

Spectrogramme de phase et spectrogramme de fréquence

Phase spectrogram and frequency spectrogram

par François LÉONARD

Hydro-Québec (IREQ) 1800 boul. Lionel-Boulet, Varennes, Québec, Canada, J3X 1S1 Courriel : leonard.françois@ireq.ca

résumé et mots clés

La Transformée de Fourier à Court Terme (TFCT) livre une fonction de distribution complexe qui ne peut être directement illustrée dans le plan temps-fréquence. Jusqu'à présent, le résultat du calcul de la TFCT était présenté sous la forme d'un spectrogramme de puissance où l'on n'exploite que la valeur d'amplitude de la TFCT. Le problème est que l'information de phase y est partiellement présente et n'y est pas distinctement affichée. Nous nous coupons ainsi d'une source d'information importante. Entre autres, le spectrogramme de puissance ne permet pas de caractériser des signaux harmoniques modulés en phase ou faiblement modulés en fréquence. Nous présentons ici différents moyens de présenter et de mettre en valeur l'information provenant de la phase de la TFCT. Ces moyens, nous les appellerons spectrogramme de phase et spectrogramme de fréquence, par opposition à spectrogramme d'amplitude ou de puissance. Des simulations numériques, ainsi que des exemples tirés de mesures de vibrations mécaniques, démontrent l'utilité et l'acuité de ces nouveaux outils. Ces algorithmes sont disponibles sur le site ftp.ireq.ca/pub/fleonard/.

Spectrogramme de phase, spectrogramme de fréquence, fréquence instantanée, temps-fréquence, déroulement de la phase, borne inférieure, modulation, patron de frange, détection de fissuration.

abstract and key words

The short-time Fourier transform (STFT) yields a complex distribution function which cannot be used directly for illustration in the time-frequency plane. Until recently, the results of STFT calculations have always been presented in the form of a power spectrogram where only the amplitude value of the STFT is shown. The problem is that the phase information is only partially included and furthermore is mixed with amplitude information, which means that we are deprived of an important source of information. Among other things, the power spectrogram does not allow us to characterize harmonic signals that are not strongly frequency-modulated. The aim of this paper is to present different ways of presenting and making good use of the information from the phase of the STFT. Let's call these means the phase spectrogram and the frequency spectrogram in opposition to the amplitude or power spectrogram. Digital simulations together with examples from measurements of mechanical vibrations bear witness to the usefulness and accuracy of these new tools. These algorithms are available at ftp.ireq.ca/pub/fleonard/.

Phase spectrogram, frequency spectrogram, instantaneous frequency, time-frequency, phase unwrapping, lower bound, modulation, fringe pattern, crack detection.

1. introduction

La présentation mixte, en temps et en fréquence, remonte aux travaux de D. Gabor [1] et J. Ville [2] effectués au milieu des années quarante. Gabor proposait de déployer le signal dans le plan temps-fréquence comme une distribution d'atomes alors que Ville cherchait un moyen d'obtenir une densité d'énergie. Depuis, beaucoup d'efforts ont été investis pour réunir et consolider les différentes approches sous la classe de Cohen [3]. Cependant, bien que certains algorithmes exploitent la phase dans le plan temps-fréquence [4-6], une recherche bibliographique ne révèle rien de notable sur le sujet de la présentation graphique de la phase dans ce plan. Parmi les différents outils mis à notre disposition pour la présentation dans le plan temps-fréquence, nous avons choisi la Transformée de Fourier à Court Terme (TFCT) comme moyen de présentation de la phase dans ce plan pour des motifs de popularité et de simplicité.

Usuellement, le terme « spectrogramme » est réservé pour la présentation selon une distribution puissance de la TFCT. Cette dernière transformée sur un signal temporel $s(t)$ s'écrit

$$F_s(\tau, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot h^*(t - \tau) e^{-j2\pi\nu t} dt, \quad (1)$$

avec $F_s(\tau, \nu)$ pour fonction de distribution complexe et $h^*(t - \tau)$, la conjugué de la fenêtre spectrale employée comme noyau de pondération temps-fréquence. Le produit $F_s(\tau, \nu) \cdot F_s^*(\tau, \nu)$ donne alors le spectrogramme. Dans ce texte, nous parlerons de « spectrogramme de puissance » lorsque nous ferons référence à ce produit, en opposition au spectrogramme de phase et au spectrogramme de fréquence qui seront introduits plus loin.

La TFCT est une transformation qui préserve l'information puisqu'il suffit de réaliser une intégration de surface dans le plan temps-fréquence [6] telle que

$$s(t) = \iint_{-\infty}^{\infty} F_s(\tau, \nu) \cdot h(t - \tau) e^{j2\pi\nu t} d\tau d\nu, \quad (2)$$

pour retrouver le signal temporel $s(t)$. Par contre, il est plus difficile de reconstruire avec exactitude le signal à partir du seul spectrogramme de puissance [7,8] car celui-ci ne contient pas toute l'information requise pour retrouver le signal temporel d'origine : il y manque l'information de phase véhiculée par l'argument de la TFCT. Précisons que l'on observe sur le spectrogramme de puissance des interférences entre les composantes présentes. C'est d'ailleurs l'information de phase contenue dans ces interférences qui permet d'estimer le signal temporel à partir du spectrogramme de puissance. Bien que le spectrogramme de puissance contienne une certaine information de phase, il ne peut illustrer adéquatement cette phase.

Le spectrogramme de phase, utilisant l'argument de la TFCT, nous donne accès à une source d'information qui complète celle divulguée par le spectrogramme de puissance. L'information

affichée par un spectrogramme de phase peut prendre différentes formes. La plus simple à comprendre intuitivement est la variation de phase d'une sinusoïde par rapport à une sinusoïde de référence, cette référence étant la même sinusoïde prise à une époque donnée et qui n'aurait pas changé de fréquence depuis. D'autre part, dériver cette phase génère un spectrogramme de fréquence qui nous apporte une autre perception de la fréquence instantanée.

2. le spectrogramme discret d'une sinusoïde

Avant d'aborder le spectrogramme de phase, présentons la TFCT d'un échantillonnage discret, d'une durée finie, d'un signal sinusoïdal de tonalité constante. Ce sera ce même signal qui sera repris dans le développement mathématique du spectrogramme de phase et du spectrogramme de fréquence.

Soit la séquence

$$s(nT) = a_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot nT + \phi_0), \quad n = 0, N - 1 \quad (3)$$

issue de l'échantillonnage d'une sinusoïde d'amplitude a_0 , de phase ϕ_0 et de fréquence $f_0 = \omega_0/2\pi$, avec le temps $t = nT$ et où T est le pas d'échantillonnage.

Pour une transformée discrète de Fourier (TDF) unique sur N échantillons, une fenêtre spectrale de noyau $W(k, \omega T)$ (voir l'annexe A) appliquée à la sinusoïde de l'équation précédente donne

$$S(k, \omega) = \left(a_0 \frac{\exp(j\phi_0) \cdot \delta(\omega + \omega_0) + \exp(-j\phi_0) \cdot \delta(\omega - \omega_0)}{2} \right) * W(k, \omega T), \quad (4)$$

où k définit la position de la référence de phase, soit

$$S(k, \omega) = \frac{a_0}{2} (\exp(j\phi_0) \cdot W(k, (\omega + \omega_0)T) + \exp(-j\phi_0) \cdot W(k, (\omega - \omega_0)T)), \quad (5)$$

après convolution.

Examinons le cas d'une TFCT discrète où une cascade de TDF donne la distribution temps-fréquence. Soit l , la distance en nombre d'échantillons séparant chaque TDF et m l'indice de position temporelle de chaque transformée tels que le produit $(m - 1) \cdot T$ donne la position du début de chacune d'elle avec $m = 1, 2, \dots, M$. Nous appellerons tranches ces TDF. Appliquée à la sinusoïde décrite par l'expression 3, un décalage temporel $(m - 1) \cdot T$ donne

$$S_m(k, \omega) = \frac{a_0}{2} (\exp(j\phi_0 + j\omega_0 \cdot (m-1) \cdot lT) \cdot W(k, (\omega + \omega_0)T) + \exp(-j\phi_0 - j\omega_0 \cdot (m-1) \cdot lT) \cdot W(k, (\omega - \omega_0)T)) \quad (6)$$

pour la m^e tranche. Une TFCT d'un signal appartenant au domaine des Réels présente une distribution de puissance spectrale symétrique par rapport à 0 Hz. On n'affiche donc que la portion de distribution située dans les fréquences positives. Pour une fenêtre spectrale générant des lobes secondaires de faibles amplitudes (figure 1), si nous considérons les composantes spectrales de fréquences positives et négatives distantes d'au moins quelques lignes spectrales, nous pouvons écrire

$$W(k, (\omega + \omega_0)T) \ll W(k, (\omega - \omega_0)T) \quad (7)$$

pour

$$2\pi(I+1)/N < \omega_0 T < 2\pi(0,5 - (I+1)/N)$$

et

$$(\omega - \omega_0)T \leq 2\pi I/N$$

où I est la demie largeur du lobe principal. Dans le cas d'une fenêtre qui offre une décroissance progressive des lobes secondaires avec leur éloignement du lobe principal, la grandeur I peut s'étendre sur une distance de plusieurs lobes secondaires. Cependant, c'est sous le lobe principal que se retrouve la presque totalité de l'énergie et, celle-ci étant le support de l'information, c'est principalement là que l'on retrouve une information exploitable. Le chevauchement des noyaux fait en sorte que les développements ultérieurs ne sont valides que sous le lobe principal d'un noyau là où les lobes secondaires des autres noyaux présents induisent une contamination négligeable. Les développements ultérieurs restent valables pour un signal harmonique composé d'une somme de sinusoides pourvu que les lobes principaux des noyaux correspondant ne se chevauchent pas.

Sous le lobe principal de la TDF d'une sinusoides, l'expression 6 se simplifie de sorte que

$$S_m(k, \omega)|_{\omega \approx \omega_0} \cong \frac{a_0}{2} \exp(-j\phi_0 - j\omega_0 \cdot (m-1) \cdot lT) \cdot W(k, (\omega - \omega_0)T). \quad (8)$$

Dans ce qui suit, nous appellerons composante spectrale cette dernière expression du noyau de la fenêtre déplacé de ω_0 dans les fréquences positives et présente tranche après tranche dans la TFCT discrète.

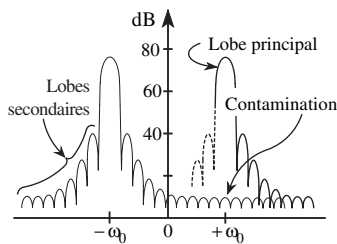


Figure 1. – Densité de la puissance spectrale illustrant la contamination du lobe principal du noyau $W(k, (\omega - \omega_0)T)$ situé dans les fréquences positives par les lobes secondaires du second noyau.

Enfin, précisons qu'à la sortie d'une TDF, la valeur de phase est comprise dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$. Une phase quelconque ϕ rapportée dans cet intervalle prend alors la valeur $\phi = \text{mod}_{2\pi}\{\phi + \pi\} - \pi$ où $\text{mod}_{2\pi}\{\}$ est la fonction modulo qui retire le multiple de 2π de la valeur $\phi + \pi$. Pour alléger le texte qui suit, les variables soulignées seront des variables soumises à l'opérateur

$$\underline{x} = \text{mod}_{2\pi}\{x + \pi\} - \pi. \quad (9)$$

3. Le spectrogramme de phase avec un petit pas de progression

Si le spectrogramme d'amplitude

$$\|S_m(\omega)\|_{\omega \approx \omega_0} \equiv \frac{a_0}{\sqrt{2}} \|W(k, (\omega - \omega_0)T)\| \quad (10)$$

de la tonalité décrite par l'équation 3 est défini comme étant la norme de l'équation 8 multipliée par racine de deux (pour tenir compte du fait que les fréquences positives ne contiennent que la moitié de l'énergie), par contre, nous ne pouvons définir le spectrogramme de phase correspondant comme étant simplement la phase de l'expression 8. En effet, la phase

$$\theta_m(k, \omega)|_{\omega \approx \omega_0} = \phi_0 + \omega_0 \cdot (m-1) \cdot lT + \arg(W(k, (\omega - \omega_0)T)) \quad (11)$$

présente une variation trop importante entre deux échantillons contigus sur le spectrogramme de phase pour que l'oeil puisse décoder une information utile. Sur ce spectrogramme, dans la direction de l'axe des fréquences, c'est le terme $\arg(W(k, (\omega - \omega_0)T))$, associé au noyau de la fenêtre spectrale utilisée, qui module la valeur de phase au voisinage de $\omega = \omega_0$. Or, référencer la phase au centre de la fenêtre spectrale donne un plateau de phase centré sur $\omega = \omega_0$ [9] tel que démontré à l'annexe A. Donc, pour $k = N/2$, nous avons une continuité de la phase sur quelques échantillons spectraux de part et d'autre de ω_0 . Perpendiculairement, selon l'axe du temps, c'est le produit $\omega_0(m-1)l \cdot T$ qui accroît linéairement la phase. Or, pour une basse fréquence et un pas de progression lT réduit, il est possible de suivre l'évolution de la phase tranche après tranche et de soustraire la pente de phase $\omega_0(m-1)l \cdot T$ afin de ne conserver que les oscillations sur la valeur de phase provenant d'une éventuelle modulation.

Pour soustraire le terme $\omega_0(m-1)l \cdot T$ de l'équation 11, il suffit d'écrire

$$\theta_m^\dagger(k, \omega) = \theta_m(k, \omega) - \frac{m-1}{M-1} (\theta_M(k, \omega) - \theta_1(k, \omega)). \quad (12)$$

Cette dernière expression donne une présentation graphique qui a seulement du sens lorsque l'on fixe $k = N/2$ afin d'avoir un

plat de phase centrée sur ω_0 . Pour éliminer le terme $\arg(W(k, (\omega - \omega_0)T))$ afin d'avoir un résultat indépendant de la référence k et présentant moins d'oscillation de phase, on référence la phase à une tranche m_r tel que finalement

$$\theta_m^\dagger(\omega, m_r) \equiv \theta_m(k, \omega) - \frac{m-1}{M-1}(\theta_M(k, \omega) - \theta_1(k, \omega)) - \theta_{m_r}(k, \omega) \quad (13 a)$$

et

$$\underline{\theta_m^\dagger(\omega, m_r)} \quad (13 b)$$

définissent respectivement le spectrogramme de la phase déroulée et le spectrogramme de la phase inscrite dans le cercle trigonométrique avec $\theta_m(k, \omega) = \arg(S_m(k, \omega))$ pour $m = 1, M$. Evidemment, si l'on introduit l'équation 11 dans 13, avec $m_r = 1$ on obtient zéro sur tout le plat de phase, quelle que soit la valeur de m . On se doute bien que le spectrogramme de phase n'a pas été créé pour visualiser une tonalité continue, mais plutôt pour des tonalités modulées. Examinons donc comment se comporte la dernière expression en présence d'une faible modulation.

Avant d'introduire la modulation de phase, rappelons que la largeur de la fenêtre spectrale agit comme filtre moyennant cette modulation. Pour qu'une modulation de phase soit perceptible par des tranches successives sur le spectrogramme, il faut que la période de modulation à observer soit supérieure à NT , où NT est la durée de la fenêtre spectrale utilisée dans le spectrogramme. Lorsque nous extrayons la valeur de la phase d'une sinusoïde modulée, et ce, à partir d'une TDF, nous faisons implicitement l'hypothèse suivante : *la modulation est négligeable sur la durée de la fenêtre d'observation*. La précision obtenue sera à la fois fonction du rapport signal/bruit et de la justesse de cette dernière hypothèse.

Pour une modulation de phase ϕ_n ajoutée à la sinusoïde donnée à l'équation 3, telle que

$$s(nT) = a_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot nT + \phi_0 + \phi_n), \quad (14)$$

sur la $m^{ième}$ TDF nous obtenons la phase

$$\theta_m(k, \omega)|_{\omega \approx \omega_0} \cong \phi_0 + \phi_{(m-1)l+N/2} + \omega_0 \cdot (m-1) \cdot lT + \arg(W(k, (\omega - \omega_m)T)) \quad (15)$$

sous le lobe principal de la composante spectrale où ω_m et $\phi_{(m-1)l+N/2}$ sont respectivement la fréquence moyenne et l'écart de phase observés sur la durée de la fenêtre spectrale m et pondérés par cette fenêtre. La valeur de phase doit être référencée temporellement au milieu de la fenêtre spectrale puisque celle-ci est issue d'une observation effectuée sur l'ensemble de la fenêtre. C'est pourquoi nous prenons la valeur de modulation instantanée de phase $\phi_{(m-1)l+N/2}$ présente au milieu de la $m^{ième}$ fenêtre comme la valeur d'écart de phase qui sera observée sur la composante spectrale après TDF.

Premièrement, soulignons que, malgré la présence d'une modulation sur la phase, le spectrogramme de phase tel que défini

par l'équation 13 reste indépendant de la valeur de référence de phase k . En effet, de façon générale, la différence $\arg(W(k, (\omega - \omega_m)T)) - \arg(W(k, (\omega - \omega_{m_r})T))$ donne le même résultat quelle que soit la valeur de k (démonstration à l'annexe B). Deuxièmement, sous le lobe spectral, là où nous observons un plateau de phase, nous avons

$$\arg(W(k, (\omega - \omega_m)T)) - \arg(W(k, (\omega - \omega_{m_r})T)) \cong 0, \quad (16)$$

pour $|\omega - \omega_m| \leq 2\pi I/N$ et $|\omega - \omega_{m_r}| \leq 2\pi I/N$, où I est la demie largeur du lobe principal, telle que déduite de l'équation A.9 à l'annexe A et de l'équation B.3 de l'annexe B. Les plateaux de phase d'une même composante spectrale doivent non seulement avoir une continuité d'une tranche à l'autre, mais aussi de la première tranche à la dernière. La modulation peut générer un décalage de plus d'une ligne spectrale entre deux plateaux de phase, mais ne doit pas déplacer les plateaux de façons qu'ils ne soient plus « connectés » l'un à l'autre. Cette limitation restreint l'usage du spectrogramme de phase à des portions de signaux qui, pour une durée d'acquisition T , ont une modulation qui déplace la composante spectrale de moins de $2I - 1$ lignes spectrales. Nous verrons, avec le spectrogramme de fréquence, comment cette limitation d'une continuité de la première à la dernière tranche peut être levée et reportée à une simple continuité d'une tranche à l'autre.

Finalement, le spectrogramme de la phase déroulée

$$\theta_m^\dagger(\omega, m_r)|_{\omega \approx \omega_0} \cong \phi_{(m-1)l+N/2} - \phi_{(m_r-1)l+N/2} - \frac{m-1}{M-1}(\phi_{(M-1)l+N/2} - \phi_{N/2}) \quad (17)$$

d'un signal faiblement modulé en phase donne la phase relative par rapport à la tranche m_r avec un léger écart de pente qui diminue avec la largeur MI de la fenêtre d'observation du spectrogramme. Cet écart de pente est inévitable puisqu'il correspond à l'erreur d'estimation de la fréquence moyenne de la composante sur la durée du spectrogramme en présence d'une modulation.

À la sortie d'une TDF, on ne dispose pas de la valeur $\theta_m(k, \omega)$ mais bien de la valeur $\underline{\theta_m(k, \omega)}$. L'élimination de la pente de phase $\omega_0(m-1) \cdot T$ n'est donc possible que si l'on peut dérouler la phase d'une tranche à l'autre. Soulignons que ce déroulement de phase s'exerce dans le temps et non en fréquence, contrairement à ce qui est usuellement réalisé [10-14]. Le déroulement de la phase consistant à choisir le moindre parcours sur le cercle trigonométrique (voir en annexe C), le déroulement ne peut se faire que si celle-ci ne varie pas de plus de π radians entre deux tranches successives, soit lorsque

$$(\phi_{ml+N/2} - \phi_{(m-1)l+N/2} + \omega_0 \cdot lT) < \pi \text{ radians}, \quad (18)$$

sans quoi l'on fait une erreur sur le choix du moindre parcours. Notons que, pour $l = 1$, cette contrainte permet aussi de respec-

ter le théorème d'échantillonnage de Nyquist-Shannon. Si l'on ne veut pas se limiter aux basses fréquences, nous devons fixer $l = 1$ pour permettre le déroulement de la phase sur la pleine largeur de bande, quitte à ne retenir qu'une faible proportion des tranches après avoir calculé la pente sur la phase. Ici, le prix en temps de calcul et en mémoire est élevé car, dans la pratique, les tranches se succèdent à une distance de plus de 5 % de la largeur de la fenêtre spectrale, donc avec $l \gg 1$. Par exemple, pour une longueur de TRF de $N = 1024$ échantillons et un pas de progression à l'affichage fixé à 5 % de ce dernier nombre, on ne retient qu'une tranche calculée sur 50!

La figure 2 illustre un exemple de spectrogramme de phase où $l = 1$ et $k = N/2$, avec le spectrogramme de puissance correspondant, pour une fenêtre de type Blackman-Harris à 4 termes. Notez que cette fenêtre est utilisée pour toutes les illustrations qui suivent. On constate que les largeurs de sommets des composantes spectrales apparaissent plus larges sur le spectrogramme de phase en raison du plateau de phase. Sur le spectrogramme de puissance ce plateau est remplacé par une crête. On note aussi qu'en dehors de ces plateaux de phase, la valeur de phase s'apparente à du bruit duquel il ne semble pas y avoir d'information utile à exhiber. C'est pourquoi, nous suggérons de ne présenter graphiquement que le plateau de phase afin de permettre à l'utilisateur de se concentrer sur cette information. Un premier moyen consiste à modifier la luminosité ou la saturation de la couleur de la phase en fonction du logarithme de l'amplitude. Un moyen plus simple consiste à noircir le graphe là où l'amplitude

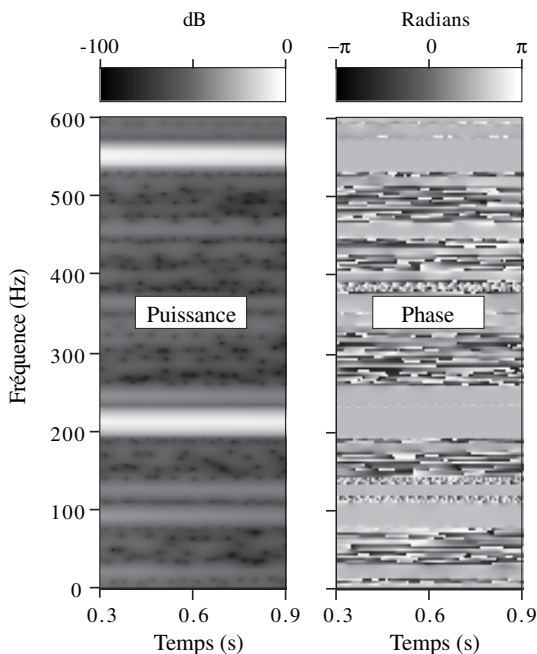


Figure 2. – Spectrogramme de puissance et spectrogramme de phase $\theta_m^\dagger(\omega)$ d'une somme de sinusoïdes amorties correspondant à la vibration libre amortie d'une poutre métallique suspendue.

est inférieure à un seuil déterminé. C'est ce dernier « gommage des vallées » qui est appliqué aux figures ultérieures.

La topologie du support d'affichage en coordonnée Z de la phase de $\theta_m^\dagger(\omega)$, c'est-à-dire à la normale du plan temps-fréquence, est une topologie fermée sur elle-même puisqu'elle doit correspondre au cercle trigonométrique. Quand on passe de la valeur $\pi - \varepsilon$ à $-\pi + \varepsilon$, la couleur ne doit pas changer lorsque $\varepsilon > 0$ puisque π et $-\pi$ correspondent à une même position. De plus, la présentation graphique en couleur exige un minimum de trois couleurs si l'on désire connaître le sens d'une progression de franges. À l'opposé, c'est seulement avec un saut subit de teinte quand on passe de $\pi - \varepsilon$ à $-\pi + \varepsilon$ que nous pouvons discerner le sens de progression dans une présentation en noir et blanc. Une modulation de grande amplitude générant plusieurs rotations dans le cercle trigonométrique affichera ainsi des franges verticales se succédant sur le plateau de phase. Soulignons qu'une présentation par une grille, une cascade ou une surface 3D donne un résultat décevant pour $\theta_m^\dagger(\omega)$ car l'amplitude en Z ne peut avoir une topologie fermée pour ces types de présentation : si l'on présente la phase entre $-\pi$ et π , il y a abondance de déchirements abrupts de la surface de phase. Par contre, on peut afficher le spectrogramme de phase déroulée $\theta_m^\dagger(\omega)$ sur une grille, une cascade ou une surface 3D. Cependant, les plateaux de phase de $\theta_m^\dagger(\omega)$ sont dissimulés par des montagnes de bruit en bordures de ceux-ci : le « gommage des vallées » s'impose alors. Le choix de présentation entre $\theta_m^\dagger(\omega)$ et $\theta_m^\dagger(\omega)$ dépend des caractéristiques de la modulation de phase du signal et de ce que l'on veut observer. La présentation selon $\theta_m^\dagger(\omega)$ donne une vue globale des modulations présentes alors que $\theta_m^\dagger(\omega)$ permet d'estimer précisément localement une modulation en comptant les franges et les fractions de frange. Il est parfois aussi utile d'ajouter un léger décalage angulaire à la valeur de phase afin de maximiser le contraste de couleur en un point désiré du spectrogramme. D'ailleurs, dans les figures de cet article, nous n'affichons pas systématiquement l'échelle en Z car celle-ci n'est pas requise pour le comptage des franges et que les valeurs affichées en Z sont des valeurs relatives auxquelles nous avons ajouté un décalage pour faciliter la visualisation.

La définition de spectrogramme de phase donnée à l'équation 13 soulève différents problèmes. La contrainte sur la distance l entre deux tranches doit être assouplie. La modulation crête à crête en fréquence est limitée à la largeur du plateau de phase de la composante. Enfin, la modulation de fréquence n'est pas affichée selon sa propre échelle de fréquence mais selon une échelle de phase. La solution que nous proposons consiste à dériver la phase pour présenter un spectrogramme de fréquence et, de ce dernier, extraire par intégration une valeur de phase qui est exempte des problèmes liés au pas de progression l .

4. le spectrogramme de fréquence

Reprenons l'exemple de la sinusoïde légèrement modulée en phase (éq. 14-15). La différence de phase

$$\theta_m(k, \omega) - \theta_{m-1}(k, \omega)|_{\omega \approx \omega_0} \cong \omega_0 \cdot lT + \phi_{(m-1)l+N/2} - \phi_{(m-2)l+N/2} \quad (19)$$

entre deux tranches consécutives a une amplitude qui correspond le plus souvent à plusieurs rotations dans le cercle trigonométrique lorsque $l \gg 1$. Or, ce nombre de rotations n'étant pas connu, nous pouvons ni réaliser le déroulement de phase dans le temps, ni réaliser un calcul de fréquence absolue basé sur la dérivée de la phase. Cependant, soulignons que la valeur de phase rapportée dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$ reste inchangée quel que soit le nombre de rotation. C'est précisément ce dernier point que nous allons exploiter dans une approche où nous disposons de la valeur de phase avec un écart de $\vartheta \cdot 2\pi$, où la valeur entière ϑ nous est inconnue.

En absence d'un déroulement temporel de la phase, l'équation 15 doit être remplacée par

$$\theta_m(k, \omega)|_{\omega \approx \omega_0} \cong \phi_0 + \phi_{(m-1)l+N/2} + \omega_0 \cdot (m-1) \cdot lT - \vartheta_m \cdot 2\pi + \arg(W(k, (\omega - \omega_m)T)), \quad (20)$$

soit la valeur de phase non déroulée de la tranche m au sommet d'une composante, là où le plateau de phase est présent. La valeur entière inconnue ϑ_m réalise l'opération modulo afin que $\theta_m(k, \omega) \in]-\pi, \pi]$. De même, en absence de déroulement de la phase, la différence de phase exprimée à l'équation 19 devient

$$\theta_m(k, \omega) - \theta_{m-1}(k, \omega)|_{\omega \approx \omega_0} \cong \left(\phi_{(m-1)l+N/2} - \phi_{(m-2)l+N/2} + \omega_0 \cdot lT - (\vartheta_m - \vartheta_{m-1}) \cdot 2\pi + \vartheta_{m,m-1} \cdot 2\pi \right), \quad (21)$$

entre deux tranches successives avec $\vartheta_{m,m-1} \in [-1, 0, 1]$ afin que $\theta_m(k, \omega) - \theta_{m-1}(k, \omega) \in]-\pi, \pi]$.

En effet, comme $\theta_m(k, \omega)$ et $\theta_{m-1}(k, \omega)$ sont tous deux un élément de $]-\pi, \pi]$, la soustraction de ceux-ci donne une variable ayant une valeur comprise entre -2π et 2π , d'où l'ajout d'une quantité $\vartheta_{m,m-1} \cdot 2\pi$ pour restreindre cette soustraction à la plage $]-\pi, \pi]$. Cette dernière quantité est connue puisque c'est l'algorithme qui la détermine, contrairement aux valeurs entières ϑ_m et ϑ_{m-1} . Cependant, ne connaissant pas les valeurs ϑ_m et ϑ_{m-1} , la valeur $\vartheta_{m,m-1}$ ne contient aucune information exploitable.

Rappelons que ces équations ne sont valables qu'au sommet de la composante et que nous avons ici une approximation plutôt

qu'une égalité aux équations 19, 20 et 21, en raison de la contribution minimale du noyau présent dans les fréquences négatives (voir éq. 7 et passage de l'équation 6 à 8).

On remarque que les termes $\arg(W(k, (\omega - \omega_m)T))$ exprimant la contribution du noyau de la fenêtre spectrale s'éliminent dans l'équation 21, comme pour le calcul de phase et tel qu'expliqué par l'équation 16. Dans le contexte de sinusoïdes modulées en amplitude et en fréquence, l'application d'une fenêtre spectrale pondère l'estimation de l'amplitude et de la fréquence, mettant plus de poids sur le milieu de la fenêtre. On notera donc que la différence exprimée à l'équation 21 concerne la fréquence localisée à mi-chemin entre le milieu de la fenêtre spectrale de la tranche m et le milieu de la tranche $m-1$. Ce dernier point devient important lorsque l'on compare un zoom sur le spectrogramme de fréquence avec le même zoom sur la puissance : les positions de sommets des composantes spectrales doivent correspondre avec les phases présentes en ces sommets.

Si l'on affiche dans le cercle trigonométrique la différence de phase issue de l'équation 21, les termes inconnus ϑ_m et ϑ_{m-1} , de même que le terme connu $\vartheta_{m,m-1}$, n'ont pas d'importance car ils déplacent la différence de phase d'un nombre entier de rotations sur le cercle. De plus, le terme $\omega_0 \cdot lT$, rapporté dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$, apparaissant comme une constante, il ne reste que le terme de différence de phase provenant de la modulation qui fera varier la position du résultat sur le cercle trigonométrique. Notons que si la différence de phase générée par la modulation de phase fait franchir la frontière $-\pi/\pi$ du cercle trigonométrique, c'est le terme $(\vartheta_m - \vartheta_{m-1}) + \vartheta_{m,m-1}$ qui absorbe le nombre de rotations correspondant pour que finalement la différence $\theta_m(k, \omega) - \theta_{m-1}(k, \omega)$ reste dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

La fréquence

$$f_m(\omega)|_{\omega \approx \omega_0} = \frac{1}{2\pi \cdot lT} (\theta_m(k, \omega) - \theta_{m-1}(k, \omega)), \quad (22)$$

obtenue à partir de la différence de phase entre deux tranches successives est indépendante de la référence k et donne, à un facteur additif près, la fréquence d'une composante spectrale pour la tranche m . Pour $l = 1$, ce facteur additif est absent alors que pour $l > 1$ nous observons un découpage de la plage de fréquence avec une superposition générée par l'enroulement autour du cercle trigonométrique. En effet, les limites de l'équation 21, insérées dans l'équation 22, donnent

$$f_m(\omega) \in \left] -\frac{1}{2lT}, \frac{1}{2lT} \right] \quad (23)$$

de sorte que nous obtenons

$$f_m(\omega)|_{\omega \approx \omega_0} = f_0 - \vartheta \cdot \frac{1}{lT} \text{ avec } \vartheta \in [0, l-1] \quad (24)$$

pour une tonalité continue au voisinage du sommet d'une composante spectrale de fréquence f_0 , là où se situe le plat de phase. Évidemment, cette superposition n'est pas pratique pour une mesure absolue de fréquence. Par contre, la compression

d'échelle agit comme un zoom puisque la sensibilité s'accroît avec la réduction de la plage donnée à l'équation 23. Par exemple, si nous affichons selon une rampe de couleur $f_m(\omega)$ pour un chirp, nous observerons $l/2$ passages de franges de 0 à $1/(2T)$ Hertz, tels qu'illustrés à la figure 3.

Remarquons que, dans un spectrogramme de puissance, la fréquence est déjà partiellement connue en raison de la position même du maximum d'amplitude. Graphiquement, nous visualisons cette fréquence à une ligne spectrale près (ou mieux s'il y a interpolation). La fréquence étant déjà grossièrement connue, nous proposons donc de réduire la plage donnée à l'équation 24 par un facteur beaucoup plus important, sans modifier le pas de progression l , afin d'obtenir un résultat affichant la fréquence dans l'intervalle entre deux lignes spectrales. Soit une composante spectrale située à la fréquence

$$\omega_0 = (i_0 + \nu_0) \cdot 2\pi/NT, \quad (25)$$

où i_0 , une valeur entière, correspond au numéro de ligne spectrale et $\nu_0 \in]-0.5, 0.5]$, une valeur fractionnaire, représente la position interligne spectrale. La fréquence relative de cette composante spectrale dans l'intervalle entre deux lignes spectrales s'écrit donc $\nu_0 \cdot 2\pi/NT$. Augmentons la sensibilité en fréquence en appliquant le facteur de gain entier P tel que

$$f_m(\omega, P) \equiv \frac{1}{2\pi \cdot lTP} \cdot P(\theta_m(k, \omega) - \theta_{m-1}(k, \omega)) \quad (26)$$

définit le spectrogramme de fréquence non déroulée où la fonction « modulo » est appliquée après le produit par le gain avec $m = 2, M$. Il est essentiel que gain P soit entier si l'on ne veut avoir aucune contribution de la part des termes $\vartheta_m, \vartheta_{m-1}$, et $\vartheta_{m,m-1}$. Une composante spectrale située à ω_0 donne alors la valeur de fréquence

$$f_m(\omega, P)|_{\omega \approx \omega_0} = \frac{1}{2\pi \cdot lTP} \cdot ((i_0 + \nu_0) \cdot 2\pi P \cdot l/N) \quad (27)$$

à la ligne spectrale i_0 et aux lignes voisines de celle-ci sur l'étendu du plateau de phase. Comme pour le spectrogramme de phase, il suffit de présenter cette dernière valeur sur une échelle de couleurs où les deux extrêmes, $-1/2lTP$ et $1/2lTP$, ont la même couleur pour voir évoluer la fréquence sans bris dans la

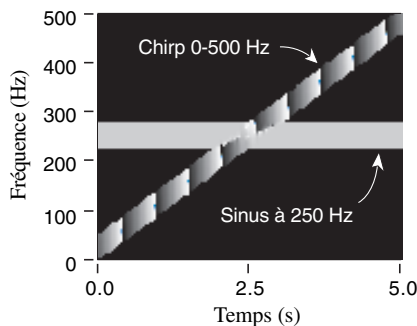


Figure 3. – Spectrogramme de fréquence d'une sinusoïde à 250 Hz additionnée d'un chirp de 50 à 500 Hz et échantillonné à 1000 éch./s. L'espacement est de 20 échantillons entre deux tranches consécutives de telle sorte que l'on retrouve 10 franges sur la pleine plage spectrale.

progression. Le gain P est alors ajusté de sorte que l'on puisse suivre cette progression de façon à pouvoir compter aisément les franges à l'écran.

Précisons qu'un gain trop élevé entraînant un passage rapide des franges mène à un sous-échantillonnage graphique lorsque la distance interfrange est plus courte que le double de la distance interpixel. Ce phénomène est similaire au repliement spectral (aliasing) et peut mener à des erreurs d'interprétation. À la figure 4, le gain P atteint 127, introduisant ainsi un sous-échantillonnage graphique sur la bande verticale située au début du transitoire. Ainsi, on observe 5 franges par 1000 Hz au lieu de 25 en raison d'une définition graphique insuffisante en pixel par Hz. Notez que ce sous-échantillonnage n'empêche pas de suivre l'évolution de la fréquence des modes de vibrations présents puisqu'ici les plateaux de phase sous les sinusoïdes correspondantes en sont exempts. Soulignons aussi que, dans cet exemple, la variation de fréquence est à peine perceptible sur le spectrogramme de puissance alors qu'il est évident et quantifiable sur le spectrogramme de fréquence. En effet, on mesure que la fréquence du premier mode varie d'une demie frange, soit de 20 Hz. De même, la fréquence du second mode varie de 1.5 frange, soit de 60 Hz. Si le gain P apparaît indispensable pour mettre en relief les faibles variations de fréquence, on retient qu'il peut survenir un sous-échantillonnage graphique.

Un cas particulièrement intéressant est celui où $P = N/l$, tel que la valeur de l au dénominateur donne une valeur entière de gain. Nous obtenons alors le spectrogramme de fréquence

$$f_m(\omega, N, /l)|_{\omega \approx \omega_0} \cong \frac{1}{2\pi \cdot NT} ((i_0 + \nu_0) \cdot 2\pi) \quad (28)$$

au voisinage du sommet de la composante spectrale. Cette dernière expression donne plus simplement

$$f_m(\omega, N/l)|_{\omega \approx \omega_0} \cong \frac{\nu_0}{NT} \quad (29)$$

en éliminant les multiples de 2π par l'application du modulo. Dans ce cas précis, un changement de fréquence d'une interligne spectrale génère une frange.

Tout comme pour la phase, le spectrogramme de fréquence peut aussi se présenter selon une fonction continue de la fréquence plutôt que par des franges. Il s'agit de dérouler la différence de phase $P(\theta_m(k, \omega) - \theta_{m-1}(k, \omega))$ dans le temps, d'une tranche à l'autre, de sorte que

$$f_m^U(\omega, P, m_r) \equiv \frac{1}{2\pi \cdot lTP} \left(\text{unwrap} \left(P(\theta_m(k, \omega) - \theta_{m-1}(k, \omega)) \right) - \text{unwrap} \left(P(\theta_{m_r}(k, \omega) - \theta_{m_r-1}(k, \omega)) \right) \right), \quad (30)$$

pour $m = 2, M$, donne le spectrogramme continu de fréquence référencé à la tranche m_r , la fonction $\text{unwrap}()$ étant explicitée à l'annexe C. Lorsque la sinusoïde émerge bien au-dessus du fond spectral sur les m tranches, il n'est pas requis de soustraire la

Spectrogramme de phase et spectrogramme de fréquence

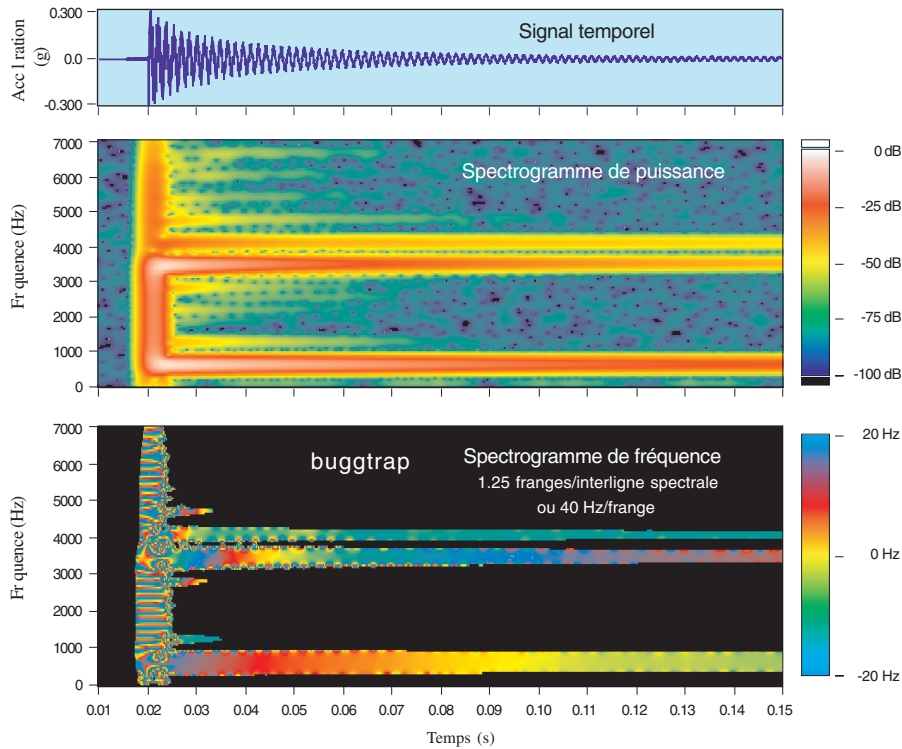


Figure 4. – Spectrogramme d'amplitude et de fréquence d'une vibration libre amortie de poutre métallique encastrée et fissurée exhibant un léger changement de fréquence. ($1/T = 25.6 \text{ kéch./s}$, $N = 512$, $l = 5$, $P = 127$)

référence : dans ce cas on considère que la référence est située à la première tranche. Par contre, en présence d'un transitoire masquant, générant (fig. 5 a) ou effaçant cette sinusoïde, un mauvais choix de référence donne une modulation inacceptable du plateau de phase selon l'axe des fréquences. La figure 5 illustre trois choix de référence m_r , le troisième choix étant le bon.

Il faut voir qu'avec le déroulement temporel de la fréquence, l'erreur est cumulative avec le temps. Une disparition ou une contamination momentanée d'une composante spectrale engendre une erreur de déroulement de phase dans la traversée de la discontinuité. Dans l'exemple donné à la figure 5, le choix de référence fixé par la position du curseur doit être à droite de l'attaque du transitoire. Sans quoi, le déroulement de la fréquence débute avec des écarts multiples de $1/(lTP)$ entre les lignes spectrales contiguës au sommet de la composante. Notons qu'en présence de plusieurs discontinuités de l'émergence d'une composante spectrale, c'est la portion entre les deux discontinuités où se situe le curseur de référence qui sera correctement affichée.

Soulignons que

$$f_m(\omega, P) = \frac{1}{2\pi \cdot lTP} 2\pi \cdot lTP \cdot f_m^U(\omega, P, m_r) \quad (31)$$

et ce, quel que soit la valeur de référence temporelle m_r . Les observations soulevées précédemment lors de la comparaison de la présentation selon $\theta_m^\dagger(\omega)$ et selon $\underline{\theta}_m^\dagger(\omega)$ valent pour

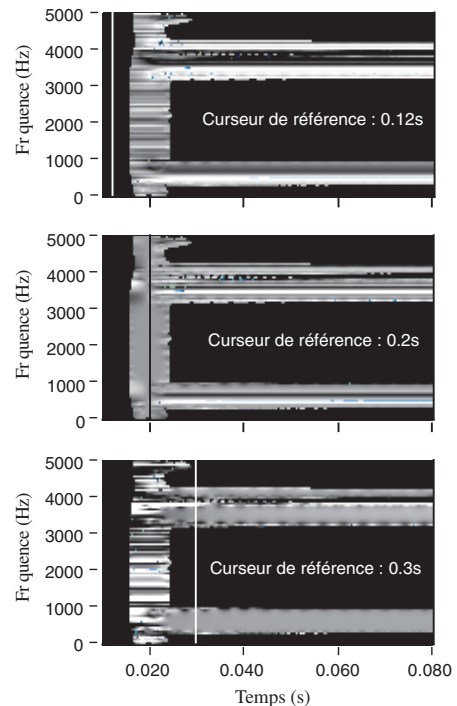


Figure 5. – Spectrogrammes de fréquence déroulée de la réponse à un impact d'une poutre encastrée et non fissurée pour trois références temporelles différentes. ($1/T = 25.6 \text{ kéch./s}$, $N = 512$, $l = 5$, $P = 512$)

la comparaison entre $f_m(\omega, P)$ et $f_m^U(\omega, P, m_r)$: c'est la nature du signal qui décide quel est le mode de présentation le plus approprié.

5. le spectrogramme de phase généralisé

Entre deux tranches successives, la différence de phase équivaut à

$$2\pi \cdot lTP \cdot f_m^U(\omega, P, m_r) + C. \quad (32)$$

Il suffit donc d'intégrer la fréquence pour obtenir la valeur de phase relative à la première tranche, à une pente de phase et une constante près. Cette pente provient de l'intégration de la constante C qui est une inconnue perdue dans le processus de calcul de fréquence. De plus, si nous remplaçons l'intégration avec une simple somme, l'expression

$$\Phi_m(\omega, P, m_r) = 2\pi \cdot lT \cdot \sum_{j=2}^m f_j^U(\omega, P, m_r)$$

avec

$$\Phi_{m=1}(\omega, P, m_r) = 0 \quad (33)$$

donne la phase déroulée à partir de la première tranche temporelle, ce qui est peu pratique. C'est pourquoi nous définissons

$$\theta_m^G(\omega, P, m_r) \equiv \Phi_m(\omega, P, m_r) - \Phi_{m_r}(\omega, P, m_r) \quad (34)$$

comme étant le spectrogramme généralisé de la phase référencée à la tranche m_r . Encore ici, nous pouvons présenter graphiquement soit $\theta_m^G(\omega, P, m_r)$ ou $\theta_m^G(\omega, P, m_r)$, tel qu'illustré à la figure 6, avec

$$\theta_m^G(\omega, P, m_r) = \text{unwrap}(\theta_m^G(\omega, P, m_r)). \quad (35)$$

En plus de la constante, nous pouvons aussi supprimer la pente de progression de phase, par exemple, si nous désirons observer une modulation de phase rapide sur une composante spectrale qui varie lentement en fréquence. La formulation

$$\underline{\theta_m^G(\omega, P)} \equiv \frac{\Phi_m(\omega, P, m_r) - \frac{m-1}{M-1}\Phi_{M-1}(\omega, P, m_r)}{M-1} \quad (36)$$

avec $m = 1, M$ force une phase nulle aux deux extrémités de la fenêtre d'observation. Elle donne ainsi pour $l \geq 1$ le même résultat que celui obtenu avec l'équation 13b pour $l = 1$, à une pente près.

6. Influence du bruit et lissage du spectrogramme de fréquence

Sur le spectrogramme de phase, comme sur le spectrogramme de fréquence, le bruit affecte la largeur du plateau visible sous le sommet d'une composante. La figure 7 présente un exemple où l'amplitude de la sinusoïde est constante alors que le bruit augmente progressivement de 20 dB à toutes les 3 secondes. C'est le rapport signal sur bruit (S/B) sous chaque ligne spectrale qui détermine la dispersion de phase sous cette ligne. Une ligne spectrale participe à la zone visible d'un plateau lorsque sa dispersion est inférieure à 15 % de la plage d'affichage. Les lignes voisines du sommet ayant un rapport S/B plus important expliquent pourquoi ce sont les dernières à être submergées par le bruit sur la figure 7.

Examinons la variance sur le plateau du spectrogramme de phase avec petit pas de progression pour un sinus de fréquence constante. Soit le sinus décrit par l'équation 3 auquel s'ajoute un bruit blanc de type gaussien et d'écart type σ_m qui peut varier lentement d'une tranche m à l'autre. La grandeur $0.5 \cdot a_0^2 / \sigma_m^2$ définit donc le rapport S/B affiché à la figure 7. L'équation 17 nous permet d'écrire

$$\text{var}(\theta_m^\dagger(\omega, m_r)) = \text{var}(\phi_{(m-1)l+N/2}), \quad (37)$$

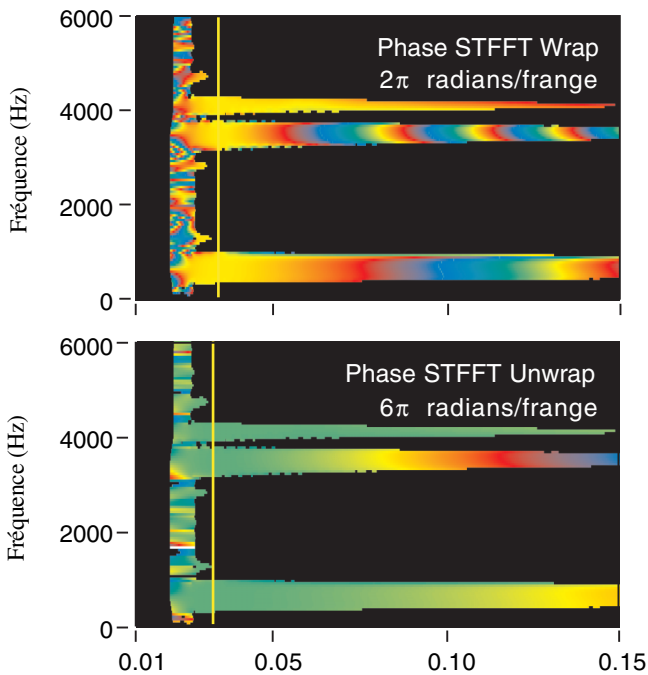


Figure 6. – Spectrogramme de phase sans et avec déroulement de la phase dans le temps pour la même mesure présentée à la figure 4. ($1/T = 25.6$ kéch./s, $N = 512$, $l = 5$, $P = 1$)

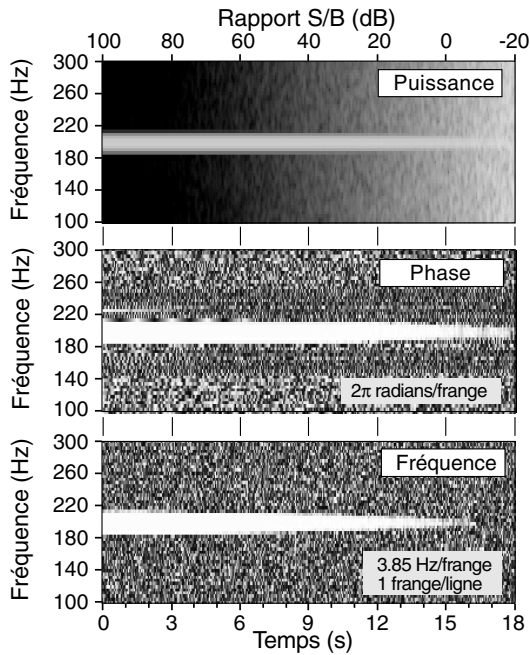


Figure 7. – Spectrogramme de puissance, de phase ($P = 1$) et de fréquence ($P = 20$) du signal $\sqrt{2} \sin(200Hz \cdot 2\pi t) + q(t) \cdot 10^{(t/3s)-5}$ échantillonné à 1000 éch./s où $q(t)$ est un bruit blanc d'écart type unitaire. ($N = 256$ éch., $l = 13$)

soit que la variance du spectrogramme de phase équivaut à la variance de la phase sous le lobe de la composante spectrale. Pour décrire la variance en fonction de la position sur le plateau de phase, à l'indice de tranche m nous ajoutons un second indice pour le numéro de ligne spectrale : $\theta_m^\dagger(\omega, m_r)$ devient $\theta_{m,j}^\dagger(\omega, m_r)$. Pour simplifier, prenons le cas d'un lobe spectral ayant son sommet qui coïncide à la ligne spectrale i tel que $\omega_0 = i \cdot 2\pi/NT$. L'amplitude d'une ligne spectrale j voisine de ce sommet équivaut à Na_0d_{i-j} , avec

$$d_{i-j} = 0,5 \cdot (1 + \delta(i-j)) \cdot c_{|i-j|} \quad (38)$$

alors que le plancher de bruit blanc est situé à $\sigma \sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} w^2(n)}$, avec les coefficients c_i et $w(n)$ définis à l'annexe A. Nous obtenons alors

$$N^2 a_0^2 d_{i-j}^2 / \sigma^2 \cdot \sum_{n=0}^{N-1} w^2(n) \quad (39)$$

comme valeur de rapport S/B sous la ligne spectrale j . Puisque

$$\sum_{n=0}^{N-1} w^2(n) = N \left(c_0^2 + 2 \sum_{i=1}^I (c_i/2)^2 \right) = N \sum_{i=-I}^I d_i^2 \quad (40)$$

la variance de la phase sous la ligne j s'écrit alors

$$\text{var}(\theta_{m,j}^\dagger(\omega, m_r)) = \frac{\sigma_m^2}{a_0^2} \cdot \frac{\sum_{i=-I}^I d_i^2}{N d_{i-j}^2} \quad (41)$$

pour la tranche m . Telle qu'illustrée à la figure 8, la variance est minimale au centre de la composante et augmente avec la distance par rapport à ce centre. Soulignons que cette variance diminue avec la largeur N de la fenêtre spectrale de la TFCT. Pratiquement, une bonne visibilité de la phase requiert un plateau large de 3 lignes spectrales, soit un sommet de lobe spectral qui émerge de plus de 20 dB du bruit (fig. 8). En effet, si l'on considère que les deux lignes latérales ont le rapport $d_1/d_0 \approx 0.6$ avec la ligne centrale et que l'écart type (ETY) équivaut à 15 % de l'échelle d'affichage, soit un ETY = 0,94 radian, nous obtenons $-20 \log(0.15 \cdot 0.6) = 21$ dB.

Notons qu'au sommet de la composante spectrale nous avons

$$\text{var}(\theta_{m,j=i}^\dagger(\omega, m_r)) = \frac{\sigma_m^2}{a_0^2 PG}$$

avec

$$PG = 1/ENBW = N \cdot d_0^2 / \sum_{i=-I}^I d_i^2, \quad (42)$$

soit la variance minimale accessible pour l'estimation de la phase [15] lorsque l'on utilise une fenêtre spectrale, où PG et $ENBW$ sont respectivement le gain du procédé et la bande de bruit équivalente [16]. Celle-ci correspond d'ailleurs à la borne Cramer-Rao

$$\text{var}(\phi) = \frac{\sigma^2}{a_0^2 N} \quad (43)$$

développée par Rife et Boorstyn pour la fenêtre rectangulaire pour laquelle $PG = 1.0$ [17].

Le spectrogramme de phase généralisé (éq. 34 ou 36) présente la même dispersion que celle exprimée à l'équation 41. En effet, les opérations de dérivée (éq. 30) et d'intégrale (éq. 33) éliminant l'effet des inconnues ϑ_m ainsi que de certaines constantes et pentes, elles ne peuvent introduire qu'un bruit multiple de 2π , ce qui n'affecte pas un affichage de la phase inscrite dans le cercle trigonométrique.

La fréquence calculée par le spectrogramme de fréquence est issue d'une soustraction de deux estimations de phase réalisées dans un intervalle de l échantillons. La variance

$$\text{var}(f_{m,j}^U(\omega, P, m_r)) = \frac{1}{4\pi^2 l^2 T^2} (\text{var}(\theta_{m,j}(k, \omega) - \theta_{m-1,j}(k, \omega))) \quad (44)$$

de la fréquence calculée sous la ligne j apparaît comme inversement proportionnelle au carré de la distance l entre deux tranches. En développant le terme de covariance entre $\theta_{m,j}(k, \omega)$ et $\theta_{m-1,j}(k, \omega)$ (voir l'annexe D), nous obtenons

$$\text{var}(f_{m,j}^U(\omega, P, m_r)) = \frac{\sigma_m^2}{2\pi^2 l^2 T^2 a_0^2} \cdot \frac{\sum_{i=-I}^I d_i^2}{N d_{i-j}^2} \left(1 - \frac{\sum_{n=0}^{N+l-1} w(n) \cdot w(n+1)}{\sum_{n=0}^{N-1} w^2(n)} \right) \quad (45)$$

lorsque $\sigma_m \approx \sigma_{m-1}$. Pour des fenêtres présentant un profil de cloche, des simulations numériques démontrent que cette dernière expression devient

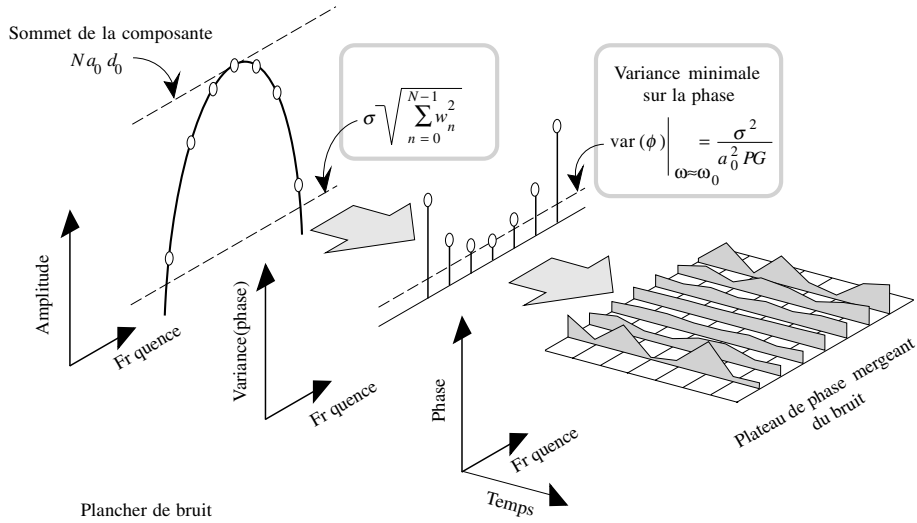


Figure 8. – Influence d'un bruit blanc sur la dispersion du plateau de phase sous le lobe d'une composante spectrale.

$$\text{var}(f_{m,j}^U(\omega, P, m_r)) \approx \frac{\sigma_m^2}{2\pi^2 l^2 T^2 a_0^2} \cdot \frac{\sum_{i=-I}^I d_i^2}{N d_{i-j}^2} \left(1 - w^2\left(\frac{N+l}{2}\right)\right) \quad (46)$$

où il est requis d'interpoler $w()$ pour les valeurs non entières avec typiquement

$$\begin{aligned} w\left(\frac{N+l}{2}\right) &\approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{l\pi}{N}\right)^2 \sum_{i=1}^I i^2 c_i \quad l \ll N \\ w\left(\frac{N+l}{2}\right) &\ll 1.0 \quad N/2 < l \leq N \quad (47) \\ w\left(\frac{N+l}{2}\right) &= 0 \quad l > N \end{aligned}$$

pour les fenêtres appartenant à la classe Rife-Vincent [18]. Soulignons que pour $l \ll N$, la variance

$$\text{var}(f_{m,j}^U(\omega, P, m_r)) \approx \frac{\sigma_m^2}{2T^2 a_0^2 N^2} \cdot \frac{\sum_{i=-I}^I d_i^2}{N d_{i-j}^2} \sum_{i=1}^I i^2 c_i \quad (48)$$

est indépendante de la distance l . La variance au sommet de la composante spectrale, là où $i = j$ et pour $l \ll N$,

$$\text{var}(f_m^U(\omega, P, m_r)) \geq \frac{\sigma_m^2}{2T^2 a_0^2 N^2 PG} \sum_{i=1}^I i^2 c_i \quad (49)$$

constitue la borne ultime pour la variance du plateau de fréquence. Précisons qu'ils existent différentes méthodes d'estimation de la fréquence d'une composante spectrale obtenue par transformée de Fourier. La méthode de recherche du sommet par interpolation de la composante spectrale (peak picking & IFFT) est l'une

des plus populaires [15,17,19,20]. Si, pour fin de comparaison, nous prenons la borne Cramer-Rao

$$\text{var}(f)_{CR} \geq \frac{3\sigma_m^2}{\pi^2 T^2 a_0^2 N(N^2 - 1)} \quad (50)$$

calculée en absence de fenêtre spectrale [17], l'équation 49 affiche une variance dix fois plus importante lorsque les c_i définissent une fenêtre de Blackman-Harris à 4 termes. D'une part, l'application d'une fenêtre spectrale augmente la variance ultime accessible, et, d'autre part, la variance obtenue avec la recherche du sommet est fonction du moyen employé pour cette recherche. Notre propre algorithme de recherche du sommet donne

$$\text{var}(f) \geq \frac{9\sigma^2}{\pi^2 T^2 a_0^2 N^2 \cdot PG} \quad (51)$$

comme borne évaluée empiriquement à partir de simulations avec la même fenêtre. Or, la borne énoncée à l'équation 49 est à peine au-dessus de cette dernière borne (typiquement 50 % plus élevée). Rappelons que, pour un signal harmonique composé d'une somme de sinusoïdes, l'usage d'une fenêtre spectrale est indispensable pour isoler une sinusoïde des autres sinusoïdes dans la recherche du sommet et pour séparer les plateaux dans le spectrogramme de fréquence. En conclusion, le spectrogramme de fréquence livre une valeur de fréquence ayant une dispersion comparable à la méthode de recherche du sommet lorsque la distance l est petite. Il est normal que cette variance diminue avec l'accroissement de la distance l pour $l > N/2$ (voir éq. 46-47) puisque l'on augmente alors significativement le nombre d'échantillons participant à l'estimation.

On ne peut augmenter la distance l sans s'exposer à deux problèmes. Le premier est celui de suivre l'évolution temporelle d'un

phénomène qui varie en fréquence, et ce, avec un pas lT bien plus petit que la plus courte période de fluctuation de la fréquence. Le second problème est d'ordre d'affichage : les fenêtres successives de la TFCT doivent avoir un facteur de recouvrement, ou de superposition, donnant l'illusion d'une continuité du spectrogramme. Habituellement, le recouvrement oscille entre 60 et 95 %.

Pour minimiser ces problèmes, dans l'implantation de l'algorithme, nous avons introduit la possibilité de réaliser un lissage du spectrogramme de fréquence afin de réduire la variance et ainsi faire émerger un peu plus le plateau. Le lissage répartit le gain entier P selon une distribution approximativement gaussienne de plus petit poids P_i de sorte que

$$P = \sum_{i=1}^{N_p} P_i \quad (52)$$

avec les P_i entiers. Le terme $P(\theta_m(k, \omega) - \theta_{m-1}(k, \omega))$ dans les équations 26 et 30 est alors remplacé par

$$\sum_{i=1}^{N_p} P_i (\theta_{m+i}(k, \omega) - \theta_{m+i-1}(k, \omega)) \quad (53)$$

pondérant ainsi le calcul de dérivé de la phase. L'avantage de cette pondération est que nous réalisons un lissage avec une distribution de profil gaussien, alors qu'augmenter la distance l revient à réaliser un lissage avec un créneau où $P_i = P/N_p$.

Si la distance l et la distribution P_i influencent la variance du spectrogramme de fréquence, ils n'ont pas cette influence sur le spectrogramme de phase. Sur ce dernier, la distance l affecte la définition graphique selon l'axe du temps alors que le poids P restreint la phase à l'intervalle $]-\pi/P, \pi/P]$, superposant inutilement la distribution des valeurs de phase.

7. exemples numériques et comportement de l'algorithme

La figure 9 présente le spectrogramme de phase d'une sinusoïde modulée en phase de $\pm\pi$ radians. Comme le gain P est fixé à 1.0, donnant ainsi une résolution de 2π radians/frange, on observe une modulation d'une frange crête à crête. On constate que le patron est constitué de franges quasi verticales distribuées horizontalement. Le patron couvre l'ensemble du plateau de phase du noyau. Le spectrogramme de fréquence du même signal donne un résultat comparable dans des unités de fréquence, soit un patron horizontal de franges verticales.

L'utilité du spectrogramme de phase (ou de fréquence) repose en partie sur la distinction entre la modulation d'amplitude et la modulation de phase (ou de fréquence). En effet, si nous désirons quantifier indépendamment chaque modulation sur un signal inconnu, il est important que les patrons de franges diffèrent.

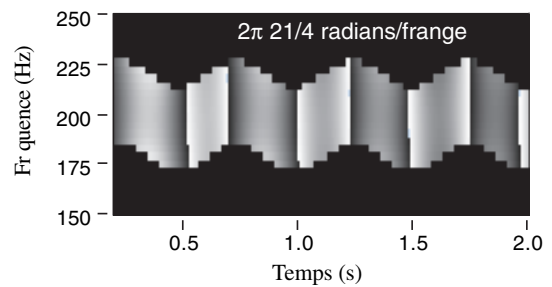


Figure 9. – Spectrogramme de phase d'une sinusoïde soumise à une modulation de phase de $\pm\pi$ radians, soit le signal $\cos(2\pi \cdot 200\text{Hz} \cdot t + \pi \cdot \cos(2\pi \cdot 2\text{Hz} \cdot t))$ avec $1/T = 1000$ éch/s, $N = 256$ éch. après ajout de 128 zéros pour interpolation, $l = 5$, $P = 1$.

Le spectrogramme de phase d'une sinusoïde modulée en amplitude avec un taux de 100 %, soit le signal $(1 + \cos(2\pi \cdot 2\text{Hz} \cdot t)) \cdot \cos(2\pi \cdot 2.222\text{kHz} \cdot t)$, affiche un patron vertical de franges horizontales tel qu'illustré sur la figure 10. Nous observons le même patron pour un spectrogramme de fréquence. À première vue, il semble bien que les modulations d'amplitude et de phase présentent des patrons dissemblables. Cependant, la figure 10 reprise avec une échelle cent fois plus sensible affiche une déviation alternée d'environ 0.03 radian avec une crête présente à chaque noeud de la modulation, là où l'amplitude est nulle. De même, toujours pour cette modulation d'amplitude, nous constatons aussi la présence de franges verticales sur le spectrogramme de fréquence lorsque nous portons la sensibilité à une résolution de 1Hz/frange. En effet, sur la figure 11, on mesure sans peine une déviation de plus d'une frange (1 Hz) entre le ventre et le noeud de la sinusoïde modulée. Exprimée en ligne spectrale, une variation d'un Hertz représente ici une déviation de 1/40^{ème} de ligne spectrale. Rapportée sur les 128 lignes présentes, la déviation relative ici est supérieure à 1 dans 5000, soit de l'ordre de 70 dB. Cette déviation apparaît deux fois moindre pour une modulation de 50 % (non illustrée ici).

L'interpolation spectrale apporte une autre image de ce comportement. Cette interpolation est réalisée par un ajout de zéros de part et d'autre de la fenêtre spectrale. La figure 12 démontre que les franges générées par la modulation d'amplitude sont pincées là où apparaît le noeud dans l'enveloppe d'amplitude : ces franges ont donc une composante verticale plus ou moins prononcée en fonction de la distance au noeud le plus proche. Une ligne spectrale située au voisinage de la fréquence de la porteuse se voit traversée par ces franges à moins d'être exactement au centre du patron. L'interpolation permet d'afficher une ligne spectrale plus proche de la fréquence de la porteuse et de minimiser ainsi la dérive horizontale observée avec une modulation d'amplitude. Par exemple, sur la figure 12 du côté droit, on constate que la ligne spectrale centrale à 2222 Hz affiche une déviation moins prononcée entre les deux noeuds que celle affichée par la figure 11 pour une même résolution en Hz/frange.

Il y a aussi la durée d'observation qui n'est pas assez courte, présentant une amplitude inégale dans la fenêtre spectrale avant

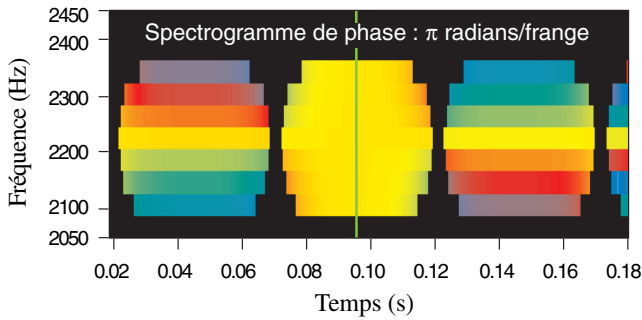


Figure 10. – Spectrogrammes de phase pour un taux de modulation d'amplitude de 100 %. ($1/T = 10\text{Kéch./s}$, $N = 256$, $l = 3$, $P = 1$).

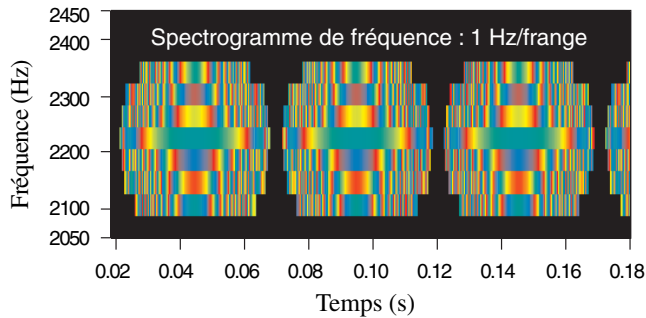


Figure 11. – Spectrogrammes de fréquence pour un taux de modulation d'amplitude de 100 %, avec un gain important donnant ici une résolution de 1Hz/frange. ($1/T = 10\text{Kéch./s}$, $N = 256$, $l = 3$, $P = 3340$).

TRF. Évidemment, raccourcir cette fenêtre d'observation réduit la résolution spectrale. La racine du problème est que la transformée de Fourier sous entend un modèle où les sinusoïdes sont d'amplitudes et de tonalités continues, ce qui est de moins en moins le cas si l'on allonge la durée d'observation. Pour des modulations serrées, nous utilisons la transformée en vers temps-fréquence, un outil plus difficile d'emploi qui a pour modèle des sinusoïdes modulées avec sept degrés de liberté [21,22], permettant ainsi d'améliorer la distinction entre les deux types de modulation (disponible sur le site ftp.ireq.ca/pub/T-F_worms/).

En résumé, on doit retenir qu'une modulation horizontale de franges verticales ne correspond pas uniquement à une modulation de phase ou de fréquence : la modulation d'amplitude crée aussi un patron de franges pouvant être confondu avec une modulation de fréquence ou une modulation de phase. L'amplitude de ce patron est heureusement faible et peut être atténuée par l'interpolation spectrale, permettant ainsi l'utilisation de ces outils basés sur une simple transformée de Fourier. Il s'agit seulement d'être prudent dans notre analyse en présence de modulations importantes sur l'amplitude.

L'interprétation de spectrogrammes de phase ou de fréquence requiert un nouveau bagage de connaissances relatif aux différentes réponses de l'algorithme. Nous donnons ici un exemple de comportement de l'algorithme lorsque deux sinusoïdes de mêmes amplitudes sont rapprochées. Évidemment, ces sinusoïdes peuvent aussi être perçues comme une seule sinusoïde modulée en ampli-

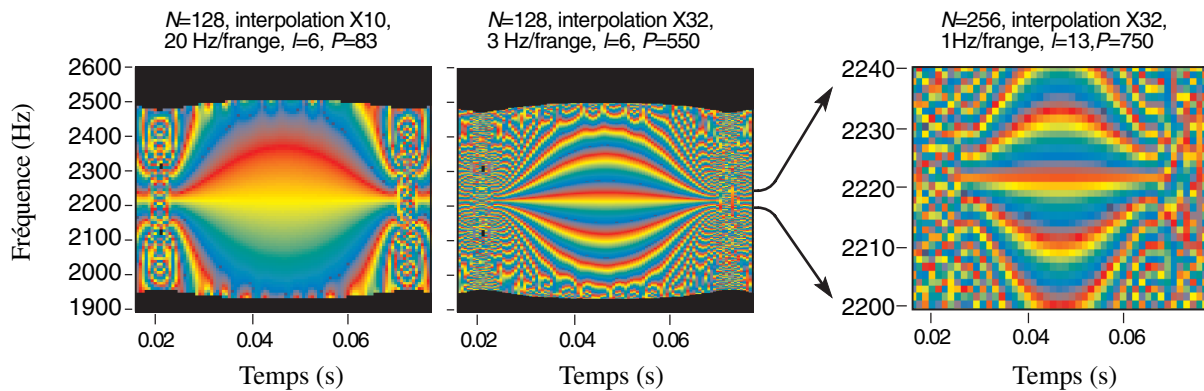


Figure 12. – Spectrogrammes de fréquence pour un taux de modulation d'amplitude de 100 %, avec interpolation spectrale.

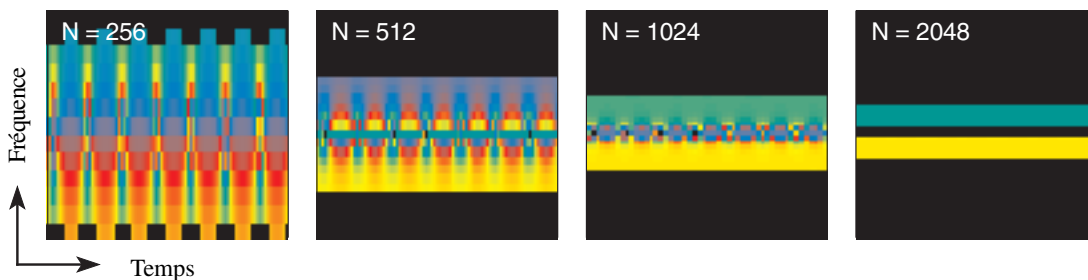


Figure 13. – Spectrogramme de fréquence d'une sinusoïde modulée en amplitude ou de deux sinusoïdes rapprochées et de même amplitude, pour différentes largeurs de fenêtre spectrale.

tude. L'objectif ici, est de percevoir comment évolue l'interférence entre ces sinusoïdes et quelle forme ou patron prend cette interférence.

La figure 13 illustre ce qui survient lorsque l'on varie la largeur de la fenêtre spectrale pour le signal $\cos(2\pi \cdot 1\text{Hz} \cdot t) + \cos(2\pi \cdot 1,1\text{kHz} \cdot t)$ échantillonné à 10 kéch./s. Lorsque la fenêtre est trop étroite pour discriminer les deux sinusoïdes ($N = 256$), nous obtenons un patron correspondant à celui d'une sinusoïde modulée en amplitude. À l'opposé, lorsqu'il y a discrimination avec séparation des composantes spectrales ($N = 2048$), nous obtenons un patron distinct pour chaque sinusoïde. Les deux figures intermédiaires permettent de juger de la transition entre ces états.

Enfin, le croisement de sinusoïdes présenté à la figure 3 illustre bien la zone d'interférence entre deux sinusoïdes qui se croisent dans le plan temps-fréquence. On y observe que la zone d'interférence n'y est pas plus étendue que dans un spectrogramme de puissance : il y a interférence là où les lobes principaux des composantes spectrales sont confondus.

8. exemples d'applications

Les possibilités d'application des spectrogrammes de phase et de fréquence apparaissent réduites en regard de celles du spectrogramme de puissance. En effet, ces premiers apparaissent plus vulnérables au bruit et à l'interférence. Ce n'est pas tant l'information de phase qui est vulnérable mais bien notre capacité d'interprétation qui est limitée par la complication du patron de frange. L'obtention d'un patron de franges simple et clair exige un meilleur rapport signal à bruit et des sinusoïdes détachées sans interférences. Malgré ces dernières contraintes, nous sommes confiants que les domaines d'applications restent nombreux. Nous nous restreindrons ici à décrire quatre applications que nous avons exploitées dans le cadre de nos activités.

Ce sont nos recherches sur la détection de fissures qui ont abouti à la création de ces nouveaux outils. La diminution de la fréquence et l'augmentation de l'amortissement avec l'accroissement de la section d'une fissure est bien connue [23-25]. Cependant, pour réaliser un diagnostic nous devons disposer d'une mesure de la structure non fissurée, ce qui pose un problème pratique dans l'application de cette approche. Par contre, sans disposer de la signature préalable de l'objet sain, si nous comparons avec elle-même la réponse libre de la structure suite à un impact, nous observons qu'elle dérive très légèrement en fréquence avec la diminution de l'amplitude de vibration. Par exemple, la figure 4 présente les spectrogrammes d'amplitude et de fréquence de la vibration libre, suite à un choc mécanique, d'une poutre métallique encastrée et fissurée à 28 % de sa section. On y observe un léger accroissement de la fréquence avec

la réduction de l'amplitude. Cette augmentation s'explique par une fissure qui dans l'instant qui suit l'excitation alterne d'ouverte à fermée, alors que peu à peu l'amplitude de vibration devient insuffisante, face aux forces statiques de fermeture, pour ouvrir la fissure. Or, le carré de la fréquence modale est proportionnel à la rigidité moyenne, cette dernière étant plus élevée pour plusieurs modes lorsque la fissure reste fermée. Afin de démontrer que ce glissement de fréquence s'accroît avec la profondeur de la fissure, la figure 14 exhibe la variation de fréquence du premier mode de flexion de poutres métalliques encastrées pour différentes sections de la fissure dans le plan de l'encastrement. Ici, un seul coup d'oeil suffit pour diagnostiquer la présence d'une fissure et en estimer la profondeur. Nous envisageons donc d'utiliser le spectrogramme de fréquence dans la détection de fines fissures dans des structures métalliques simples [26].

L'onde sonore, contrairement à la lumière, ne voyage pas à la même vitesse quel que soit l'observateur puisqu'elle est entraînée par son milieu de propagation. Par exemple, le vent peut accélérer ou ralentir la propagation d'une onde sonore modifiant ainsi le délai entre l'émission et la réception : nous sommes en présence d'une modulation de phase. À cette modulation, il s'ajoute une faible modulation d'amplitude qui est difficilement observable sur un spectrogramme de puissance. Encore ici, le spectrogramme de fréquence apparaît comme un outil pertinent pour visualiser et quantifier le phénomène physique tel qu'illustré à la figure 15. Sur cette figure, nous présentons la vibration

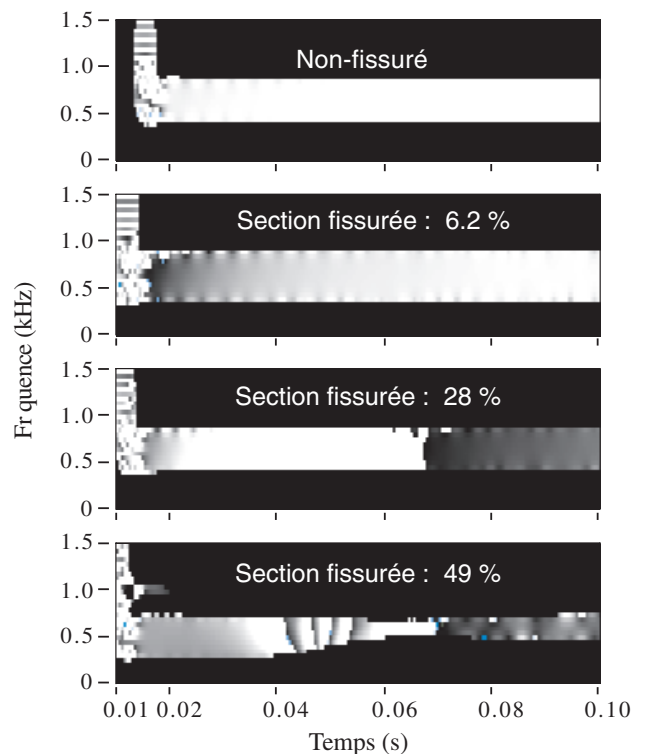


Figure 14. – Spectrogrammes de fréquence (20 Hz/frange) du signal d'accélération de la réponse à un choc mécanique pour quatre éprouvettes métalliques encastrées. ($1/T = 25.6\text{Kéch./s}$, $N = 512$, $l = 5$, $P = 256$)

d'un des modes dominants d'une jupe de porcelaine d'isolateur de haute tension situé dans un poste de distribution. C'est le choc d'une bille métallique qui a excité les modes de jupes. La distorsion de l'onde correspond ici à des fluctuations de vitesse du vent d'environ 1 m/s entre la source et la mesure. Ce phénomène, absent des mesures en laboratoire, nous a forcé à réviser les algorithmes mis au point en laboratoire pour la détection d'isolateurs fissurés.

Dans le domaine du diagnostic de vibration, parfois nous devons trouver si les pulsations intermittentes observées sur un spectrogramme sont issues d'un mode excité aléatoirement ou si elles proviennent d'une excitation lointaine, de fréquence stable, qui est transmise par bouffées. Or, pour le second cas, le spectrogramme de phase démontre une cohérence de la phase d'une pulsation à l'autre, telle qu'illustrée autour du curseur déterminant la position de m_r à la figure 16.

Enfin, nous avons développé des applications en bicanal [27] qui permettent d'observer l'évolution temporelle d'une relation en

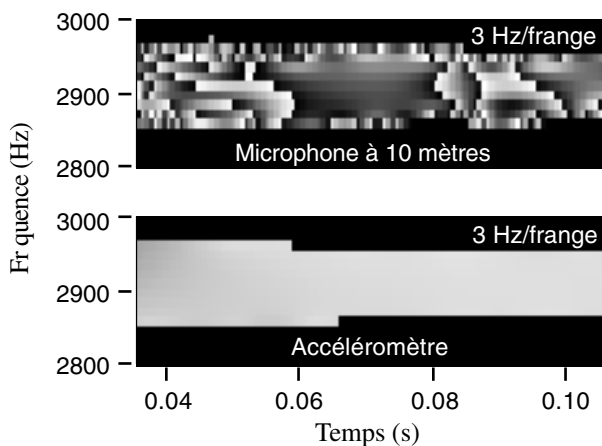


Figure 15. – Spectrogramme de fréquence d'un signal acoustique mesuré à distance par un microphone (haut) et sur la source d'émission par un accéléromètre (bas).

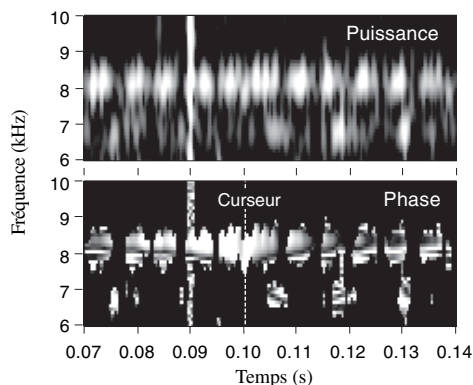


Figure 16. – Spectrogramme de puissance et spectrogramme de phase (2π radians/frange) d'une vibration enregistrée dans la cabine de pilotage d'un avion. Cette mesure est une gracieuseté de René Archambault IMS. ($1/T = 24K \text{ éch.}/s$, $N = 128$, $l = 3$, $P = 1$)

fréquence ou en phase d'objets temps-fréquence provenant de différents canaux ou mesures. Sans entrer dans le détail, mentionnons que, pour le bicanal sur la phase, un déroulement de la phase dans le temps sur chaque canal doit nécessairement avoir lieu avant soustraction de ceux-ci, sans quoi, il y a perte d'information amenant une ambiguïté dans l'interprétation des sauts de phase. Les outils actuels d'analyse modale ne permettent pas de s'attaquer à des modes de fréquence variables. Par contre, le spectrogramme bicanal de phase permet d'afficher la relation de phase entre deux signaux sans égard aux fluctuations de la fréquence, pourvu que celles-ci ne bougent pas plus de 3 lignes spectrales.

9. conclusion

La méthode proposée se résume à effectuer un alignement de la phase à la verticale, selon l'axe des fréquences dans le plan temps-fréquence, pour ensuite réaliser un déroulement de la phase à l'horizontale, selon l'axe du temps. La dérivée de la phase à l'horizontale donne le spectrogramme de fréquence alors que l'intégrale de cette dérivée donne le spectrogramme généralisé de phase. L'affichage est limité aux valeurs de phase ou de fréquence calculées sous des lobes spectraux qui correspondent à des sinusoïdes d'amplitudes significatives, la valeur de phase n'étant pas exploitée ailleurs que sous ces lobes. La transformation en analyseur temps-fréquence bicanal est simple puisqu'il s'agit de réaliser la différence entre deux spectrogrammes de la phase déroulée ou entre deux spectrogrammes de fréquence. Nous pensons avoir trouvé un moyen pratique de présenter l'information de phase d'un signal comportant plusieurs sinusoïdes. Longtemps ignorée au profit de la présentation de la puissance spectrale dans le plan temps-fréquence, l'information de phase d'une TFCT pourra désormais prendre sa place et occuper des niches d'application qui lui seront propres.

10. annexes

10.1. annexe A

10.1.1. noyau d'une fenêtre spectrale et plat de phase

Abordons le cas commun d'une fenêtre spectrale décrite comme une somme de cosinus telle que définie par la classe de Rife-Vincent [18]. Cette définition englobe les fenêtres de Hamming, Hanning, Blackman et de Blackman-Harris [16]. Soit

$$w(x) = c_0 + \sum_{i=1}^I c_i \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{X} \cdot i \cdot x\right),$$

avec

$$x \in [-X/2, X/2[, I \leq N/2 \text{ et } \sum_{i=1}^I c_i = 1.0, \quad (\text{A.1})$$

cette fenêtre spectrale, de périodicité X et répétée à l'infini. Pour $x \in [0, x]$, cette dernière équation devient

$$w(x) = c_0 + \sum_{i=1}^I (-1)^i c_i \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{X} \cdot i \cdot x\right) \quad (\text{A.2})$$

correspondant ainsi au domaine d'échantillonnage de la TDF

$$x_i = nT \text{ avec } n \in \{0, \dots, N-1\} \quad (\text{A.3})$$

où $X = NT$. Notons que cette dernière fenêtre est centrée sur la position $n = N/2$ au lieu de $(N-1)/2$ pour la fenêtre rectangulaire. En effet, cette classe de fenêtre spectrale est symétrique de part et d'autre de la position $n = N/2$ avec 1.0 pour valeur maximale atteinte par l'échantillon situé au droit de $n = N/2$. Si nous répétons cette dernière fenêtre sur une période X , nous pouvons écrire

$$W(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^I (-1)^i c_i \cdot \left(\delta\left(\omega + \frac{2\pi}{X} \cdot i\right) + \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{X} \cdot i\right) \right) \quad (\text{A.4})$$

comme transformée de Fourier de l'équation A.2. Appliquer un échantillonnage fini équivaut, dans le domaine des fréquences, à convoluer A.4 avec le noyau de Dirichlet [28]

$$D(l, \omega T) = \exp\left(-j \frac{N-1}{2} \omega T + j l \omega T\right) \frac{\sin\left(\frac{N}{2} \omega T\right)}{\sin\left(\frac{1}{2} \omega T\right)}, \omega \cdot T \in]-\pi, \pi], \quad (\text{A.5})$$

correspondant à la TDF de la fenêtre rectangulaire référencée à la position l . Si nous fixons $l = 1/2$ pour afin de tenir compte de la position de symétrie de la fenêtre et que nous ajoutons le produit $\exp(jk\omega T)$ afin de positionner la référence de phase par rapport à k , nous obtenons le noyau

$$W(k, \omega T) = \exp(jk\omega T) \frac{1}{2} \sum_{i=0}^I (-1)^i c_i \cdot \left(D\left(\frac{1}{2}, \omega T + 2\pi \cdot i/N\right) + D\left(\frac{1}{2}, \omega T - 2\pi \cdot i/N\right) \right) \quad (\text{A.6})$$

qui correspond à une somme de noyaux de Dirichlet. Cette dernière équation devient

$$W(k, \omega T) = \exp\left(j\omega T \left(k - \frac{N}{2}\right)\right) \cdot \frac{1}{2} \sum_{i=0}^I c_i \cdot \left(D\left(\frac{N-1}{2}, \omega T + 2\pi \cdot i/N\right) + D\left(\frac{N-1}{2}, \omega T - 2\pi \cdot i/N\right) \right) \quad (\text{A.7})$$

après quelques manipulations. Conséquemment, le noyau $W(k, \omega T)$ est une exponentielle complexe multipliée par une somme en phase de sinc() puisque

$$D\left(\frac{1}{2}, \omega T + 2\pi \cdot i/N\right) = \frac{\sin\left(\frac{N}{2} \omega T\right)}{\sin\left(\frac{1}{2} \omega T\right)} \quad (\text{A.8})$$

et que les coefficients c_i sont positifs. Pour $k = 0$, l'exponentielle complexe donne une alternance de signes sous le lobe principal telle qu'illustrée à la figure A. À l'opposé, lorsque la phase est référencée au milieu de la fenêtre spectrale telle que $k = (N-1)/2$, nous obtenons $1 + 2(I-1)$ noyaux de Dirichlet joints côte à côte. Dans ce dernier cas, un plateau de phase est présent sur près de $1 + 2(I-1)$ lignes spectrales sous le lobe principal. Par exemple, la fenêtre de Blackman-Harris à 3-termes exhibe un plateau de phase sur 5 lignes spectrales.

Finalement, au voisinage du sommet d'un lobe spectral, nous pouvons écrire

$$\arg\{W(N/2, \omega_0 T + 2\pi \cdot \Delta/N)\} \cong \arg\{W(N/2, \omega_0 T)\}, \quad \text{avec } \Delta \in [-I, I], \quad (\text{A.9})$$

soit que la phase du noyau est constante sur quelques lignes spectrales au sommet de la composante.

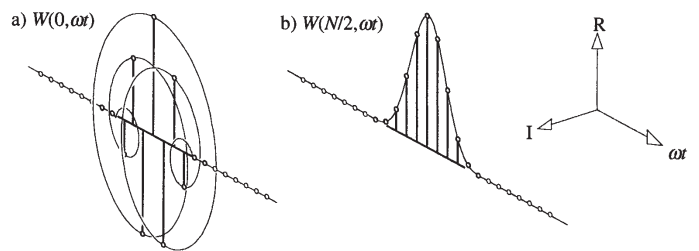


Figure A. – Référencer la phase au début d'une fenêtre spectrale de la classe de Rife-Vincent crée une alternance de signes sous le lobe principal du noyau (a), alors que, référencer cette phase au milieu de la fenêtre donne une valeur de phase continue (b).

10.2. annexe B

10.2.1. la différence entre deux noyaux est indépendante de la position de la référence de phase

Développons la différence :

$\arg(W(k, (\omega - \omega_m)T)) - \arg(W(k, (\omega - \omega_l)T))$ entre deux noyaux telle que :

$$\begin{aligned} \arg(W(k, (\omega - \omega_m)T)) - \arg(W(k, (\omega - \omega_l)T)) = \\ \arg(W(k - d_k, (\omega - \omega_m)T)e^{jd_k\omega T}) \\ - \arg(W(k - d_k, (\omega - \omega_l)T)e^{jd_k\omega T}) \quad (\text{B.1}) \end{aligned}$$

avec d_k un déplacement quelconque de la position de référence de phase. Extrayons les exponentielles complexes des arguments tel que

$$\begin{aligned} \arg(W(k, (\omega - \omega_m)T)) - \arg(W(k, (\omega - \omega_l)T)) = \\ \arg(W(k - d_k, (\omega - \omega_m)T) + \arg(e^{jd_k\omega T}) \\ - \arg(W(k - d_k, (\omega - \omega_l)T) - \arg(e^{jd_k\omega T}) \quad (\text{B.2}) \end{aligned}$$

pour finalement obtenir

$$\begin{aligned} \arg(W(k, (\omega - \omega_m)T)) - \arg(W(k, (\omega - \omega_l)T)) = \\ \arg(W(k - d_k, (\omega - \omega_m)T) - \arg(W(k - d_k, (\omega - \omega_l)T) \quad (\text{B.3}) \end{aligned}$$

après soustraction des arguments de celle-ci.

Le résultat d'une différence entre deux noyaux ayant la même position de référence de phase est donc indépendant de cette position de référence de phase.

10.3. annexe C

10.3.1. algorithme de déroulement de la phase dans le temps

La phase $\theta_m(k, \omega)$ est déroulée à partir de la valeur de phase $\theta_m(k, \omega)$ issue habituellement de la fonction trigonométrique $\text{atan2}(*, *)$ appliquée sur le résultat de la TFCT telle que

$$\theta_m(k, \omega) = \text{atan2}(\text{Re}(S_m(k, \omega)), \text{Im}(S_m(k, \omega))). \quad (\text{C.1})$$

Rappelons que cette dernière fonction livre une valeur de phase dans les 4 quadrants du cercle trigonométrique défini sur l'intervalle $]-\pi, +\pi]$. Précisons que le terme « dérouler » provient du terme « unwrap » communément employé dans la langue anglaise. Il faut voir la phase comme étant enroulée sur le cercle trigonométrique et projetée dans le plan du cercle, on connaît la position de la phase sur le cercle mais pas le nombre de rotation. Dérouler la phase équivaut à trouver ce nombre de rotation et cette action se fait progressivement en parcourant le cercle trigonométrique tour après tour.

Prenons x_m comme variable discrète décrivant la distribution de phase que l'on désire dérouler. Que la phase soit déroulée selon

le temps, selon la fréquence ou selon toute autre dimension n'a pas d'importance pourvu que l'échantillonnage de la phase d'origine x_m donne en tout point une distance moindre que π radians entre deux échantillons consécutifs selon la dimension choisie.

L'algorithme est récursif et débute usuellement avec le premier échantillon, quoiqu'il serait possible de débiter arbitrairement de n'importe quel échantillon. Dans ce dernier cas, on progresse alors dans les deux directions, respectivement selon les indices croissants et selon les indices décroissants. Une forme simple d'algorithme de déroulement de phase débutant avec le premier échantillon consiste à écrire

$$x_m^* = \underline{x}_m + \vartheta_m \cdot 2\pi \text{ avec } \vartheta_m \in \mathbb{Z}, \quad (\text{C.2})$$

où ϑ_m correspond au nombre de rotations ou spires cumulées dans le cercle trigonométrique. Le nombre entier ϑ_m est établi récursivement tel que

$$\vartheta_m = \begin{cases} \vartheta_{m-1} & \text{pour } -\pi < \theta_m(k, \omega) - \theta_{m-1}(k, \omega) \leq \pi \\ 1 + \vartheta_{m-1} & \text{pour } \theta_m(k, \omega) - \theta_{m-1}(k, \omega) \leq -\pi \\ \vartheta_{m-1} - 1 & \text{pour } \pi < \theta_m(k, \omega) - \theta_{m-1}(k, \omega) \end{cases}$$

et $\vartheta_1 = 0$, (C.3)

soit que tout écart de phase d'une amplitude excédant π est attribuable au franchissement de la frontière $-\pi/\pi$ du cercle trigonométrique. Si la condition d'échantillonnage de la phase est respectée alors $x_m^* = x_m$. Pour simplifier, on écrit

$$x_m = \text{unwrap}(x_m) \quad (\text{C.4})$$

pour exprimer le déroulement de la distribution de phase x_m .

10.4. annexe D

10.4.1. détail de calcul de la variance du spectrogramme de fréquence

Des équations 40 et 41 nous déduisons que

$$\text{var}(\theta_{m,j}^\dagger(\omega, m_r)) = \frac{\sigma_m^2}{a_0^2 N^2 d_{i-j}^2} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} w^2(n) \quad (\text{D.1})$$

suggérant que la variance a pour origine une somme pondérée de N réalisations x_n tel que

$$\text{var}(\theta_{m,j}^\dagger(\omega, m_r)) = \frac{1}{a_0^2 N^2 d_{i-j}^2} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} (x_n - \overline{x_n})^2 w^2(n) \quad (\text{D.2})$$

où $\overline{x_n}$ est la moyenne des x_n et que $\text{var}(x_n) = \sigma_m^2$. Notons que pour N grand et $w(n) \in \mathcal{R}$, statistiquement

$$\sigma_m^2 \sum_{n=0}^{N-1} w^2(n) \cong \sum_{n=0}^{N-1} (x_n - \overline{x_n})^2 w^2(n) \quad (\text{D.3})$$

en autant que x_n et $w(n)$ ne soient pas corrélés. De même,

$$\sigma_m^2 \sum_{n=0}^{N-1} (w(n) - w(n+l))^2 \cong \sum_{n=0}^{N-1} (x_n - \bar{x}_n)^2 (w(n) - w(n+l))^2, \quad (D.4)$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} \text{var}(\theta_{m,j}(k, \omega) - \theta_{m-1,j}(k, \omega)) &= \frac{\sigma_m^2}{a_0^2 N^2 d_{i-j}^2} \cdot \sum_{n=0}^{N+l-1} (w(n) - w(n+l))^2 \\ &= \frac{\sigma_m^2}{a_0^2 N^2 d_{i-j}^2} \cdot \left(\sum_{n=0}^{N+l-1} w(n)^2 + \sum_{n=0}^{N+l-1} w(n+l)^2 \right. \\ &\quad \left. - 2 \sum_{n=0}^{N+l-1} w(n)w(n+l) \right), \quad (D.5) \end{aligned}$$

soit que la variance de la différence équivaut à la somme des variances moins le double de la covariance. Cette dernière équation insérée dans (44) donne finalement

$$\begin{aligned} \text{var}(f_{m,j}^U(\omega, P, m_r)) &= \frac{\sigma_m^2}{2\pi^2 l^2 T^2 a_0^2} \cdot \frac{\sum_{i=-I}^I d_i^2}{N d_{i-j}^2} \\ &\quad \left(1 - \frac{\sum_{n=0}^{N+l-1} w(n) \cdot w(n+l)}{\sum_{n=0}^{N-1} w^2(n)} \right) \quad (D.7) \end{aligned}$$

après quelques manipulations.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. Gabor, « Theory of communication », *J. IEE*, Vol. 93, No. 3, p. 429-457, 1946.
 [2] J. Ville, « Théorie et applications de la notion de signal analytique », *Cables & Transmission*, Vol. 2 A, No. 1, p. 61-74, 1948.
 [3] L. Cohen, « Time-Frequency Distribution - A Review », *Proc. IEEE*, Vol. 77, No. 7, p. 941-981, 1989.
 [4] F. Auger, P. Flandrin, « Improving the readability of time-frequency and time-scale representations by using the reassignment method », *IEEE Trans. on Signal Proc.*, Vol. 43, No.5, p 1068-1089, 1995.
 [5] K. Kodera, R. Gendrin, C. de Villedary, « Analysis of Time-Varying Signals with Small BT Values », *IEEE Trans. ASSP*, Vol. 26, No.1, p 64-76, 1978.
 [6] P. Flandrin, « Time-Frequency and Time-Scale », *Spectrum Estimation and Modeling*, Fourth Annual ASSP Workshop on Published:1988, p. 77-80, 1988.

[7] L. Cohen, *Time-Frequency analysis*, Prentice Hall Signal Processing Series, 1995.
 [8] M. Slaney, D. Naar, R. F. Lyon, « Auditory Model Inversion for Sound Separation », *IEEE Int. Conf. ICASSP-94*, Vol. 2, p. 77-80, 1994.
 [9] F. Léonard, « Referencing the phase to the center of the spectral window. Why? », *Mechanical System and Signal Processing*, Vol. 11, No.1, p 75-90, 1997.
 [10] A. V. Oppenheim, R. W. Schaffer, *Digital Signal Processing*, Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1975.
 [11] J.M. Tribolet, « A new phase unwrapping algorithm », *IEEE Transaction on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Vol. 25, No. 2, avril 1977.
 [12] B. Bhanu, J.H. McClellan, « On the computation of the complex cepstrum », *IEEE Transaction on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Vol. 28, p. 583-585, 1980.
 [13] R. McGowan, R. Kuc, « A direct relation between a signal time series and its unwrapped phase », *IEEE Transaction on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Vol. 30, p. 719-726, 1982.
 [14] H. Nashi, « Phase unwrapping of digital signals », *IEEE Transaction on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Vol. 37, No. 11, p. 1693-1702, 1989.
 [15] C. Offelli, D. Petri, « The Influence of Windowing on the Accuracy of Multifrequency Signal Parameter Estimation », *IEEE Trans. on Inst. and Meas.*, Vol. 41, No. 2, p. 256-261, 1992.
 [16] F.J. Harris, « On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform », *Proc. of IEEE*, Vol. 66, No. 1, p. 51-83, 1978.
 [17] C. Rife, R. Boorstyn, « Single-tone Parameter Estimation from Discrete-time Observations », *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 20, No. 5, p. 591-598, 1974.
 [18] D.C. Rife, G.A. Vincent, « Use of the Discrete Fourier Transform in the measurement of frequencies and levels of tones », *B.S.T.J.*, Vol. 49, No. 2, p. 197-228, 1970.
 [19] J. Schoukens, R. Pintelon and H. Van hamme, « The Interpolated Fast Fourier Transform: A Comparative Study », *IEEE Trans. on Inst. and Meas.*, Vol. 41, No. 2, p. 226-232, 1992.
 [20] S. Holm, « Optimum FFT-Based Frequency Acquisition with Application to COSPAS-SARSAT », *IEEE Trans. On Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 29, No. 2, p. 464-475, April 1993.
 [21] F. Léonard, « Les vers temps-fréquence », rapport interne Hydro-Québec, IREQ-96-281, novembre 1996.
 [22] F. Léonard, « La transformée en objets et les vers temps-fréquence », Troisième conférence internationale sur les méthodes de surveillance et techniques de diagnostic acoustiques et vibratoires, tenue au CETIM de Senlis, France, octobre 1998.
 [23] J.M.M. Silva and A.J.M.A. Gomes, « Crack identification of simple structural elements through the use of natural frequency variation », *Proc. of the 12th Int. Modal Analysis Conference*, p. 1728-1735, 1994.
 [24] K. Klein, J.Y. Guigné and A.S.J. Swamidas, « Monitoring change in modal parameters with fatigue », *Pro. of the 12th Int.Modal Analysis Conference*, p. 1792-1800, 1994.
 [25] D. Armon, Y Ben-Hain and S. Braun, « Crack detection in beams by rankordering of eigenfrequency shifts », *Mechanical System and Signal Processing*, Vol. 8, No. 1, p 81-91, 1994.
 [26] F. Léonard, J. Lanteigne, S. Lalonde, and Y.Turcotte, « Vibration behavior of a cracked cantilever beam », 18th Int. Modal Analysis Conf., San Antonio, Texas, février 2000.
 [27] F. Léonard, « Spectrogramme de phase et spectrogramme de fréquence », rapport interne Hydro-Québec, IREQ-98-178, novembre 1998.
 [28] C. Lanczos, *Discourse on Fourier Series*, Hafner Publishing Co., NY, Chapter 1, p. 29-30, 1966