cdot A_{n-1} \quad (72)$$

avec  $P_{n-1,k} = [\rho_i]_{i=1,\dots,n-1}$  et  $\hat{\rho}_i = \frac{1}{N-n+i+1} \left[ \frac{1}{2} \cdot \sum_{p=n+i}^N f_n(p) \cdot f_n(p-i)^* + \frac{1}{2} \cdot \sum_{p=n+i}^N b_n(p) \cdot b_n(p-i)^* \right]$

et les récursions classiques : 
$$\begin{cases} f_n(k) = f_{n-1}(k) + \mu_n \cdot b_{n-1}(k-1) \\ b_n(k) = b_{n-1}(k-1) + \mu_n^* \cdot f_{n-1}(k) \end{cases}$$

#### 4.6. avantages de l'approche variationnelle

Nous identifions deux avantages principaux à l'approche géométrique intrinsèque de la régularisation : il n'est plus nécessaire de régler l'hyperparamètre, fixant l'équilibre entre l'adéquation aux données et l'*a priori* sur la solution, et de plus, le processus peut traiter de façon naturelle le signal au rythme du flot des données.

L'approche EDP précédente permet de résoudre le problème concernant la détermination de l'hyperparamètre de régularisation [Thom91]. Par analogie avec ce qui est fait en traitement d'image [Seth99], la solution est obtenue lorsque la nouvelle estimation diffère peu de la précédente. En effet, aux erreurs d'arrondies près, le critère d'adéquation aux données ne s'annulera jamais complètement, mais proche de la solution recherchée, l'estimation est ralentie et évolue ensuite lentement. Ainsi, le critère d'arrêt permet de tester la vitesse d'évolution du processus et stoppe l'EDP au voisinage de l'optimale lorsque la solution n'évolue plus que très lentement. Le test d'arrêt de l'EDP, à chaque ordre, correspond à un seuil sur la pente de la variation du coefficient de réflexion mesurée par la métrique de Poincaré dans le disque unité :

$$Test_k = dist(\mu_{n,k-1}, \mu_{n,k-2}) - dist(\mu_{n,k}, \mu_{n,k-1}) \text{ avec } dist(\mu_{n,k}, \mu_{n,k-1}) = \left| \frac{\mu_{n,k} - \mu_{n,k-1}}{1 - \mu_{n,k} \cdot \mu_{n,k-1}^*} \right| \quad (73)$$

Le second intérêt de cette EDP est de pouvoir traiter les données en ligne au rythme du flot du rafraîchissement de celles-ci. Si l'on analyse continuellement un flot de données, avec un pas de discrétisation  $\Delta t$  assez fin, on pourra assurer une convergence rapide à chaque étape, en rafraîchissant régulièrement les données, et en initialisant l'EDP avec la solution établie au pas précédent. Considérons, par exemple, une analyse à fenêtre glissante, à chaque déplacement de la fenêtre, on initialisera l'EDP par le résultat obtenu au pas précédent. Si le spectre a peu évolué quelques itérations de l'EDP suffiront à converger vers la solution.

Il faut noter que notre approche n'est pas la seule (cf. [Dem87]) à permettre une estimation en ligne, mais il serait cependant intéressant de comparer les vitesses de convergences et le nombre d'opérations de calcul requises par ces différentes approches, ce qui n'est pas ici notre propos.

#### 4.7. courbure algébrique totale de la courbe autorégressive

Les courbes fermées peuvent être considérées comme les immersions du cercle dans le plan. Il est possible pour la courbe plane fermée et orientée  $A^{(n)}(f)$  de définir « un nombre d'enroulement » indiquant de combien le vecteur tangent  $\vec{\tau}_A(f) = \frac{\nabla_f A^{(n)}(f)}{|\nabla_f A^{(n)}(f)|}$

tourne lorsqu'on parcourt la courbe une fois. Nous verrons dans les exemples, que l'EDP faisant évoluer  $A^{(n)}(f)$  a tendance à faire diminuer le nombre d'enroulements (la courbe initiale et après convergence ne seront pas homotopes). Ce nombre d'enroulements de  $A^{(n)}(f)$  nous est donné par la courbure algébrique totale définie par :

$$\int_0^{L_A} \kappa_A \cdot ds = \int_0^1 \kappa_A \cdot |\nabla_f A^{(n)}(f)| \cdot df = \int_0^1 Re \left[ \frac{-i \cdot \Delta_f A^{(n)}(f)}{\nabla_f A^{(n)}(f)} \right] \cdot df \quad (74)$$

à partir de la formule suivante [Berger87] :

$$\int_0^{L_A} \kappa_A \cdot ds = 2\pi \cdot \text{Enroul} \left( A^{(n)}(f) \right) \quad (75)$$

#### 4.8. extension au cas du Lagrangien homogène dans $C \times R$

Dans l'approche variationnelle que nous avons décrite précédemment, la variable fréquentielle  $f$  conservait un statut particulier, aussi considérons-nous ici  $A^{(n)}(f)$  comme un point dans un nouvel espace dit de configuration-fréquence qui peut être mis en bijection avec  $R^3$  ou  $C \times R$ . On considère la courbe spatiale suivante dont la représentation paramétrique est  $P^{(n)}(f) = \begin{bmatrix} A^{(n)}(f) \\ f \end{bmatrix}$ . Nous allons identifier la nouvelle formulation du problème d'Euler-Lagrange associé. On peut définir sur cette courbe spatiale le trièdre de Frenet  $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$  :

$$P^{(n)}(f) = \begin{bmatrix} \frac{A^{(n)} + A^{(n)*}}{2} \\ \frac{A^{(n)} - A^{(n)*}}{2.i} \\ f \end{bmatrix}, \quad \vec{\tau} = \nabla_s P^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla_f A^{(n)}|^2}} \begin{bmatrix} \frac{\nabla_f A^{(n)} + \nabla_f A^{(n)*}}{2} \\ \frac{\nabla_f A^{(n)} - \nabla_f A^{(n)*}}{2.i} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{n} = \frac{\Delta_s P^{(n)}}{|\Delta_s P^{(n)}|} = \frac{1}{\kappa} \cdot \nabla_s \vec{\tau} \quad (76)$$

$$\vec{b} = \vec{\tau} \wedge \vec{n} \quad \text{et} \quad L_{P^{(n)}} = \int_{-1/3}^{1/2} \sqrt{1 + |\nabla_f A^{(n)}|^2} . df$$

L'évolution du trièdre de Frenet le long de la courbe est décrite par les équations classiques de Frenet en fonction de la torsion de la courbe  $\delta$  et sa courbure  $\kappa$  :

$$\frac{\partial \vec{\tau}}{\partial s} = \kappa . \vec{n} \quad \frac{\partial \vec{n}}{\partial s} = -\kappa . \vec{\tau} + \delta . \vec{b} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{b}}{\partial s} = -\delta . \vec{n} \quad (77)$$

où la courbure et la torsion sont définies par :

$$\kappa = \frac{|\nabla_f P^{(n)} \wedge \nabla_f^2 P^{(n)}|}{|\nabla_f P^{(n)}|^3} \quad \text{et} \quad \delta = \frac{\text{Det} [\nabla_f P^{(n)}, \nabla_f^2 P^{(n)}, \nabla_f^3 P^{(n)}]}{|\nabla_f P^{(n)} \wedge \nabla_f^2 P^{(n)}|^2} \quad (78)$$

Le problème variationnel est reformulé pour la courbe spatiale avec la nouvelle fonctionnelle :

$$L = \int_{-1/2}^{1/2} F(f, A^{(n)}(f), \nabla_f A^{(n)}(f)) . df \quad \text{avec} \quad g(A^{(n)}(f)) = \sqrt{|A^{(n)}(f)|^2 . \hat{S}_x(f)} \quad (79)$$

$$\text{et} \quad F(f, A^{(n)}(f), \nabla_f A^{(n)}(f)) = g(A^{(n)}(f)) . \sqrt{1 + |\nabla_f A^{(n)}(f)|^2}$$

On déduit la nouvelle EDP, Mean-Curvature Flow spatiale, en utilisant la décomposition intermédiaire suivante :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g(A^{(n)}, f)}{\partial A^{(n)*}} \\ \frac{\partial g(A^{(n)}, f)}{\partial f} \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} \frac{\partial g(A^{(n)}, f)}{\partial A^{(n)*}} \\ \frac{\partial g(A^{(n)}, f)}{\partial f} \end{bmatrix} \circ \vec{\tau} \right) . \vec{\tau} + \left( \begin{bmatrix} \frac{\partial g(A^{(n)}, f)}{\partial A^{(n)*}} \\ \frac{\partial g(A^{(n)}, f)}{\partial f} \end{bmatrix} \circ \vec{n} \right) . \vec{n} + \left( \begin{bmatrix} \frac{\partial g(A^{(n)}, f)}{\partial A^{(n)*}} \\ \frac{\partial g(A^{(n)}, f)}{\partial f} \end{bmatrix} \circ \vec{b} \right) . \vec{b} \quad (80)$$

De laquelle, nous déduisons directement l'expression :

$$\frac{\partial P^{(n)}(f)}{\partial t} = \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial A^{(n)}(f, t)}{\partial t} \\ \frac{\partial f}{\partial t} \end{array} \right] = g(A^{(n)}, f) \cdot \kappa \cdot \vec{n} - (\nabla P^{(n)}(f) \circ \vec{n}) \cdot \vec{n} - (\nabla P^{(n)}(f) \circ \vec{b}) \cdot \vec{b}$$

$$\text{avec } \nabla P^{(n)}(f) = \left[ \begin{array}{c} 2 \cdot \frac{\partial g(A^{(n)}, f)}{\partial A^{(n)*}} \\ \frac{\partial g(A^{(n)}, f)}{\partial f} \end{array} \right]$$
(81)

Pour palier l'effet de lissage du terme dépendant de la courbure, il pourrait être envisageable de rajouter un terme dépendant de la torsion dans la direction de la binormale :  $\vec{F}_{orce} = g(A^{(n)}, f) \cdot \delta \cdot \vec{b}$  (la torsion s'annule lorsque la courbe de cette hélicoïde est planaire, ce qui correspond à un pic du spectre). On peut utiliser cette propriété pour augmenter le contraste du spectre avec le terme de torsion tout en régularisant avec le terme de courbure, avec une équation symétrique du type :

$$\frac{\partial P^{(n)}(f)}{\partial t} = \left[ g(A^{(n)}, f) \cdot \kappa - (\nabla P^{(n)}(f) \circ \vec{n}) \right] \cdot \vec{n} + \left[ g(A^{(n)}, f) \cdot \delta - (\nabla P^{(n)}(f) \circ \vec{b}) \right] \cdot \vec{b}$$
(82)

Les outils de la géométrie différentielles des courbes spatiales permettent également d'envisager de nouvelles équations de flot [Alf99][Alt91a][Alt91b], dont la plus connue est le flot de Darboux [Darb78] :

$$P^{(n)}(f_n, t+1) = \frac{1}{2} \cdot \left[ P^{(n)}(f_n, t) + P^{(n)}(f_{n+1}, t) \right]$$
(83)

Il est également possible d'étudier le polynôme  $A^{(n)}(f)$  dans le contexte de la théorie des nœuds respectivement de deux manières. La première approche consiste à construire la courbe fermée  $C^{(n)}(f)$  par l'expression suivante :

$$C^{(n)}(f) = \left[ \begin{array}{c} \text{Re} [A^{(n)}(f)] \cdot \cos(2\pi f) \\ \text{Re} [A^{(n)}(f)] \cdot \sin(2\pi f) \\ \text{Im} [A^{(n)}(f)] \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \left( \frac{A^{(n)}(f) + A^{(n)*}(f)}{2} \right) \cdot e^{i2\pi f} \\ \frac{A^{(n)}(f) - A^{(n)*}(f)}{2i} \end{array} \right]$$
(84)

Pour la seconde approche, nous considérons les trois courbes décrites sur la sphère unité par les vecteurs de Frenet [Rog99][Fench50] : l'indicatrice sphérique des vecteurs tangents, les vecteurs normaux principaux et les vecteurs binormaux. Ainsi, l'étude de la courbe spatiale peut être réduite à l'étude de trois courbes sur la sphère unité. Pour ce faire, considérons la paramétrisation  $d\sigma = \kappa \cdot ds$ , on obtient alors trois équations différentielles non-linéaires couplées à partir de la courbure géodésique

$$\kappa_g = \frac{\delta}{\kappa} : \frac{d^2 \vec{\tau}}{d\sigma^2} = -\vec{\tau} + \kappa_g \cdot \vec{\tau} \wedge \frac{d\vec{\tau}}{d\sigma}$$
(85)

Ces trois équations peuvent se réduire à une seule linéaire du 3<sup>ème</sup> ordre avec trois coordonnées découplées :

$$\kappa_g \cdot \frac{d^3 \vec{\tau}}{d\sigma^3} - \frac{d\kappa_g}{d\sigma} \cdot \frac{d^2 \vec{\tau}}{d\sigma^2} + (\kappa_g + \kappa_g^3) \cdot \frac{d\vec{\tau}}{d\sigma} - \frac{d\kappa_g}{d\sigma} \cdot \vec{\tau} = 0$$
(86)

On pourrait également essayer d'étudier des fonctionnelles relatives à la variation de courbure et de torsion [Gallier01][Moret93][Welch95].

Je termine ce paragraphe en citant les travaux de A. Manikas [Mani94][Mani95], qui a récemment utilisé les outils de géométrie différentielle pour décrire le diagramme d'antenne sous forme d'une courbe complexe dans  $C^N$  sur le disque complexe  $N$ -dimensionnel de rayon  $\sqrt{N}$ , en étendant au cas complexe une base de coordonnées orthonormales locales décrite par la matrice de Cartan des courbures.



## 5. équation de Burgers pour le cepstre différentiel

Nous allons montrer que le cepstre différentiel, utilisé classiquement en traitement de la parole pour définir une distance entre spectres *via* le « retard de groupe », est identifiable à la transformée de Hopf-Cole du polynôme autorégressif. Il en découle que le cepstre différentiel évolue suivant l'équation de Burgers qui fournit un schéma numérique directe d'estimation de ses paramètres.

### 5.1. rappels sur le cepstre et le retard de groupe

Les paramètres cepstraux se calculent de façon explicite à partir des paramètres autorégressifs. En effet, en notant que :

$$C^{(n)}(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \cdot z^{-k} = -\ln A^{(n)}(z) \Rightarrow \frac{dA^{(n)}(z)}{dz^{-1}} = -A^{(n)}(z) \cdot \frac{dC^{(n)}(z)}{dz^{-1}} \quad (87)$$

et

$$\ln \left[ \frac{\rho_0}{|A^{(n)}(z)|^2} \right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \cdot z^{-k} \quad \text{avec} \quad c_0 = \ln \rho_0 \quad \text{et} \quad c_{-k} = c_k \quad (88)$$

Les paramètres cepstraux sont alors calculés comme suit à partir de (88) :

$$C_L = -J_L^{-1} \cdot G_L^{-1} \cdot J_L \cdot \begin{bmatrix} A_n \\ 0_{L-n} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad C_L = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_L \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad G_L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ a_n & \cdots & a_1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & \cdots & a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_n & \cdots & a_1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n & \cdots & a_1 & 1 \end{bmatrix} \quad (89)$$

La définition de  $J_L$  est donnée dans l'équation (32). Il faut noter qu'il existe d'autres relations entre paramètres autorégressifs et coefficients cepstraux établies par Schroeder dans [Schroe81].

Le cepstre différentiel (la dérivée du cepstre) a été utilisé en traitement du signal pour définir une distance paramétrée robuste entre modèles autorégressifs. En effet, les coefficients cepstraux peuvent également s'exprimer à partir de la somme des puissances des racines de  $A^{(n)}$  en utilisant le développement de  $\ln(x)$  :

$A^{(n)}(z) = \prod_{i=1}^n (1 - z_i^{(n)} \cdot z^{-1})$  et  $\ln \left[ \frac{1}{A^{(n)}(z)} \right] = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \cdot z_k^{(n)m} \cdot z^{-m}$ . En inversant l'ordre de sommation (la convergence uniforme étant assurée par  $|z_k^{(n)} \cdot z^{-1}| < 1$ ) :

$$\ln \left[ \frac{1}{A^{(n)}(z)} \right] = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \cdot \left( \sum_{k=1}^n z_k^{(n)m} \right) \cdot z^{-m} = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \cdot z^{-m}$$

dont on déduit l'expression du coefficient cepstral en fonction des racines du polynôme autorégressif :  $-k \cdot c_k = \left[ \sum_{i=1}^n \left( z_i^{(n)} \right)^k \right]$ . Or

les coefficients  $\{-k \cdot c_k\}$  sont justement les coefficients du cepstre différentiel :

$$\frac{\partial C^{(n)}(f)}{\partial f} = (i \cdot 2 \cdot \pi) \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} (-k \cdot c_k) \cdot e^{-i2\pi f k} = (i \cdot 2 \cdot \pi) \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \sum_{i=1}^n \left( z_i^{(n)} \right)^k \right) \cdot e^{-i2\pi f k} \quad (90)$$

Ce qui permet de définir une distance habituellement nommée « retard de groupe » entre un jeux de paramètres [Itak75][Yeg79] « 1 » et « 2 » :

$$d^2(L) = \sum_{k=1}^L \left| k.c_k^{(1)} - k.c_k^{(2)} \right|^2 = \sum_{k=1}^L \left| \sum_{i=1}^n (z_{i,1}^{(n)k} - z_{i,2}^{(n)k}) \right|^2 \quad (91)$$

Cette distance est ainsi directement relié à la distance entre racines du polynôme autorégressif.

## 5.2. rappels sur l'équation de Burgers

Burgers [Burge74] a été le premier a introduire l'équation non linéaire de diffusion

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \gamma \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{avec } \gamma \in \mathcal{R}^+ \\ u_0(x) = u(0, u) \end{cases} \quad (92)$$

Cette équation a été très étudiée car elle correspond à la forme asymptotique de nombreux systèmes à la fois non linéaires et dissipatifs. Elle a particulièrement été étudiée comme modèle pour l'étude de la turbulence. Comme l'équation de Navier-Stokes, l'équation de Burgers présente une non-linéarité quadratique. Pour  $\gamma$  tendant vers 0, la solution présente des chocs au bout d'un temps fini.

L'équation de Burgers est de type parabolique comme l'équation de Fourier, mais comporte un terme non-linéaire  $u \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$ .

A cette étape, nous allons rappeler, la définition de la transformation de Bäcklund de l'équation de Burgers qui met en relation par enchaînement direct et inverse les éléments d'une famille de solution [Fourn83][Fourn86] :

Soit l'équation de Burgers définie par :

$$B(X) = \frac{\partial X}{\partial t} + X \cdot \frac{\partial X}{\partial f} - \nu \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial f^2} = 0 \quad (93)$$

Si l'on pose :  $X = U - 2 \frac{\nu}{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial f}$ , on obtient la transformation de Bäcklund (cf. annexe 10) :

$$\boxed{B \left( U - 2 \frac{\nu}{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial f} \right) = B(U) - 2 \cdot \nu \cdot \frac{\partial}{\partial f} \left[ \frac{1}{A} \left( \frac{\partial A}{\partial t} + U \cdot \frac{\partial A}{\partial f} - \nu \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial f^2} \right) \right]} \quad (94)$$

Le cas  $U = A$  définit la transformation dite de Miura et le choix  $U \equiv 0$  permet de retrouver la transformation dite de Hopf-Cole [Hopf50][Cole51] qui linéarise l'équation de Burgers :

$$\boxed{U \equiv 0 \Rightarrow B \left( -2 \frac{\nu}{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial f} \right) = -2 \cdot \nu \cdot \frac{\partial}{\partial f} \left[ \frac{1}{A} \left( \frac{\partial A}{\partial t} - \nu \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial f^2} \right) \right]} \quad (95)$$

qui montre que si  $X = -2 \frac{\nu}{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial f}$  est solution de l'équation de Burgers, alors  $A$  est solution de l'équation de Fourier :

$$\frac{\partial A}{\partial t} - \nu \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial f^2} = 0$$

et réciproquement. Si l'on se ramène à notre problème d'analyse autorégressive, pour laquelle on définit le Cepstre  $C^{(n)}(f)$  par :

$$C^{(n)}(f) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k^x \cdot e^{-i2\pi f k} = -\ln A^{(n)}(f) \quad (96)$$

On remarque que le Cepstre différentiel  $D^{(n)}(f)$  correspond à la transformation de Hopf-Cole de  $A^{(n)}(f)$  :

$$D^{(n)}(f) = 2\nu \cdot \frac{\partial C^{(n)}(f)}{\partial f} = -2\nu \cdot \frac{\partial \ln A^{(n)}(f)}{\partial f} = -2\nu \cdot \frac{1}{A^{(n)}(f)} \cdot \frac{\partial A^{(n)}(f)}{\partial f} \quad (97)$$

Nous rappelons à cette étape une remarque importante qui a servi de base aux développements des approches EDP en traitement d'image : les solutions itératives de l'équation de Fourier de diffusion et l'équation de Burgers à un instant  $t$  sont également les solutions d'une convolution du signal par un noyau de convolution qui dépend explicitement du paramètre  $t$ . Cette équation de convolution est la suivante dans le cas général :

$$U(f, t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\lambda} \cdot F(f, \zeta, t)} \cdot U(\zeta, 0) \cdot d\zeta}{N} \quad \text{avec} \quad N = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\lambda} \cdot F(f, \zeta, t)} \cdot d\zeta \quad (98)$$

Dans le cas de l'EDP de Fourier, ce noyau de convolution est un noyau gaussien dont la variance associée dépend de  $t$  ( $\sigma^2 = 2\lambda t$ ) :

pour  $A(f, t) = U(f, t)$  alors  $\frac{\partial A(f, t)}{\partial t} = \nu \cdot \frac{\partial^2 A(f, t)}{\partial f^2}$  avec  $F(f, \zeta, t) = \frac{(f - \zeta)^2}{2t}$  (99)

Ce qui n'est plus le cas pour l'équation de Burgers, où le noyau de convolution dépend de la condition initiale  $U(\eta, 0)$  :

$$D(f, t) = -2\nu \cdot \frac{\partial \ln A(f, t)}{\partial f} = U(f, t) \quad \text{alors} \quad \frac{\partial D(f, t)}{\partial t} + D(f, t) \cdot \frac{\partial D(f, t)}{\partial f} = \nu \cdot \frac{\partial^2 D(f, t)}{\partial f^2}$$

avec  $F(f, \zeta, t) = \frac{(f - \zeta)^2}{2t} + \int_0^\zeta D(\eta, 0) \cdot d\eta$  (100)

Ces équivalences montrent qu'une convolution d'un signal par un noyau peut être obtenue de façon itérative par l'itération d'une EDP. C'est cette équivalence qui permet de remplacer la vision statique classique par une vision dynamique, pour la régularisation.

### 5.3. équation de Burgers dans le cas de l'analyse autoregressive

Dans le cas où le polynôme évolue suivant le terme d'adéquation aux données du premier cas (27) étudié :

$$\frac{\partial A^{(n)}(f)}{\partial t} = \lambda \cdot \frac{\partial^2 A^{(n)}(f)}{\partial f^2} - A^{(n)}(f) \cdot \hat{S}_x(f) \quad \text{alors} \quad \frac{1}{A^{(n)}(f)} \cdot \frac{\partial A^{(n)}(f)}{\partial t} = \frac{\lambda}{A^{(n)}(f)} \cdot \frac{\partial^2 A^{(n)}(f)}{\partial f^2} - \hat{S}_x(f) \quad (101)$$

Sachant que :

$$C^{(n)}(f) = -\ln A^{(n)}(f) \quad \text{soit} \quad \frac{\partial A^{(n)}(f)}{\partial f} = -A^{(n)}(f) \cdot \frac{\partial C^{(n)}(f)}{\partial f} \quad (102)$$

Et en dérivant à nouveau par rapport à  $f$  :

$$\frac{\partial^2 A^{(n)}(f)}{\partial f^2} = A^{(n)}(f) \cdot \left[ \left( \frac{\partial C^{(n)}(f)}{\partial f} \right)^2 - \frac{\partial^2 C^{(n)}(f)}{\partial f^2} \right] \quad (103)$$

On en déduit alors que :

$$\boxed{\frac{\partial C^{(n)}(f)}{\partial t} = \lambda \cdot \left[ \frac{\partial^2 C^{(n)}(f)}{\partial f^2} - \left( \frac{\partial C^{(n)}(f)}{\partial f} \right)^2 \right] + \hat{S}_x(f)} \quad (104)$$

En prenant alors le Cepstre Différentiel  $D^{(n)}(f) = 2 \cdot \lambda \cdot \frac{\partial C^{(n)}(f)}{\partial f}$  et en développant l'expression suivante, correspondant à l'équation (90) dérivée par rapport à  $f$  :

$$\frac{\partial^2 C^{(n)}(f)}{\partial t \partial f} = \lambda \cdot \frac{\partial}{\partial f} \left[ \frac{\partial^2 C^{(n)}(f)}{\partial f^2} - \left( \frac{\partial C^{(n)}(f)}{\partial f} \right)^2 \right] + \frac{\partial \hat{S}_x(f)}{\partial f} \quad (105)$$

On retrouve finalement l'équation de Burgers reliée au terme d'attache aux données :

$$\boxed{\frac{\partial D^{(n)}(f)}{\partial t} + D^{(n)}(f) \cdot \frac{\partial D^{(n)}(f)}{\partial f} = \lambda \cdot \frac{\partial^2 D^{(n)}(f)}{\partial f^2} + 2 \cdot \lambda \cdot \frac{\partial \hat{S}_x(f)}{\partial f}} \quad (106)$$

Nous appellerons cette équation, l'équation de Burgers pour l'analyse spectrale autorégressive (Equation de Burgers avec potentiel).

Suivant les résultats classiques de l'étude du comportement de l'équation de Burgers, les chocs se créent donc pour  $\frac{\partial \hat{S}_x(f)}{\partial f} = 0$ ,

c'est-à-dire pour les pics du spectre et sont lissés par le terme de diffusion  $\frac{\partial^2 D^{(n)}(f)}{\partial f^2}$  [Fourn83],[Fourn86]. Nous illustrerons ce comportement non-linéaire au chapitre 7.

## 6. cadre d'interprétation par le champ vectoriel de Polya

Dans cette dernière partie théorique, nous donnons une dernière interprétation géométrique, basée sur une remarque du mathématicien Polya qui a donné une interprétation de l'intégration complexe en terme de travail et de flux du champ vectoriel complexe conjugué [Polya74][Brad87][Need98].

### 6.1. représentation des fonctions complexes sous forme de champ de vecteurs

La valeur  $f(z)$  d'une fonction complexe peut être représentée par un vecteur  $V(z)$  issu de  $z$  et donne le champ de vecteurs défini par cette fonction  $f(z)$ . L'interprétation sous forme de champ de vecteurs permet de définir la notion de flux et de travail par rapport à un parcours d'intégration.

$V = (V \cdot \vec{T}) \cdot \vec{T} + (V \cdot \vec{N}) \cdot \vec{N}$  avec  $\vec{T} = i \cdot \vec{N}$  :  $\vec{T}$  et  $\vec{N}$  vecteurs tangent et normal à un chemin orientée  $\Gamma$  immergée dans le champ vectoriel  $V$ . Le flux est alors défini par :  $F[V, \Gamma] = \int_{\Gamma} (V \cdot \vec{N}) \cdot ds$  et le travail par :

$W[V, \Gamma] = \int_{\Gamma} (V \cdot \vec{T}) \cdot ds$  avec les propriétés suivantes :

( $V$  sans source  $\Rightarrow F[V, \text{boucle } qq] = 0$ ) et ( $V$  irrotationnel  $\Rightarrow W[V, \text{boucle } qq] = 0$ ).

On définit également les notions de divergence et rotationnel : avec  $V = V_x + i.V_y$ .

$$\text{Divergence : } \nabla \cdot V = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \text{ et rotationnel : } \nabla \times V = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \quad (107)$$

qui permettent d'exprimer de façon synthétique, le théorème de Gauss :

$F[V, \Gamma] = \iint_R [\nabla \cdot V] .dA$  et le théorème de Stokes :  $W[V, \Gamma] = \iint_R [\nabla \times V] .dA$ . Nous allons alors rappeler dans la suite le lien établi par Polyá entre cette description vectorielle d'une fonction complexe et l'intégration complexe de celle-ci.

## 6.2. flux et travail du champ vectoriel de Polyá

Polyá, à partir de cette représentation d'une fonction complexe sous la forme d'un champ de vecteurs, a donné une nouvelle interprétation géométrique à l'intégration d'une fonction suivant un chemin.

Considérons :

$$\int_{\Gamma} V(z) .dz \text{ avec } V = |V| .e^{i.\beta} \text{ et } dz = e^{i.\alpha} .ds \quad (108)$$

On définit le vecteur de Polyá par :  $V^* = |V^*| .e^{-i.\beta}$ . On remarque alors que :

$$\begin{aligned} V .dz &= |V^*| .e^{i.\theta} .ds \text{ avec } \theta = \alpha - (-\beta) \\ V .dz &= [|V^*| .\cos \theta + i .|V^*| .\sin \theta] .ds = [V^* .\vec{T} + i .V^* .\vec{N}] .ds \end{aligned} \quad (109)$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\int_{\Gamma} V(z) .dz = W[V^*, \Gamma] + i .F[V^*, \Gamma] \quad (110)$$

Cette écriture de Polyá permet alors de donner une nouvelle interprétation au *théorème de Cauchy* :

Le champ de vecteurs de Polyá de  $V$  est non divergent et non rotationnel si et seulement si  $V$  est analytique.

De plus, les formules de Gauss et Stokes permettent d'écrire :

$$\oint_K V(z) .dz = \iint_R [\nabla \times V] .dA + i . \iint_R [\nabla \cdot V] .dA \quad (111)$$

## 6.3. interprétation de la régularisation

Cette écriture élégante de l'intégration complexe permet de faire la remarque suivante, que nous illustrerons par la suite sur des exemples au chapitre 7. Dans le cas autorégressif, le parcours d'intégration choisi est celui du cercle complexe unité  $D = \{z \in C / |z| = 1\}$  et nous pouvons écrire la relation (110) :

$$\oint_{D/|z|=1} A^{(n)}(z) .dz = W[A^{(n)*}(z), D] + i .F[A^{(n)*}(z), D] = \iint_R [\nabla \times A^{(n)} + i .\nabla \cdot A^{(n)}] .dR \quad (112)$$

Plus on régularise la solution, et plus le modèle autorégressif obtenu tend vers un spectre de bruit blanc c'est-à-dire un polynôme autorégressif égal à la constante unité. Dans le cas extrême de la régularisation (on ne stoppe pas l'EDP), le polynôme autorégressif est réduit à une constante, et nous avons :

$$A^{(n)}(z) = 1 \Rightarrow \oint_{D/|z|=1} A^{(n)}(z) . dz = 0 \Rightarrow \begin{cases} W [A^{(n)*}(z), D] = 0 \\ F [A^{(n)*}(z), D] = 0 \end{cases} \quad (113)$$

Il apparaît donc que la régularisation tend à rendre le champ des vecteurs autorégressifs conjugués non-divergent et non rotationnel sur le parcours d'intégration défini par le cercle unité complexe.

## 7. illustration par l'exemple

Nous donnons quelques résultats en illustration de notre propos obtenus sur des données complexes enregistrées issues d'un échographe Doppler. Ces données nous ont été fournies par l'université de Florence pour l'étude Européenne DOLPHINS, dans le cadre de l'action BIOMED II du 4<sup>ème</sup> programme cadre.

### 7.1. courbe polynômiale, boucles et flot de courbure moyenne

Dans cette première partie, nous montrons le comportement de la courbe orientée  $A^{(n)}(z)$  soumise au processus dynamique de régularisation mis en œuvre par l'EDP (66) (il s'agit d'une analyse de 7 échantillons soit un modèle autorégressif d'ordre 6). Les séquences d'images se lisent de gauche à droite et de haut en bas :

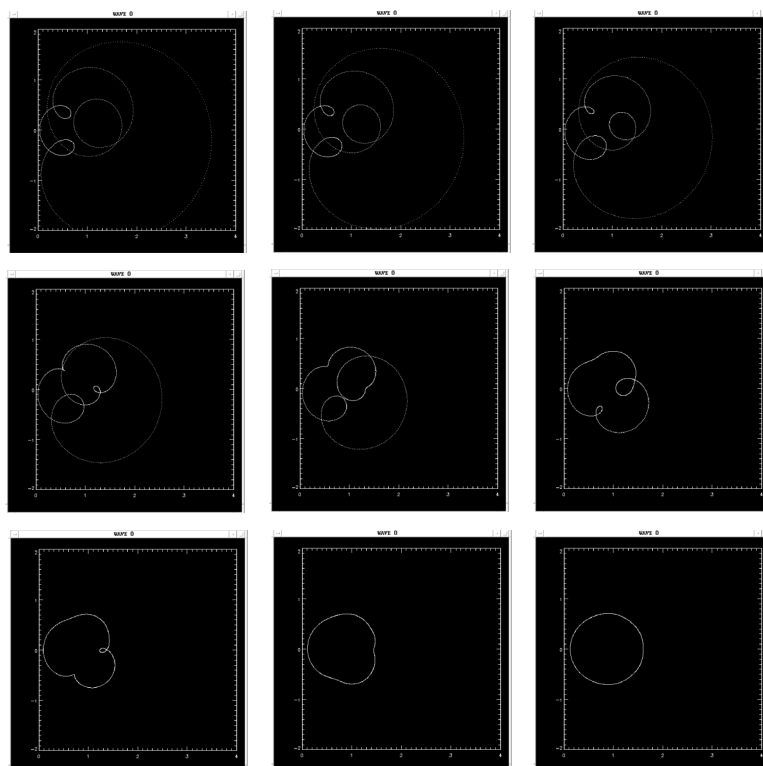


Figure 2. – Evolution de la courbe  $\{A^{(n)}(z) / |z| = 1\}$  pour un signal mono-fréquentiel.

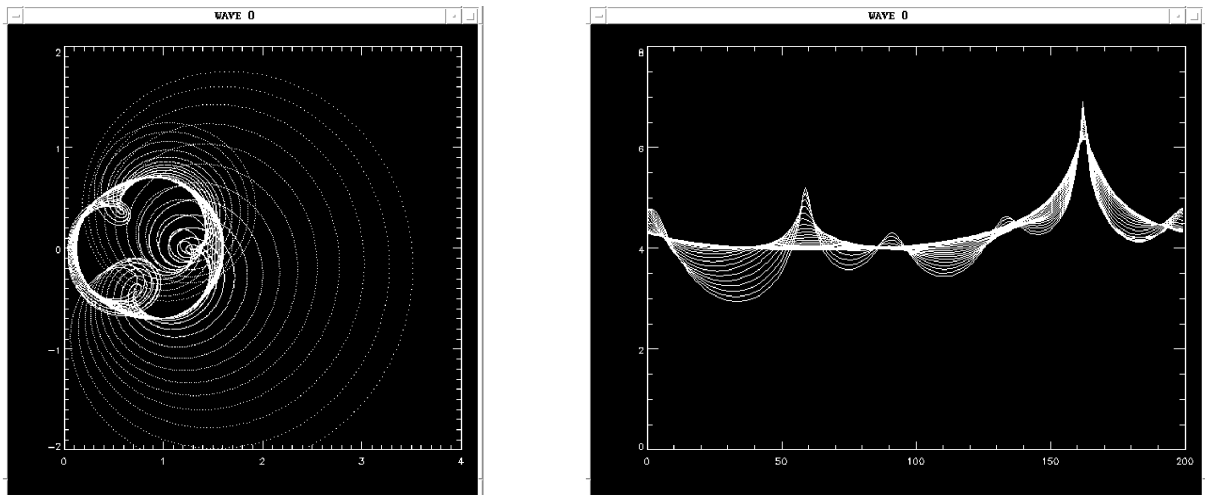


Figure 3. – Evolution globale de  $\{A^{(n)}(z) / |z| = 1\}$  (à gauche) et du spectre associé (à droite).

Nous voyons la courbe  $\{A^{(n)}(z) / |z| = 1\}$  évoluée suivant l'EDP préalablement établie. Nous sommes ici dans le cas d'un signal mono-fréquentiel, et la courbe converge vers un cercle complexe centré sur le point (1,0) (modèle asymptotique du bruit blanc). Dans le cas d'un signal multi-fréquentiel,  $\{A^{(n)}(z) / |z| = 1\}$  convergerait vers autant de boucles circulaires autour du point (1,0), que le signal présente de fréquences. Nous observons sur la figure 3 que la vitesse d'évolution de la courbe dépend de la courbure (Mean Curvature Flow), les petites boucles disparaissant plus vite que les boucles plus larges. On voit également sur le spectre autorégressif (image de droite de la figure 3), la disparition des pics parasites liés au caractère mal-posé, sous l'effet du « flotgéodésique » régularisant.

Nous avons également tracé la trajectoires des racines de  $\{A^{(n)}(z) / |z| = 1\}$  au cours du temps, soumis à l'évolution de l'EDP (66), sur la figure suivante :

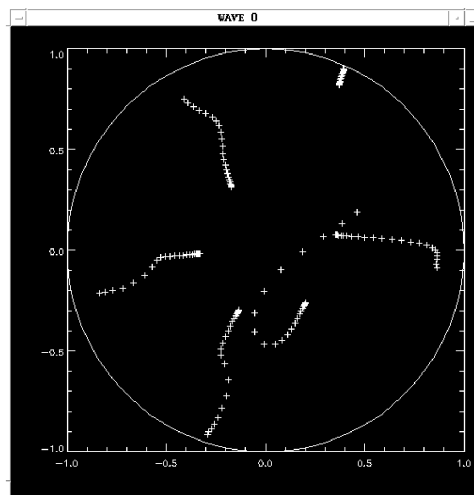


Figure 4. – Évolution des racines de  $A^{(n)}(z)$ .

On observe que la racine correspondant à la fréquence effectivement présente dans le signal reste proche du cercle complexe unité alors que les autres racines représentatives du bruit sont réparties de façon isotrope autour de l'origine vers laquelle elles convergent. On peut également constater que les racines représentatives du bruit évoluent très vite au départ puis ralentissent. Ce ralentissement est utilisé pour stopper l'évolution de l'EDP et ainsi prévenir une sous-régularisation ou éviter une sur-régularisation. C'est ici, que l'aspect dynamique considéré en terme de vitesse d'évolution permet de s'affranchir du réglage de l'hyperparamètre utilisé par l'ap-

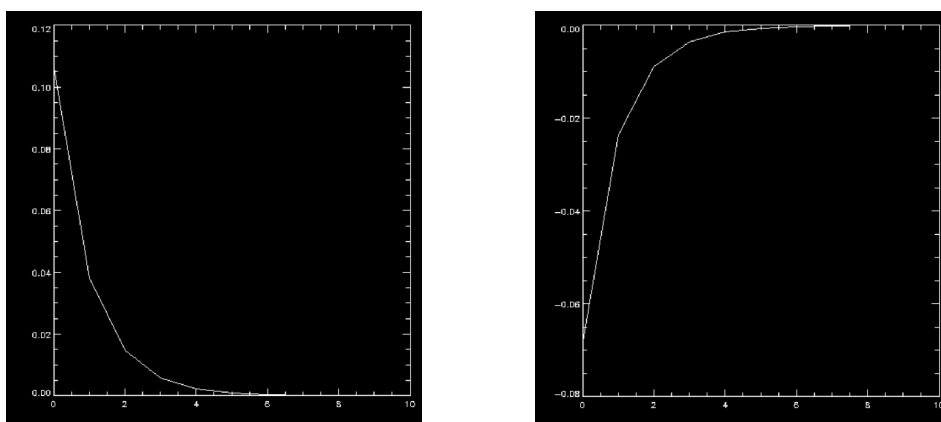


Figure 5. – (à droite) Évolution de  $Test_k = dist(\mu_{n,k-1}, \mu_{n,k}, \mu_{n,k-2}) - dist(\mu_{n,k}, \mu_{n,k-1})$

et (à gauche) évolution de  $dist(\mu_{n,k}, \mu_{n,k-1}) = \left| \frac{\mu_{n,k} - \mu_{n,k-1}}{1 - \mu_{n,k} \cdot \mu_{n,k-1}} \right|$ .

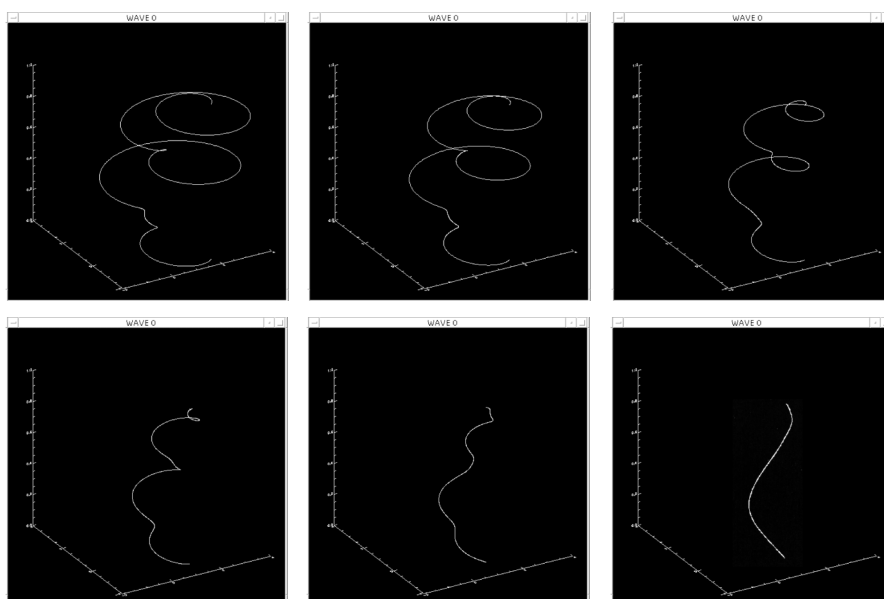


Figure 6. – Évolution de la courbe spatiale  $P^{(n)}(f) = \begin{bmatrix} A^{(n)}(f) \\ f \end{bmatrix}$ .

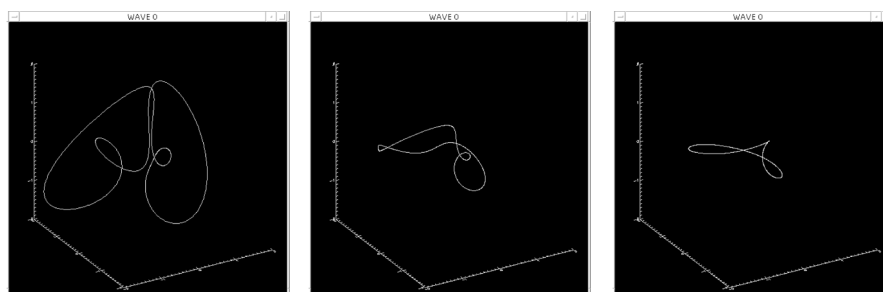


Figure 7. – Evolution de la courbe spatiale fermée  $C^{(n)}(f) = \begin{bmatrix} Re [A^{(n)}(f)] \cdot e^{i2\pi f} \\ Im [A^{(n)}(f)] \end{bmatrix}$ .



proche classique (c'est comme si nous faisons évoluer l'hyperparamètre  $\lambda$  de l'approche classique avec le temps jusqu'à ce que le spectre n'évolue plus que très lentement). Dans le schéma récursif sur l'ordre sur les coefficients de réflexion, nous visualisons le critère d'arrêt en visualisant, en premier lieu l'évolution de la distance entre coefficients de réflexion successifs (distance de Poincaré) ainsi que la pente de cette distance.

Pour illustrer l'extension de l'approche variationnelle au cas de la courbe spatiale dont la troisième coordonnée est donnée par la fréquence, nous représentons son évolution sous l'effet d'un flot de courbure moyenne sous deux représentations : une hélicoïde et une courbe spatiale fermée.

Nous avons également représenté le champ de vecteurs de Polya des vecteurs autorégressifs conjugués  $\{A^{(n)*}(z) / |z| = 1\}$  sur le cercle complexe unité, pour illustrer l'effet de la régularisation.

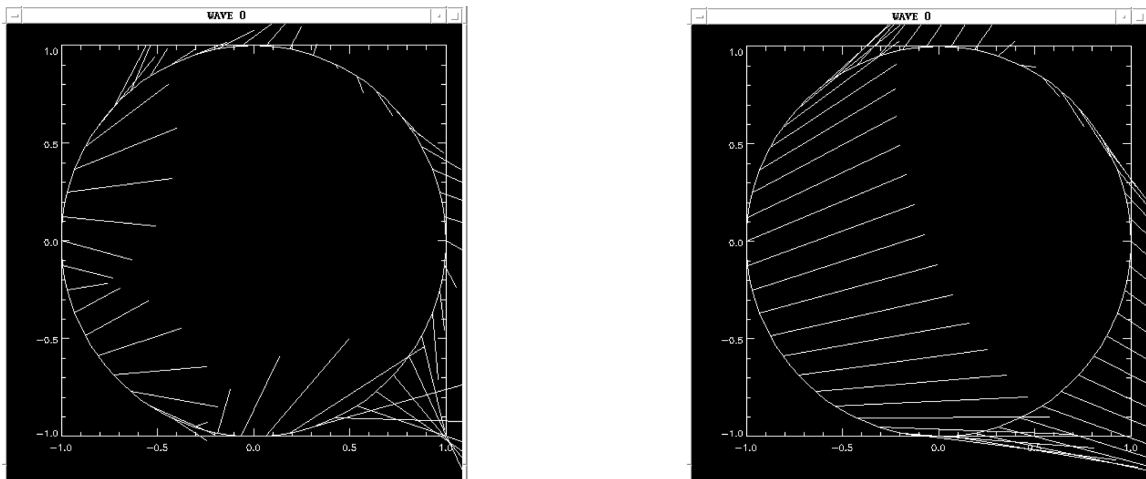


Figure 8. – Champ de vecteurs de Polya à l'initialisation (à gauche) et après convergence de l'EDP (à droite).

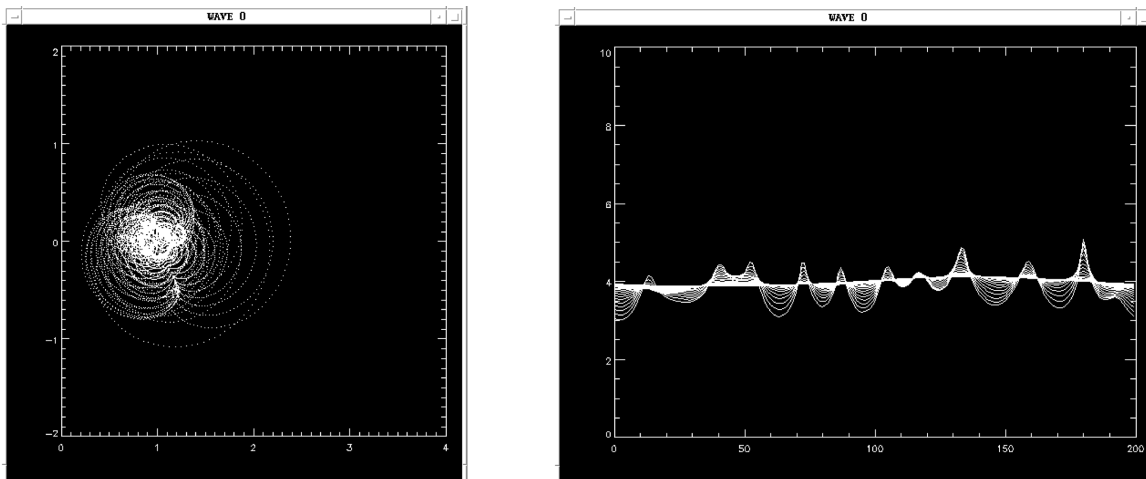


Figure 9. – Évolution de la courbe  $\{A^{(n)}(z) / |z| = 1\}$  et du spectre associé dans le cas d'un bruit blanc.

Comme nous l'avons déjà commenté, la régularisation tend à rendre le champ de vecteurs non-divergent et irrotationnel sur le cercle complexe unité.

Nous avons reproduit les mêmes figures dans le cas d'un signal d'un bruit blanc gaussien simulé. Nous analysons une fenêtre de 20 échantillons, ce qui correspond à un modèle autorégressif d'ordre 19. L'initialisation est donnée par l'algorithme de Burg classique :

$A^{(n)}(z)$  converge vers un cercle dans le plan complexe autour du point  $(1,0)$  (solution asymptotique d'un bruit blanc  $A^{(n)}(z) = 1$ ) de rayon lié à la puissance du bruit. Le rayon de ce cercle induit une faible oscillation résiduelle observable sur le spectre autorégressif.

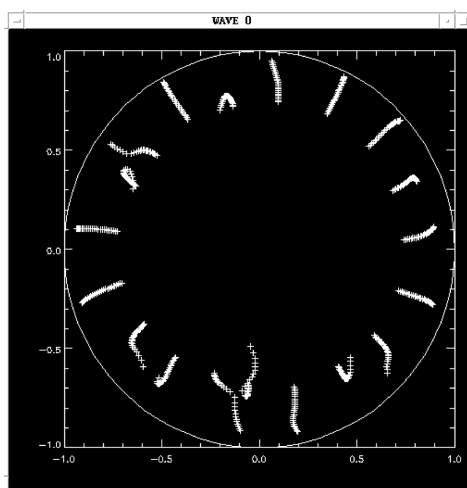


Figure 10. – Évolution des racines de  $A^{(n)}(z)$  dans le cas d'un bruit blanc.

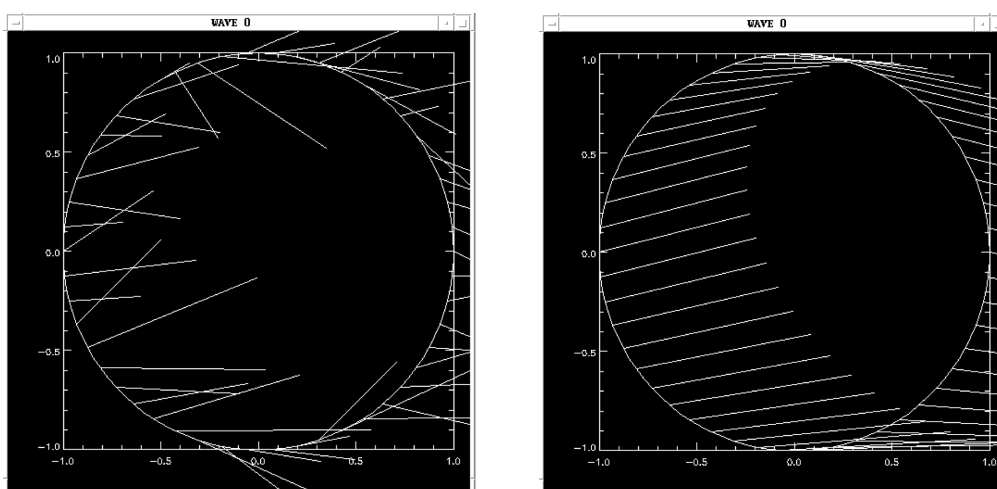


Figure 11. – Champ de vecteurs de Polya pour un bruit blanc à l'initialisation (à gauche) et après convergence de l'EDP (à droite).

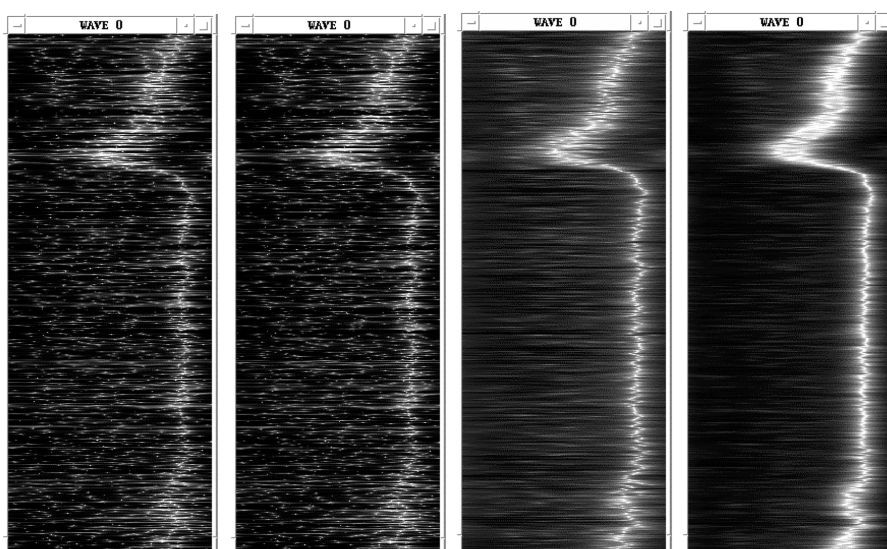


Figure 12. – Évolution du spectre Doppler/Distance sur signal échographique issu de l'EDP.

Nous observons que le spectre converge vers un spectre de bruit blanc avec une répartition isotrope des racines autour de l'origine, et une vitesse d'évolution des racines qui se ralentit lorsqu'on s'approche de l'optimum.

Nous observons également que le champ de vecteurs de Polya associé devient irrotationnel et non-divergent dans le cas du bruit blanc. Dans cette première partie, nous donnons également les résultats de régularisation au cours des itérations de l'EDP, visualisés sous forme d'images Doppler/temps de données échographiques (chaque ligne de l'image correspond à un spectre autorégressif codé en niveau de gris, avec la fréquence Doppler en ordonnée et le temps en abscisse). On constate la disparition des pics parasites du spectre liés à l'aspect mal-posé du problème (le spectre est estimé sur des fenêtres de 7 échantillons, soit un modèle autorégressif d'ordre 6).

## 7.2. courbe du cepstre différentiel, chocs et équation de Burgers

Dans cette seconde partie, nous illustrons le comportement du cepstre différentiel soumis à l'EDP de Burgers conditionnellement aux données. L'aspect non-linéaire de cet EDP montre l'apparition de chocs lissés par le terme diffusif. Le cepstre différentiel ne converge plus comme pour la courbe autorégressive vers un cercle, mais vers une courbe qui dans le cas asymptotique (un nombre infini d'échantillons) comporterait effectivement des chocs.

Nous représentons dans la séquence d'images qui suit, l'évolution du cepstre différentiel, lorsqu'on laisse évoluer l'EDP sans recourir au test d'arrêt. L'EDP évolue alors au-delà de la limite pour laquelle le ralentissement de la vitesse d'évolution aurait du stopper le processus. On voit apparaître l'amorce du cas asymptotique où le cepstre différentiel converge vers une courbe qui tendrait à présenter une discontinuité (illustrée par cette série de boucles serrées sur la partie gauche du cepstre différentiel) :

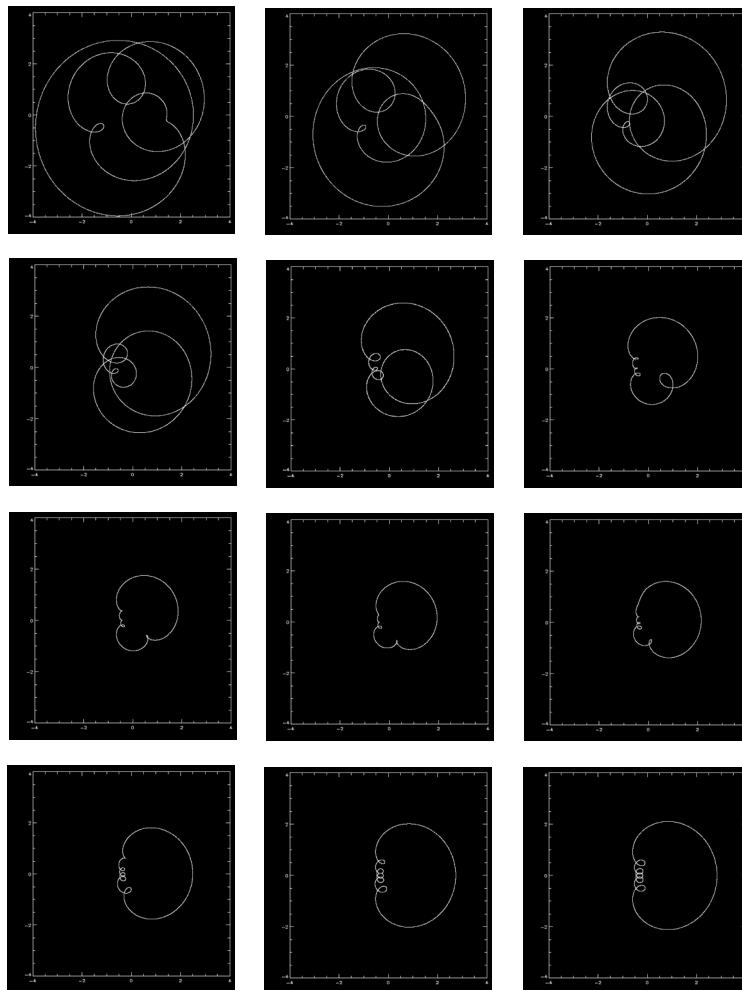


Figure 13. – Évolution du Cepstre différentiel  $D^{(n)}(z)$  sans application du critère d'arrêt.

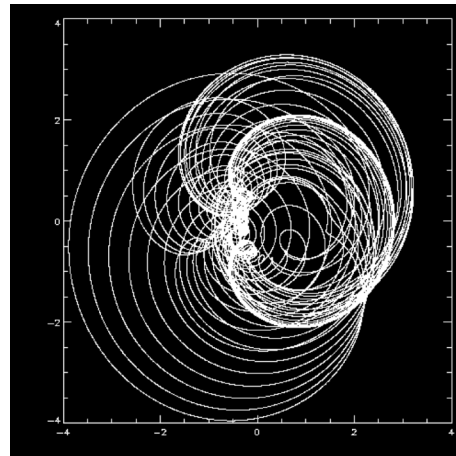


Figure 14. – Évolution globale du Cepstre différentiel.

Nous représentons dans ce qui suit la partie réelle et la partie imaginaire du cepstre différentiel, qui possède de bonnes propriétés de discrimination spectrale en présence de racines proches [Yeg79] comparé au spectre autorégressif. En effet, le spectre autorégressif est donné par :

$$\ln A^{(n)}(z) = \sum_{i=1}^n \ln(1 - z_i^{(n)} \cdot z^{-1}) \Rightarrow \frac{1}{|A^{(n)}(z)|^2} = \frac{1}{\prod_{i=1}^n |z_i^{(n)} - z|^2}$$

Les parties réelles et imaginaires du cepstre différentiel possèdent la propriété de faire apparaître l'inverse d'une somme des modules carrés, contrairement au spectre autorégressif qui est fourni par l'inverse d'un produit des modules carrés :

$$D^{(n)}(z) = -2 \cdot \lambda \cdot i \cdot 2\pi \cdot z \frac{d \ln A^{(n)}(z)}{dz} = 4 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot i \cdot \sum_{i=1}^n \frac{z_i^{(n)}}{z_i^{(n)} - z}$$

$$\operatorname{Re}[D^{(n)}(z)] = -4 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\operatorname{Im}[z_i^{(n)} \cdot z]}{|z_i^{(n)} - z|^2} \text{ et } \operatorname{Im}[D^{(n)}(z)] = 4 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot \sum_{i=1}^n \frac{|z_i^{(n)}|^2 - \operatorname{Re}[z_i^{(n)} \cdot z]}{|z_i^{(n)} - z|^2}$$

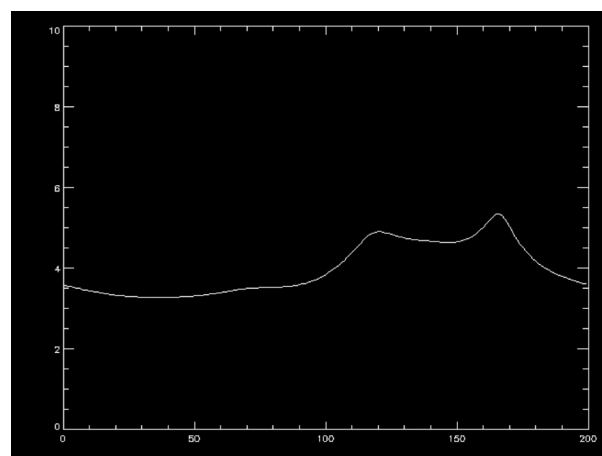
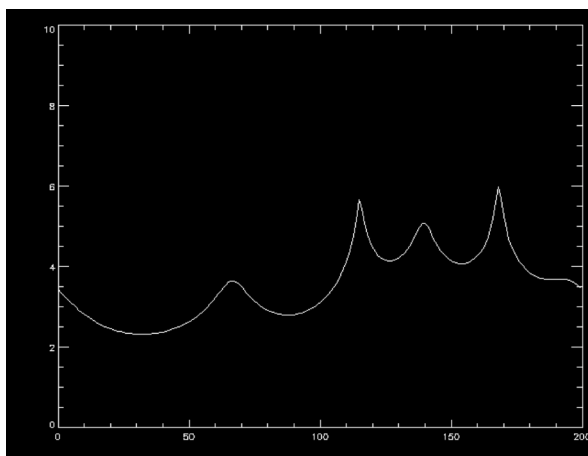


Figure 15. – Spectre à l'initialisation (à gauche) et après convergence (à droite).

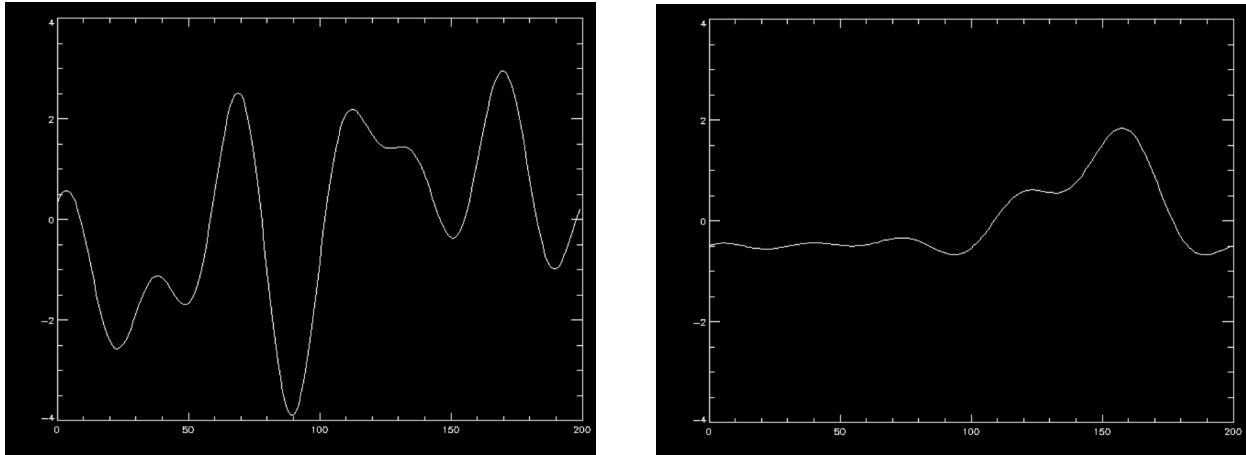


Figure 16. – Partie réelle du Cepstre différentiel à l'initialisation (à gauche) et après convergence (à droite).

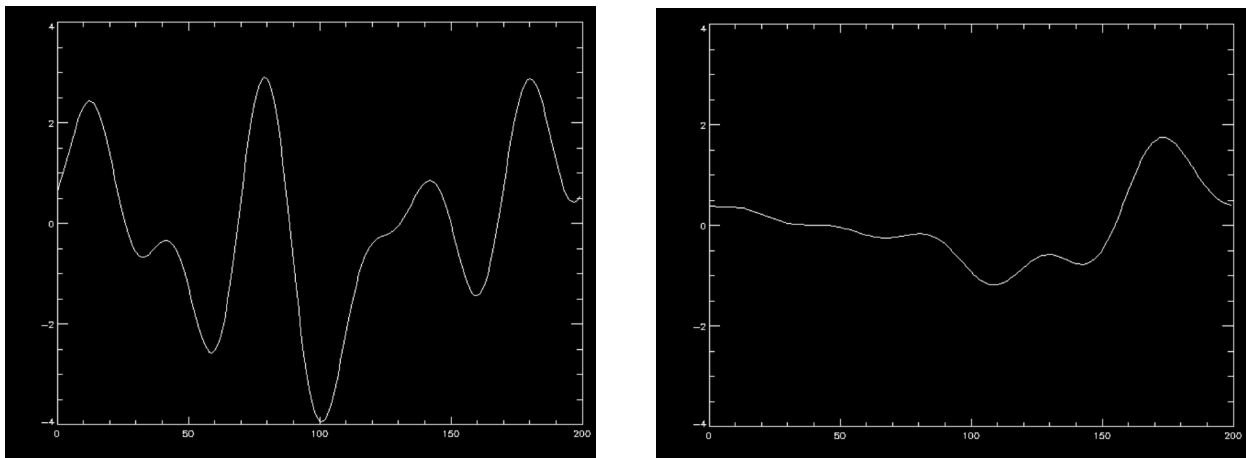


Figure 17. – Partie imaginaire du Cepstre différentiel à l'initialisation (à gauche) et après convergence (à droite).

## 8. conclusion

Nous avons tenté dans cet article d'étendre les approches EDP développées initialement en traitement d'image, au cas de l'analyse spectrale autorégressive, pour laquelle nous avons établi en particulier une nouvelle équation qui permet l'estimation spectrale régularisée sans utiliser explicitement un hyperparamètre de régularisation de réglage habituellement peu aisé. Cette analogie a pu s'établir en considérant  $A^{(n)}(f)$  comme une courbe paramétrée fermée et orientée dans l'espace complexe.

Cette approche EDP appliquée aux modèles autorégressifs complexes pourra avoir des applications pour le suivi continu de phénomènes instationnaires en analyse spectrale et en traitement d'antenne, mais également en reconnaissance des formes. En effet, Les modèles autoregressifs complexes ont été récemment utilisés avec succès [Seki92][Kuri94] en reconnaissance de formes planes. Cette paramétrisation possède la propriété d'être invariante par transformation affine. De plus, le choix du point de départ sur la forme peut être choisi de façon arbitraire. L'approche par modèle autorégressif complexe permet d'avoir un modèle paramétrique à partir duquel la définition de distances robustes est facilement appréhendable [Barb99a][Barb99b][Small96] [Ken84][Ken93].

## remerciements

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à G. Demoment [Dem89] et à J.D. Fournier. Le premier pour m'avoir sensibilisé au problème de régularisation des problèmes inverses mal posés lors d'un stage de formation continue à Supelec au début des années 90. Le second pour m'avoir fourni, après notre rencontre lors du GRETSI 97 à Grenoble, des documents concernant l'équation de Burgers sur laquelle il avait personnellement beaucoup travaillé [Fourn83][Fourn86].

Cette étude a été effectuée dans le cadre du programme BIOMED 2, du 4<sup>ème</sup> programme cadre de recherche européen, pour le projet DOLPHINS (« Doppler Linear Processing for Hydraulics and Imagery New System »), (4 FP : n° BMH4-98-3782) sur la partie concernant la vélocimétrie Doppler, constitué du consortium : THALES Air Defence (ex THOMSON-CSF AIRSYS), CHU Pitié Salpêtrière (INSERM U 66), CHU de Tours (Service de Médecine Nucléaire In Vivo & Ultrasons), Klinikum Mannheim (Service Neurologique), l'Hôpital Général de Bristol, Université de Florence (Département Electronique) et la société ESAOTE SPA de Florence.

*« Every problem of the Calculus of Variations has a solution, provided that the world 'solution' is suitably understood »*

D.Hilbert

## BIBLIOGRAPHIE

- [Alb76] S.A. Albeverio & R.J. Hoegh-Krohn, « Mathematical Theory of Feynman Path Integrals », Springer-Verlag, 1976.
- [Alf99] Alfons *et al.*, « Linearised Euclidean Shortening Flow of Curve Geometry », *Int. J. of Comput. Vision*, vol. 34, n° 1, pp. 29-67, 1999.
- [Alp98] D. Alpay, « Algorithmes de Schur, espaces à noyau reproduisant et théorie des systèmes », *Panorama et Synthèses*, n° 6, Société Mathématique de France, 1998.
- [Alt91a] S.J. Altschuler, « Singularities of the Curve Shrinking Flow for Space Curves », Institut for Mathematics & its applications, preprint n° 822, university of Minnesota, June 1991.
- [Alt91b] S.J. Altschuler & M.A. Grayson, « Shortening Space Curves and Flow Through Singularities », Institut for Mathematics & its applications, preprint n° 823, university of Minnesota, June 1991.
- [Aub98] G. Aubert & L. Blanc-Ferraud, « An Elementary Proof of the Equivalence between 2<sup>nd</sup> and 3<sup>rd</sup> classical snakes and geodesic active contours », INRIA Tech. Report n° 3340, Janvier 1998.
- [Aub99] G. Aubert & L. Blanc-Ferraud, « Some remarks on the equivalence between 2D and 3D classical snakes and geodesic active contours », *Int. J. of Comp. Vision*, vol. 34, n° 1, pp. 19-28, 1999.
- [Barb95] F. Barbaresco, « Algorithme de Burg Régularisé FSDS, Comparaison avec l'algorithme de Burg MFE », Proc. GRETSI-95, vol. 1, pp. 29-32, Septembre 1995.
- [Barb99a] F. Barbaresco, « Extrinsic & Intrinsic Entropic Priors for Time-Frequency AR Analysis : Half-Quadratic Temporal Regularization & Recursive Siegel Metric Based on Information Riemannian Geometry », Coll. PSIP'99, ENST, Paris, Janvier 1999.
- [Barb99b] F. Barbaresco, « Modèles autorégressifs : du coefficient de réflexion à la géométrie Riemannienne de l'Information », *Revue Traitement du Signal*, vol. 15, n° 6, Mai 1999.
- [Barb00] F. Barbaresco, « Calculus of Variations & Regularized Spectral Estimation », Colloque MAXENT'2000, Gif-sur-Yvette, France, Juillet 2000, à paraître dans 'American Institut of Physics'.
- [Barb01] F. Barbaresco, « Calculus of Variations & Regularized Spectral Estimation », Colloque PSIP-2001, Marseille, Janvier 2001.
- [Bear87] A.F. Beardon, « Curvature, Circles and Conformal Maps », *Amer. Math. M.*, vol. 94, pp. 48-53, 1987.
- [Berest97] Pierre Bérest, « Calcul des variations : Application à la Mécanique et à la Physique », Ed. Ellipses, 1997.
- [Berger87] M. Berger & B. Gostiaux, « Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces », Presses Universitaires de France, 1987.
- [Bonnet99] M. Bonnet, « Problèmes inverses », cours de DEA Dynamique des Structures et Couplages, Labo. *Mécanique des fluides*, Ecole Polytechnique, 1999.
- [Brad87] B. Braden, « Polya's Geometric Picture of Complex Contour Integrals », *Mathematics Magazine*, vol. 60, n° 6, pp. 321-327, 1987.
- [Burg67] J.P. Burg, « Maximum Entropy Spectral Analysis », Proc. 37<sup>th</sup> Meeting Society of Exploration Geophysicist, 1967.
- [Burge74] J.M. Burgers, « The Nonlinear Diffusion Equation », D. Reidel, Publ. Co., 1974.
- [Cara54] C. Carathéodory, « Theory of Functions of a Complex Variable », Chelsea Publ. C., 1954.
- [Cas97] V. Caselles, R. Kimmel & G. Sapiro, « Geodesic Active Contours », *The International Journal of Computer Vision*, Vol. 22, n° 1, pp. 61-79, 1997
- [Cart77] H. Cartan, « Cours de calcul différentiel », Ed. Hermann, Paris, 2<sup>nd</sup> Edition, 1977.
- [Cart95] P. Cartier et C. DeWitt-Morette, « A new Perspective on Functional Integration », *J. Math. Phys.*, vol. 36, n° 5, pp. 2237-2312, 1995.
- [Charb97] P. Charbonnier *et al.*, « Deterministic Edge-Preserving Regularization in Computed Imaging », *IEEE Trans. on Image Processing*, vol. 6, n° 2, Février 1997.
- [Chen91] Y.G. Chen, Y. Giga & S. Goto, « Uniqueness and Existence of viscosity Solution of Generalized Mean Curvature Flow Equations », *J. of Diff. Geometry*, Vol. 33, pp. 749-786, 1991.
- [Coh96a] L.D. Cohen & R. Kimmel, « Global Minimum for Active Contour Models : A Minimal Path Approach », Ceremade TR 9612, CVPR'96, San Francisco and ICAOS'96, Paris, Juin 1996.
- [Coh96b] L. D. Cohen & R. Kimmel, « Fast Marching the Global Minimum of Active Contours », *Proc. IEEE ICIP*, pp. 473-476, 1996.
- [Cole51] J.D. Cole, « On a Quasi Linear Parabolic Equation Occuring in Aerodynamics », *Quart. Appl. Math.*, vol. 9, pp.225-236, 1951.
- [Darb78] M.G. Darboux, « Sur un problème de géom. élémentaires », *Bull. Sci. Math*, vol. 2, pp. 298-304, 1878.
- [Dem87] G. Demoment, « Algorithmes rapides », polycopié de cours Supelec, n° 03152, 1987.
- [Dem89] G. Demoment, « Image Reconstruction and Restoration : overview of Common Estimation Structures and Problems », *IEEE Trans. ASSP*, vol. 37, pp. 2024-2037, 1989.
- [Der95] R. Deriche & O. Faugeras, « Les EDP en traitement des images et vision par ordinateur », Technical Report INRIA n° 2697, November 1995, in *Revue Traitement du Signal*.
- [Dho98] J. Dhombres & Jean-Bernard Robert, « Fourier : Créateur de la Physique-Mathématique », Ed. Belin, Coll. Un Savant, une époque, 1998
- [Faug98] O. Faugeras & R. Keriven, « Variational Principles, Surface Evolution, PDEs, Level Set Methods and the Stereo Problem » *IP*, Vol.7, n° 3, pp. 336-344, March 1998.
- [Fench50] W. Fenchel, « On the Differential Geometry of Closed Space Curves », *Bull. Amer. Math.*, Vol. 57, pp. 44-54, 1950
- [Four1822] J. Fourier, « Théorie analytique de la chaleur », Paris 1822, Ed. J. Gabay, Paris 1988.

- [Fourn83] J.D. Fournier & U. Frisch, « L'équation de Burgers déterministe et statistique », *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, Vol. 2, n° 5, p. 699-750, 1983.
- [Fourn86] J.D. Fournier, « Propriétés locales et singularités complexes en dynamique non linéaire », in *Méthodes mathématiques pour l'Astrophysique : Equations différentielles et aux dérivées partielles non linéaires ; problème inverse*, Notes de Cours, Ecole d'Astrophysique de Goutelas, M. Auvergne & A. Baglin Edition, publi. S.F.S.A., 14-19 Avril 1986.
- [Gage86] M. Gage & R.S. Hamilton, « The Heat Equation Shrinking Convex Plane Curves », *J. of Differential Geometry*, Vol. 23, pp. 69-96, 1986.
- [Gallier01] J. Gallier, « Geometric Methods and Applications for Computer Science and Engineering », Springer Verlag, New York, 2001.
- [Gord98] W.B. Gordon, « A Variational Approach to the Extraction of In-Phase and Quadrature Components », *IEEE Trans. SP*, Vol. 46, n° 5, pp. 1238-1244, Mai 1998.
- [Gratt72] J. Grattan-Guinness & J.R. Ravetz, « Joseph Fourier, 1768-1830 », MIT Press, 1972.
- [Grays87] M. Grayson, « The Heat Equation Shrinks Embedded Plane Curves to Round Point », *J. of Differential Geometry*, Vol. 26, pp. 285-314, 1987.
- [Hél98] F. Hélein, « Symétries dans les problèmes variationnels et applications harmoniques », preprint, rapport technique ENS-Cachan/CMLA, Juin 1998.
- [Hels61] H. Helson & D. Lowdenslager, « Prediction Theory and Fourier Series in Several Variables », *Acta Mathematica*, n° 99, pp.165-202, 1958 & n° 106, pp. 175-213, 1961.
- [Her75] J. Herivel, « Joseph Fourier. The Man and the Physicist », Clarendon Press, Oxford, 1975.
- [Her80] J. Herivel, « Joseph Fourier : Face aux objections contre sa théorie de la chaleur, Lettres Inédites 1808-1816 », Mémoires de la section des sciences 8, , Bibliothèque Nationale, Paris, 1980.
- [Her97] A. Herment, J.F. Giovannelli, G Demoment *et al.*, « Improved Characterization of Non-stationary Flows Using a Regularized Spectral Analysis of Ultrasound Doppler Signals », *J. Phys. II France*, vol. 7, pp. 2079-2102, 1997.
- [Hopf50] E. Hopf, « The partial Differential Equation  $u_t + u.u_x = u_{xx}$  », *Comm. Pure Appl. Mech.*, Vol. 3, pp. 201-230, 1950.
- [Itak75] F. Itakura & T. Umezaki, « Distance Measure for Speech Recognition based on Smoothed Group Delay Spectrum », *Proc. ICASSP-87*, Dallas, pp. 1257-1260, 1987.
- [Kac57] M. Kac, « Probability and Related Topics in Physical Sciences », Lectures in Applied Mathematics, 2<sup>nd</sup> Printing, American Mathematical Society, 1976.
- [Kay83] S.M. Kay, « Recursive Maximum Likelihood Estimation of Autoregressive Processes », *IEEE Trans. ASSP*, vol. 31, pp. 56-65, Janvier 1983.
- [Ken84] D.G. Kendall, « Shape Manifolds, Procrustean Metrics, and Complex Projective Spaces », *Bull. London Math. Soc.*, vol. 16, pp. 81-121, 1984.
- [Ken93] D.G. Kendall, « The Riemannian Structure of Euclidean Spaces : a Novel Environment for Statistics », *Ann. Stat.*, vol.21, pp.1225-1271, 1993.
- [Kich95] S. Kichnassamy, A. Kumar, P. Olver, A. Tannenbaum & A. Yezzi, « Gradient Flows and Geometric Active Contour Models », *5<sup>th</sup> Int. J. of Comp. Vision*, Juin 1995.
- [Kim95] B. Kimia, A.R. Tannenbaum and S.W. Zucker, « Shapes, Schoks and deformations  $i$  : The Components of Two-dimensionnal Shape and the Reaction-Diffusion Space », *IJCV*, Vol. 15, pp. 189-224, 1995.
- [Kimm97] R. Kimmel, N. Sochen & R. Malladi, « From High Energy Physics to Low Level Vision », *Proc. Scale-Space '97*, 1997.
- [Kita85] G. Kitagawa & W. Gersch, « A Smoothness Priors Long AR Model Method for Spectral Estimation », *IEEE Trans. on AC*, vol. 30, n° 1, pp. 57-65, Janvier 1985.
- [Kuri94] T. Kurita, I. Sekita & N. Otsu, « Invariant Distance Measures for Planner Shapes Based on Complex Autoregressive Models », *Pattern Recognition*, vol. 27, n° 7, pp. 903-911, 1994.
- [Lions92] P.L. Lions, L. Alvarez, F. Guichard & J.M. Morel, « Axiomes et équations fondamentales du traitement d'images », *C.R. Acad. Sci. Paris*, vol. 315, n° 2, pp. 135-138, Juillet 1992.
- [Mani94] A. Manikas, H.R. Karimi and I. Dacos, « Study of the Detection and Resolution Capabilities of One-Dimensionnal Array of Sensors by Using Differential Geometry », *IEE Proceedings on Radar, Sonar & Navigation*, vol. 141, n° 2, pp.83-92, Avril 1994.
- [Mani95] A. Manikas & I. Dacos, « The Use of Differential Geometry in Estimating the Manifold Parameters of a one-Dimensional Array of Sensors », *Journal of the Franklin Institute, Engineering and Applied Mathematics*, vol. 332B, n° 3, pp. 307-332, 1995.
- [Morel98] J.M. Morel, « Filtrage itératif des images et équations aux dérivées partielles », Notes de cours du centre Emile Borel sur *Questions Mathématiques en Traitement du Signal et de l'Image*, notes n° 12, Institut Henri Poincaré, Décembre 1998.
- [Moret93] H. P. Moreton, « Minimum Curvature Variation Curves, Networks and Surfaces for Fair Free-Form Shape Design », PhD Thesis, University of California, Berkeley, 1993.
- [Mum84] D. Mumford & J. Shah, « Optimal Approximations by Piecewise Smooth Functions and Associated Variational Problems », *Comm. Pure Appl. Math*, Vol. 42, pp. 577-684, 1989.
- [Nash74] Z. Nashed, « Approximate regularized solutions to improperly posed linear integral and operator equations », In A. Dolb & B. Eckmann (Eds), *Constructive and Computational Methods for Differential and Integral Equation*, Springer-Verlag, 1974.
- [Nash87] Z. Nashed, « A New Approach to classification and Regularization of Ill-Posed Operator Equations », In H.W. Eng & C.W. Groetsch (Eds), *Inverse and ill-posed problems*, pp. 53-75, Academic Press, 1987.
- [Need98] T. Needham, « Visual Complex Analysis », Oxford University Press, 2nd Edition, 1998.
- [Osher88] S. Osher & J. Sethian, « Fronts Propagating with Curvature Dependent Speed : Algorithms based on the Hamilton-Jacobi Formulation », *J. of Comp. Phys.*, Vol. 79, pp. 12-49, 1988.
- [Pham88] D.T. Pham, « Maximum Likelihood Estimation of Autoregressive Model by Relaxation on the Reflection Coefficient », *IEEE Trans. ASSP*, vol. 38, pp. 175-177, Janvier 1988.
- [Pim92] J. Pimbley, « Recursive Autoregressive Spectral Estimation by Minimization of the Free Energy », *IEEE Trans. on SP*, vol. 40, n° 6, pp. 1518-1527, Juin 1992.
- [Polya74] G. Polya & G. Latta, « Complex Variables », Wiley, 1974.
- [Roe96] G. Roepstorff, « Path Integral Approach to Quantum Physics : An Introduction », Text & Monographs in Physics, 2<sup>nd</sup> Ed., Springer-Verlag, 1996.
- [Robin82] E.A. Robinson, « A Historical Perspective of Spectrum Estimation », *Proc. of the IEEE*, vol. 70, n° 9, Septembre 1982.
- [Rog99] P. Rogen, *Contributions to Geometric Knot Theory of Curves and Surfaces*, PhD thesis Report, Danmarks Tekniske Universitet, January 1999.
- [Ruzin89] S.A. Ruzinsky, « Sequential Least Absolute Deviation Estimation of Autoregressive parameters », Ph.D. Thesis, Illinois Inst. Of Technol., Chicago, IL, Mai 1989.
- [Schroe81] M. Schroeder, « Direct (Nonrecursive) Relations Between Cepstrum and Predictor Coefficients », *IEEE Trans. ASSP*, vol. 29, n° 2, pp. 297-301, April 1981.
- [Schur18] I. Schur, « On Power Series which are bounded in the interior of the unit circle I & II », *J. Reine Angew. Math.*, n° 148, pp. 122-145, 1918.
- [Seki92] I. Sekita, T. Kurita & N. Otsu, « Complex Autoregressive Model for Shape Recognition », *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 14, n° 4, April 1992.
- [Seth99] J.A. Sethian, « Level Set Methods », Cambridge University Press, 2nd Ed., 1999.
- [Sieg69] C.L. Siegel, « Topics in Complex Function Theory », Wiley Interscience Ed., 1969.
- [Small96] C.G. Small, « The Statistical Theory of Shape », Springer, New York, 1996.
- [Sugi88] S. Sugimoto & T. Wada, « Spectral Expressions of Information Measures of Gaussian Time Series and Their Relation to AIC and CAT », *IEEE Trans. IT*, vol. 34, n° 4, Juillet 1988.

- [Szegö39] G. Szegö, « Orthogonal Polynomials », American Mathematical Society, Colloquium Publications, n° 23, New York, 1939.
- [Szegö58] U. Grenander & G. Szegö, « Toeplitz Forms and their Applications », University of California Press, Berkeley, CA, 1958.
- [Thom91] A. Thompson & D.M. Titterton, « A study of Choosing the smoothing Parameters in Image Reconstruction by Regularization », *IEEE Trans. PAMI*, vol. 13, pp. 326-339, 1991.
- [Tik77] A.N. Tikhonov & V. Arsenin, « Solutions of Ill-posed Problems », Wiley, New York, 1977.
- [Weickert98] J. Weickert & al., « Efficient and Reliable Schemes for Nonlinear Diffusion Filtering », *Special Issue on Partial Differential Equations and Geometry-Driven Diffusion in Image Processing and Analysis*, IEEE Trans. On Image Processing, Vol. 7, n° 3, pp. 398-410, March 1998.
- [Welch95] W. Welch, « Serious Putty : Topological Design for Variational Curves and Surfaces », PhD Thesis, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, Pa., 1995.
- [Yeg79] B. Yegnanarayana & D.R. Reddy, « A Distance Measure based on the Derivative of Linear Prediction Phase Spectrum », *Proc. ICASSP-79*, pp. 744-747, 1979.
- [Your79] W. Yourgrau & S. Mandelstam, « Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory », Dover Publications, Inc., New York, 3rd Ed., 1979.

## L' AUTEUR



Né en 1966 à Nantes, Frédéric Barbaresco est ingénieur SUPELEC, promotion 91 (section Automatique) et ingénieur Télécom INT, promotion 89 (option communication et traitement du signal). Il travaille à la direction technique de l'unité de développement RADAR de THALES AIRDEFENCE. Ses thèmes de recherche concernent l'utilisation des approches géométriques non-euclidiennes en traitement du signal et de l'image dans un cadre applicatif radar.



## annexes

### annexe 1 : lien entre vecteur tangent, vecteur normal et courbure dans le cas complexe

Nous allons montrer que :  $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \kappa \cdot \vec{n}$  en partant de  $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{d\vec{\tau}}{df} \cdot \frac{df}{ds} = \frac{1}{|\nabla_f A^{(n)}|} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{df}$

$$\text{Or} \quad \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{|\nabla_f A^{(n)}|} \cdot \frac{d}{df} \left[ \frac{\nabla_f A^{(n)}}{|\nabla_f A^{(n)}|} \right] = \frac{1}{|\nabla_f A^{(n)}|} \cdot \frac{\Delta_f A^{(n)} \cdot |\nabla_f A^{(n)}| - \nabla_f A^{(n)} \cdot \frac{d}{df} [|\nabla_f A^{(n)}|]}{|\nabla_f A^{(n)}|^2}$$

$$\frac{d}{df} (|\nabla_f A^{(n)}|) = \frac{d}{df} \left( [\nabla_f A^{(n)} \cdot \nabla_f A^{(n)*}]^{1/2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{|\nabla_f A^{(n)}|} \cdot (\Delta_f A^{(n)} \cdot \nabla_f A^{(n)*} + \Delta_f A^{(n)*} \cdot \nabla_f A^{(n)})$$

On en déduit donc que :

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta_f A^{(n)} \cdot |\nabla_f A^{(n)}|^2 - (\nabla_f A^{(n)})^2 \cdot \Delta_f A^{(n)*}}{|\nabla_f A^{(n)}|^4}$$

Nous savons de plus que :  $\kappa = \text{Re} \left[ \frac{-i \cdot \Delta_f A^{(n)}}{\nabla_f A^{(n)} \cdot |\nabla_f A^{(n)}|} \right]$  et  $\vec{n} = i \cdot \vec{\tau} = i \cdot \frac{\nabla_f A^{(n)}}{|\nabla_f A^{(n)}|}$ , alors

$$\kappa \cdot \vec{n} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{-i \cdot \Delta_f A^{(n)}}{\nabla_f A^{(n)} \cdot |\nabla_f A^{(n)}|} + \frac{i \cdot \Delta_f A^{(n)*}}{\nabla_f A^{(n)*} \cdot |\nabla_f A^{(n)}|} \right) \cdot i \cdot \frac{\nabla_f A^{(n)}}{|\nabla_f A^{(n)}|}$$

$$\kappa \cdot \vec{n} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\Delta_f A^{(n)}}{|\nabla_f A^{(n)}|^2} - \frac{\Delta_f A^{(n)*} \cdot (\nabla_f A^{(n)})^2}{|\nabla_f A^{(n)}|^4} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta_f A^{(n)} \cdot |\nabla_f A^{(n)}|^2 - (\nabla_f A^{(n)})^2 \cdot \Delta_f A^{(n)*}}{|\nabla_f A^{(n)}|^4}$$

Nous avons donc montré que  $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \kappa \cdot \vec{n} = \frac{d^2 A^{(n)}(f)}{ds^2}$

### annexe 2 : équation d'Euler-Lagrange dans le cas complexe

Nous considérons des petites variations de  $A^{(n)} \rightarrow A^{(n)} + \delta A^{(n)}$

$$\Delta W(A^{(n)}) = \int_{-1/2}^{1/2} F \left( f, A^{(n)} + \delta A^{(n)}, \frac{d(A^{(n)} + \delta A^{(n)})}{df} \right) \cdot df - \int_{-1/2}^{1/2} F \left( f, A^{(n)}, \frac{dA^{(n)}}{df} \right) \cdot df$$

Soit  $\delta W(A^{(n)})$  la partie linéaire de  $\Delta W(A^{(n)})$ . Cette relation est appelée première de la fonctionnelle ou encore première variation. Elle joue un rôle comparable à celui de la différentielle en théorie des fonctions [Your79]. Comme il s'agit de dérivées complexes, nous renvoyons le lecteur aux articles suivant [Cara54], et écrivons la variation première dans le cas complexe. On considère que  $F(\cdot)$  est fonction des variables  $A^{(n)}(f)$ ,  $A^{(n)*}(f)$ , et  $\nabla_f A^{(n)}(f)$  et  $\nabla_f A^{(n)*}(f)$  :  $A^{(n)} \mapsto A^{(n)} + \delta A^{(n)}$

$$\delta F(f, A^{(n)}, \nabla_f A^{(n)}) = \frac{\partial F}{\partial A^{(n)*}} \cdot \delta A^{(n)*} + \frac{\partial F}{\partial (\nabla_f A^{(n)*})} \cdot \delta (\nabla_f A^{(n)*}) + \frac{\partial F}{\partial A^{(n)}} \cdot \delta A^{(n)} + \frac{\partial F}{\partial (\nabla_f A^{(n)})} \cdot \delta (\nabla_f A^{(n)})$$

$$\delta W(A^{(n)}) = \int_{-1/2}^{1/2} \delta F(f, A^{(n)}, \nabla_f A^{(n)}) \cdot df = \delta \left[ \int_{-1/2}^{1/2} F(f, A^{(n)}, \nabla_f A^{(n)}) \cdot df \right]$$

En réécrivant :

$$\frac{\partial F}{\partial \left( \frac{dA^{(n)}}{df} \right)} \cdot \delta \left( \frac{dA^{(n)}}{df} \right) = \frac{\partial F}{\partial \left( \frac{dA^{(n)}}{df} \right)} \cdot \frac{d\delta A^{(n)}}{df}$$

et en intégrant par parties :

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial F}{\partial (\nabla_f A^{(n)})} \cdot \frac{d\delta A^{(n)}}{df} \cdot df = - \int_{-1/2}^{1/2} \frac{d}{df} \left( \frac{\partial F}{\partial (\nabla_f A^{(n)})} \right) \cdot \delta A^{(n)} \cdot df + \frac{\partial F}{\partial (\nabla_f A^{(n)})} \cdot \delta A^{(n)} \Big|_{-1/2}^{1/2}$$

Nous écrivons alors la variation première :

$$\begin{aligned} \delta W(A^{(n)}) &= \int_{-1/2}^{1/2} \left[ \frac{\partial F}{\partial A^{(n)*}} - \frac{d}{df} \left( \frac{\partial F}{\partial (\nabla_f A^{(n)*})} \right) \right] \cdot \delta A^{(n)*} + \int_{-1/2}^{1/2} \left[ \frac{\partial F}{\partial A^{(n)}} - \frac{d}{df} \left( \frac{\partial F}{\partial (\nabla_f A^{(n)})} \right) \right] \cdot \delta A^{(n)} \cdot df \\ &+ \frac{\partial F}{\partial (\nabla_f A^{(n)*})} \cdot \delta A^{(n)*} \Big|_{-1/2}^{1/2} + \frac{\partial F}{\partial (\nabla_f A^{(n)})} \cdot \delta A^{(n)} \Big|_{-1/2}^{1/2} \end{aligned}$$

Les seconds termes de l'équation sont nuls. Comme  $\delta A^{(n)}$  et  $\delta A^{(n)*}$  peuvent varier arbitrairement le long de la courbe, on obtient les conditions nécessaires et suffisantes d'Euler-Lagrange pour que l'intégrale  $W(A^{(n)})$  soit stationnaire :

$$\frac{d}{df} \left( \frac{\partial F}{\partial (\nabla_f A^{(n)*})} \right) = \frac{\partial F}{\partial A^{(n)*}} \quad \text{et} \quad \frac{d}{df} \left( \frac{\partial F}{\partial (\nabla_f A^{(n)})} \right) = \frac{\partial F}{\partial A^{(n)}}$$

### annexe 3 : régularisation non-quadratique

L'équation d'Euler-Lagrange étant :  $\frac{d}{df} \left( \lambda \cdot \frac{\partial \Phi(|\nabla_f A^{(n)}|)}{\partial (\nabla_f A^{(n)*})} \right) = \frac{\partial g^2(A^{(n)})}{\partial A^{(n)*}}$

elle se développe comme suit :  $\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{d}{df} \left( \Phi'(|\nabla_f A^{(n)}|) \cdot \frac{\nabla_f A^{(n)}}{|\nabla_f A^{(n)}|} \right) = A^{(n)}(f) \cdot \hat{S}_x(f)$

Soit encore  $\frac{\lambda}{2} \cdot \left( \frac{d}{df} [\Phi'(|\nabla_f A^{(n)}|)] \cdot \vec{\tau} + \Phi'(|\nabla_f A^{(n)}|) \cdot \frac{d\vec{\tau}}{df} \right) = A^{(n)}(f) \cdot \hat{S}_x(f)$

$$\text{Or nous avons : } \Phi'(|\nabla_f A^{(n)}|) \cdot \frac{d\vec{\tau}}{df} = \Phi'(|\nabla_f A^{(n)}|) \cdot \left( \frac{1}{|\nabla_f A^{(n)}|} \cdot \Delta_f A^{(n)} - \frac{d|\nabla_f A^{(n)}|}{df} \cdot \frac{\nabla_f A^{(n)}}{|\nabla_f A^{(n)}|^2} \right)$$

$$\Phi'(|\nabla_f A^{(n)}|) \cdot \frac{d\vec{\tau}}{df} = \frac{\Phi'(|\nabla_f A^{(n)}|)}{|\nabla_f A^{(n)}|} \cdot \left( \Delta_f A^{(n)} - \frac{d|\nabla_f A^{(n)}|}{df} \cdot \vec{\tau} \right) \text{ et } \frac{d}{df} [\Phi'(|\nabla_f A^{(n)}|)] \cdot \vec{\tau} = \Phi''(|\nabla_f A^{(n)}|) \cdot \frac{d|\nabla_f A^{(n)}|}{df} \cdot \vec{\tau}$$

De plus nous avons :

$$\frac{d|\nabla_f A^{(n)}|}{df} = \frac{d\sqrt{A^{(n)}(f) \cdot A^{(n)*}(f)}}{df} = \frac{1}{2} \cdot (\Delta_f A^{(n)} \cdot \vec{\tau}^* + \Delta_f A^{(n)*} \cdot \vec{\tau}) = \text{Re} [\Delta_f A^{(n)} \cdot \vec{\tau}^*] = (\Delta_f A^{(n)} \circ \vec{\tau})$$

Or nous avons la décomposition suivante :

$$\Delta_f A^{(n)} = (\Delta_f A^{(n)} \circ \vec{\tau}) \cdot \vec{\tau} + (\Delta_f A^{(n)} \circ \vec{n}) \cdot \vec{n}$$

Ce qui permet de réécrire l'équation d'Euler-Lagrange sous la forme :

$$\frac{\lambda}{2} \cdot \left( \Phi''(|\nabla_f A^{(n)}|) \cdot (\Delta_f A^{(n)} \circ \vec{\tau}) \cdot \vec{\tau} + \frac{\Phi'(|\nabla_f A^{(n)}|)}{|\nabla_f A^{(n)}|} \cdot (\Delta_f A^{(n)} \circ \vec{n}) \cdot \vec{n} \right) = A^{(n)}(f) \cdot \hat{S}_x(f)$$

On remarque que dans le cas quadratique, on retrouve la première équation :

$$\Phi(|\nabla_f A^{(n)}|) = |\nabla_f A^{(n)}|^2 \Rightarrow \lambda \cdot \Delta_f A^{(n)} = A^{(n)}(f) \cdot \hat{S}_x(f)$$

#### annexe 4 : résolution de l'équation d'Euler-Lagrange (approche de Tikhonov)

Pour résoudre l'équation d'Euler-Lagrange, nous allons développer l'équation  $\lambda \cdot \frac{d^2 A^{(n)}(f)}{df^2} = A^{(n)}(f) \cdot \hat{S}_x(f)$

via la transformée en  $z$ . Commençons par remarquer que  $\frac{d}{df} = \frac{d}{dz^{-1}} \cdot \frac{dz^{-1}}{df} = -i2\pi \cdot z^{-1} \cdot \frac{d}{dz^{-1}}$ . Ce qui permet d'écrire l'équation

d'Euler-Lagrange sous la forme :  $-\lambda \cdot 4\pi^2 \cdot z^{-1} \frac{d}{dz^{-1}} \left( z^{-1} \cdot \frac{dA^{(n)}(z)}{dz^{-1}} \right) = A^{(n)}(z) \cdot \hat{S}_x(z)$

ou encore  $-\lambda \cdot 4\pi^2 \cdot \left[ z^{-2} \cdot \frac{d^2 A^{(n)}(z)}{d(z^{-1})^2} + z^{-1} \cdot \frac{dA^{(n)}(z)}{dz^{-1}} \right] = A^{(n)}(z) \cdot \hat{S}_x(z)$

On remarquera que le second terme de l'équation peut être réécrit comme suit :

$$A^{(n)}(z) \cdot \hat{S}_x(z) = \left( \sum_{q=0}^n a_q^{(n)} \cdot z^{-q} \right) \cdot \left( \sum_{k=-N}^{+N} \hat{r}_k^x \cdot z^{-k} \right) \text{ avec } \hat{r}_k^x = E[x_i \cdot x_{i-k}^*], \quad \hat{r}_{-k}^x = \hat{r}_k^{x*} \text{ et } a_0^{(n)} = 1$$

$$A^{(n)}(z) \cdot \hat{S}_x(z) = \dots + \left( \hat{r}_1^x + \sum_{q=0}^n a_q^{(n)} \cdot \hat{r}_{1-q}^x \right) \cdot z^{-1} + \left( \hat{r}_2^x + \sum_{q=0}^n a_q^{(n)} \cdot \hat{r}_{2-q}^x \right) \cdot z^{-2} + \dots + \left( \hat{r}_n^x + \sum_{q=0}^n a_q^{(n)} \cdot \hat{r}_{n-q}^x \right) \cdot z^{-n} + \dots$$

Pour en déduire l'équation matricielle associée, il suffit alors de faire une comparaison terme à terme en fonction des puissances de  $z^{-1}$  avec le second terme :

$$\begin{aligned}
 & -\lambda.4\pi^2. \left[ z^{-2} \cdot \frac{d^2 A^{(n)}(z)}{d(z^{-1})^2} + z^{-1} \cdot \frac{dA^{(n)}(z)}{dz^{-1}} \right] = -\lambda.4\pi^2. \sum_{p=0}^n p^2 a_p^{(n)}.z^{-p} \\
 & = -\lambda.4\pi^2. \left( (1)^2 .a_1^{(n)} z^{-1} + (2)^2 .a_2^{(n)} z^{-2} + \dots + (n)^2 .a_n^{(n)} z^{-n} \right)
 \end{aligned}$$

Ce qui permet d'écrire de façon synthétique l'expression matricielle suivante :

$$-\lambda.4.\pi^2. \begin{bmatrix} (1)^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (2)^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & (n)^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1^{(n)} \\ a_2^{(n)} \\ \vdots \\ a_n^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{r}_0^x & \hat{r}_1^{x*} & \dots & \hat{r}_{n-1}^{x*} \\ \hat{r}_1^x & \hat{r}_0^x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \hat{r}_1^{x*} \\ \hat{r}_{n-1}^x & \dots & \hat{r}_1^x & \hat{r}_0^x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1^{(n)} \\ a_2^{(n)} \\ \vdots \\ a_n^{(n)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{r}_1^x \\ \hat{r}_2^x \\ \vdots \\ \hat{r}_{n-1}^x \end{bmatrix}$$

On retrouve ainsi la solution par moindres carrés régularisés classique (Yule-Walker) [Her97][Kita85].

### annexe 5 : algorithme de Burg régularisé (approche de Tikhonov)

Nous proposons le calcul récursivement sur l'ordre de la solution de l'équation de Yule-Walker régularisée. Pour ce faire, on utilise l'approche classique de Burg [Burg67], qui consiste à essayer de minimiser, à chaque ordre, le critère quadratique d'adéquation aux données à partir du coefficient de réflexion  $\mu_n$  en utilisant la relation de récurrence fournie par l'équation de Levinson. Le critère quadratique d'adéquation aux données défini par l'erreur quadratique moyenne d'estimation est maintenant estimé à partir de la moyenne des erreurs quadratiques moyennes fournies par la prédiction directe  $f_n(k)$  et rétrograde  $b_n(k)$  :

$$\frac{1}{2.(N-n)} \sum_{k=n+1}^N |f_n(k)|^2 + |b_n(k)|^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \rho_0 = E \left[ |e_n(i)|^2 \right] = \int_{-1/2}^{1/2} E^{(n)}(f).df$$

avec  $E^{(n)}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \rho_k . e^{-j2\pi kf}$  et  $\rho_k = E[e_n(i) . e_n^*(i-k)]$  et pour expression des erreurs d'estimation directe et rétrograde :

$$f_n(k) = \sum_{i=0}^n a_i^{(n)} . x_{k-i}, \quad b_n(k) = \sum_{i=0}^n a_i^{(n)*} . x_{k-n+i} \quad \text{et} \quad a_0^{(n)} = 1$$

L'équation récursive de Levinson, qui se déduit de la structure blocs de l'équation de Yule-Walker, permet d'écrire :

$$A_n = \begin{bmatrix} a_1^{(n)} \\ \vdots \\ a_n^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_n \cdot \begin{bmatrix} A_{n-1}^{(-)} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \mu_n = a_n^{(n)} \quad \text{et la notation suivante} :$$

$$A_n^{(-)} = J_n . A_n^* \quad \text{avec} \quad J_n = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad \text{Ce qui permet de réécrire les expressions récursives suivantes. En premier lieu}$$

pour  $A^{(n)}(z)$ , nous avons :  $A^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^n a_k^{(n)} . z^{-k} = A^{(n-1)}(z) + \mu_n . z^{-n} . A^{(n-1)}(1/z^*)^*$

Nous avons le même type de relation récursive pour l'erreur de prédiction directe et rétrograde, liée à la structure treillis de l'algorithme de Burg :

$$f_n(k) = f_{n-1}(k) + \mu_n . b_{n-1}(k-1) \quad \text{et} \quad b_n(k) = b_{n-1}(k-1) + \mu_n^* . f_{n-1}(k)$$

Nous allons alors essayer de trouver l'expression du coefficient de réflexion qui minimise à chaque ordre le critère quadratique auquel est ajouté le terme intégral de régularisation :

$$E_{reg}^{(n)}(\mu_n) = \frac{1}{2 \cdot (N - n)} \sum_{k=n+1}^N |f_n(k)|^2 + |b_n(k)|^2 + \lambda \cdot \int_{-1/2}^{1/2} \left| \frac{dA^{(n)}(f)}{df} \right|^2 \cdot df$$

Les relations de récurrences précédentes permettent d'introduire le coefficient de réflexion dans le premier terme de  $E_{reg}^{(n)}(\mu_n)$ , de même la relation de récurrence sur  $A^{(n)}(z)$  introduit le coefficient  $\mu_n$  dans le second terme (terme de régularisation quadratique) [Barb95].

Il suffit alors d'annuler le gradient de  $E_{reg}^{(n)}(\mu_n)$  par rapport à  $\mu_n$  :  $\nabla_{\mu_n} E_{reg}^{(n)}(\mu_n) = \frac{\partial E_{reg}^{(n)}(\mu_n)}{\partial \mu_n^*} = 0$ . Finalement, on déduit le coefficient de réflexion (Burg) régularisé

$$\hat{\mu}_n = - \frac{\frac{2}{N-n} \sum_{k=n+1}^N f_{n-1}(k) \cdot b_{n-1}^*(k-1) + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k^{(n)} \cdot a_k^{(n-1)} \cdot a_{n-k}^{(n-1)}}{\frac{1}{N-n} \sum_{k=n+1}^N |f_{n-1}(k)|^2 + |b_{n-1}(k-1)|^2 + 2 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k^{(n)} \cdot |a_k^{(n-1)}|^2} \quad \text{avec} \quad \beta_k^{(n)} = \lambda \cdot (2\pi)^2 \cdot (k-n)^2$$

Il apparaît, par rapport à l'algorithme de Burg, que seule l'expression du coefficient de réflexion change : ajout d'un terme au numérateur et au dénominateur qui dépend des paramètres autorégressifs à l'ordre précédent  $a_k^{(n-1)}$ . Ce sont ces termes qui évitent le mauvais conditionnement du calcul du coefficient de réflexion et stabilisent le calcul numérique de la solution, afin d'éviter que conjointement numérateur et dénominateur s'annulent lorsque l'on s'approche du bon ordre du modèle autorégressif.

Cette approche permet de conserver la faible complexité algorithmique et la structure treillis de l'algorithme de Burg, tout en levant le caractère mal-posé du problème. Il est alors possible de choisir un ordre de modèle maximum (nombre d'échantillons moins un) sans voir apparaître de pics parasites. Il faut également noter que notre approche comporte un lien avec la méthode de régularisation par moindres carrés, en remarquant que :

$$\mu_n = - \frac{\sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=1}^n a_l^{(n-1)} \cdot a_{m-k}^{(n-1)} \cdot \bar{r}_{k-l}}{\sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_l^{(n-1)} \cdot a_k^{(n-1)*} \cdot \bar{r}_{k-l}}, \quad \begin{cases} \bar{r}_{k-l} = r_{k-l} & \text{si } k \neq l \\ \bar{r}_{k-l} = r_{k-l} + \beta_k^{(n)} & \text{autrement} \end{cases} \quad \text{avec } r_i = E[x_m \cdot x_{m-i}^*]$$

Soit l'expression implicite de la matrice de corrélation régularisée équivalente dans le cas moindres carrés :

$$R_n^{reg} = R_n + \lambda \cdot (2\pi)^2 \cdot \Theta_n \quad \text{avec} \quad \Theta_n = \begin{bmatrix} n^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (n-1)^2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1^2 \end{bmatrix}$$

## annexe 6 : développement de l'équation d'Euler-Lagrange dans l'approche géométrique

Nous développons l'équation :

$$|\nabla_f A^{(n)}| \left( 2 \cdot \frac{\partial g}{\partial A^{(n)*}} - \left( 2 \cdot \frac{\partial g}{\partial A^{(n)*}} \circ \vec{\tau} \right) \cdot \vec{\tau} - \frac{1}{|\nabla_f A^{(n)}|} \frac{\partial g}{\partial f} \cdot \vec{\tau} - g \cdot \kappa \cdot \vec{n} \right) = 0$$

$$\frac{|\nabla_f A^{(n)}|}{2} \left[ \frac{g \Delta_f A^{(n)} |\nabla_f A^{(n)}|^2 - g \nabla_f A^{(n)*} (\nabla_f A^{(n)})^2}{|\nabla_f A^{(n)}|^4} + 2 \frac{\partial g}{\partial A^{(n)}} \frac{(\nabla_f A^{(n)})^2}{|\nabla_f A^{(n)}|^2} - 2 \frac{\partial g}{\partial A^{(n)*}} \frac{|\nabla_f A^{(n)}|^2}{|f A^{(n)}|^2} + 2 \frac{\partial g}{\partial f} \frac{\nabla_f A^{(n)}}{|f A^{(n)}|^2} \right] = 0$$

$$g = \sqrt{|A^{(n)}|^2} \cdot \hat{S}_x, \quad \frac{\partial g}{\partial A^{(n)*}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{A^{(n)} \cdot \hat{S}_x}{g}, \quad \frac{\partial g}{\partial A^{(n)}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{A^{(n)*} \cdot \hat{S}_x}{g} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial f} = \frac{|A^{(n)}|^2}{2 \cdot g} \cdot \frac{\partial \hat{S}_x}{\partial f}$$

$$\frac{\nabla_f A^{(n)}}{2 \cdot g \cdot |\nabla_f A^{(n)}|^3} \cdot \left[ \nabla_f A^{(n)*} \cdot \left( g^2 \cdot \Delta_f A^{(n)} - A^{(n)} \cdot \hat{S}_x \cdot |\nabla_f A^{(n)}|^2 \right) - \nabla_f A^{(n)} \cdot \left( g^2 \cdot \Delta_f A^{(n)*} - A^{(n)} \cdot \hat{S}_x \cdot |\nabla_f A^{(n)}|^2 \right) \right] + |A^{(n)}|^2 \cdot \frac{\partial \hat{S}_x}{\partial f} \cdot |\nabla_f A^{(n)}|^2 = 0$$

$$\frac{\nabla_f A^{(n)}}{2 \cdot g \cdot |\nabla_f A^{(n)}|^3} \left[ 2 \cdot i \cdot \text{Im} \left( \nabla_f A^{(n)*} \cdot \left( g^2 \cdot \Delta_f A^{(n)} - A^{(n)} \cdot \hat{S}_x \cdot |\nabla_f A^{(n)}|^2 \right) \right) + |A^{(n)}|^2 \cdot \frac{\partial \hat{S}_x}{\partial f} \cdot |\nabla_f A^{(n)}|^2 \right] = 0$$

## annexe 7 : démonstration du lemme 1

$$\frac{d}{df} \left( \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y - F \right) = \frac{d}{df} \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right) \cdot y + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{df} - \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{df} - \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{df} - \frac{\partial F}{\partial f}$$

$$\text{Soit : } \frac{d}{df} \left( F - \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y \right) = \frac{\partial F}{\partial f}$$

$$\frac{d}{df} \left( \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y - F \right) = \left( \frac{d}{df} \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right) - \frac{\partial F}{\partial x} \right) \cdot y - \frac{\partial F}{\partial f} \quad \text{or} \quad \frac{d}{df} \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right) - \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

Donc si pour l'extrémale  $\frac{\partial F}{\partial f} = 0$  alors  $F - \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y = cste$  pour l'extrémale.

## annexe 8 : démonstration du lemme 2

$$\text{Min}_F \int_{-1/2}^{1/2} F \cdot df \text{ est solution de l'équation d'Euler-Lagrange } \frac{d}{df} \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right) = \frac{\partial F}{\partial x}$$

$$\text{Min}_F \int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{F} \cdot df \text{ est solution de l'équation d'Euler-Lagrange } \frac{d}{df} \left( \frac{1}{\sqrt{F}} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} \right) = \frac{1}{\sqrt{F}} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}$$

Sachant que  $F$ , quadratique-homogène en  $y$ , est dans ce cas constant sur chaque extrémale, alors  $\frac{d}{df} \left( \frac{1}{\sqrt{F}} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} \right) = \frac{1}{\sqrt{F}} \cdot \frac{d}{df} \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)$

et l'extrémale de l'une vérifie l'équation de l'autre.

## annexe 9 : expression de l'EDP vectorielle

En utilisant le fait que  $\frac{d}{df} = \frac{d}{dz^{-1}} \cdot \frac{dz^{-1}}{df} = -i2\pi \cdot z^{-1} \cdot \frac{d}{dz^{-1}}$ , on déduit que l'EDP s'exprime alors comme suit :

$$\frac{\partial A^{(n)}(z)}{\partial t} = (-i2\pi) z^{-1} \frac{\partial}{\partial z^{-1}} \left[ (-2i\pi) z^{-1} g^2(A^{(n)}(z)) \frac{\partial A^{(n)}(z)}{\partial z^{-1}} \right] - |2i\pi|^2 A^{(n)}(z) S_x(z) \left| \frac{\partial A^{(n)}(z)}{\partial z^{-1}} \right|^2$$

En utilisant le fait que  $g^2(A^{(n)}(z)) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \rho_k \cdot z^{-k}$ , nous réécrivons l'équation en puissances de  $z^{-1}$  :

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^n \frac{\partial a_p^{(n)}}{\partial t} \cdot z^{-p} &= \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \rho_k \cdot z^{-k} \right) \cdot (-i \cdot 2 \cdot \pi)^2 \cdot \sum_{p=0}^n p^2 \cdot a_p^{(n)} \cdot z^{-p} + (-i \cdot 2 \cdot \pi)^2 \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k \cdot \rho_k \cdot z^{-k} \cdot \sum_{p=0}^n p \cdot a_p^{(n)} \cdot z^{-p} \\ &+ |-2 \cdot i \cdot \pi|^2 \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E[e_n(i) \cdot x_{i-k}^*] \cdot z^{-k} \cdot \sum_{p=0}^n p \cdot a_p^{(n)} \cdot z^{-p} \cdot \sum_{q=0}^n q \cdot a_q^{(n)*} \cdot z^q \end{aligned}$$

que nous pouvons réécrire sous la forme suivante, en regroupant les termes :

$$\sum_{p=0}^n \frac{\partial a_p^{(n)}}{\partial t} \cdot z^{-p} = (-2 \cdot i \cdot \pi)^2 \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=0}^n p \cdot (p+k) \cdot \rho_k \cdot a_p^{(n)} \cdot z^{-(p+k)} + |-2 \cdot i \cdot \pi|^2 \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^n p \cdot a_p^{(n)} \cdot q \cdot a_q^{(n)*} \cdot \tau_k \cdot z^{-(k+p-q)}$$

avec  $\tau_k = E[e_n(i) \cdot x_{i-k}^*]$ . L'identification terme à terme des puissances de  $z^{-1}$ , nous permet d'écrire l'équation suivante sous une forme vectorielle :  $\frac{\partial A_n}{\partial t} = J_n^T \cdot [\Sigma_n] \cdot J_n \cdot A_n - K(J_n \cdot A_n) \cdot T_n \cdot J_n \cdot A_n$

$$K(J_n \cdot A_n) = \begin{bmatrix} \left[ \begin{array}{c} J_n \cdot A_n \\ 0_{n-1} \end{array} \right]^+ \\ \left( Z_n \cdot \left[ \begin{array}{c} J_n \cdot A_n \\ 0_{n-1} \end{array} \right] \right)^+ \\ \vdots \\ \left( Z_n^n \cdot \left[ \begin{array}{c} J_n \cdot A_n \\ 0_{n-1} \end{array} \right] \right)^+ \end{bmatrix} \quad Z_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad T_n = \begin{bmatrix} \tau_1 & \tau_0 & \tau_1^* & \tau_2^* & \cdots & \tau_{n-2}^* \\ \tau_2 & \tau_1 & \tau_0 & \tau_1^* & \cdots & \tau_{n-1}^* \\ \tau_3 & \tau_2 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tau_4 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \tau_{n-2} \\ \tau_{2n-1} & \tau_{2n-2} & \tau_{2n-3} & \cdots & \tau_n & \tau_{n-1} \end{bmatrix}$$

avec  $\tau_k = E[e_n(i) \cdot x_{i-k}^*]$

$$\text{et } J_n = (-i \cdot 2 \cdot \pi) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{bmatrix} \quad \Sigma_n = \begin{bmatrix} \rho_0 & \rho_1^* & \cdots & \rho_{n-1}^* \\ \rho_1 & \rho_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \rho_1^* \\ \rho_{n-1} & \cdots & \rho_1 & \rho_0 \end{bmatrix} \quad \text{et } \rho_k = E[e_n(i) \cdot e_n^*(i-k)]$$

## annexe 10 : démonstration de la transformation de Bäcklund

$$B \left( U - 2 \cdot \frac{\nu}{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial f} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( U - 2 \cdot \frac{\nu}{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial f} \right) + \left( U - 2 \cdot \frac{\nu}{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial f} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial f} \left[ U - 2 \cdot \frac{\nu}{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial f} \right] - \nu \cdot \frac{\partial^2}{\partial f^2} \left[ U - 2 \cdot \frac{\nu}{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial f} \right]$$

Or

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial f} \right) = \frac{\partial^2 \ln A}{\partial t \partial f} = \frac{\partial^2 \ln A}{\partial f \partial t} = \frac{\partial}{\partial f} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial t} \right)$$

$$u = B(U) - 2\nu \frac{\partial}{\partial f} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial t} \right) - 2\nu \frac{\partial}{\partial f} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial f} U \right) + 2\nu \frac{\partial}{\partial f} \left[ \nu \left( \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial f} \right)^2 \right] + 2\nu \frac{\partial}{\partial f} \left[ \nu \frac{\partial}{\partial f} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial f} \right) \right]$$

$$B \left( U - 2 \cdot \frac{\nu}{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial f} \right) = B(U) - 2\nu \frac{\partial}{\partial f} \left[ \frac{1}{A} \left( \frac{\partial A}{\partial t} + U \cdot \frac{\partial A}{\partial f} - \nu \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial f^2} \right) \right]$$