

# Reconnaissance de phénomènes dynamiques par arbres de représentation minimaux : application à la quantification des sténoses coronariennes

---

## Recognition of dynamic phenomena by minimum spanning trees: application to the quantification of the coronary stenosis

---

par Patrick FRANCO, Pierre LOONIS, Michel MÉNARD

Laboratoire d'Informatique et d'Imagerie Industrielle, UPRES EA 2118, Pôle Sciences et Technologies, Université de la Rochelle, Avenue Michel Crépeau, 17042 La Rochelle Cedex 01  
patrick.franco,pierre.loonis, michel.menard@univ-lr.fr

### *résumé et mots clés*

Dans cet article nous traitons de la reconnaissance de phénomènes dynamiques. Ce problème est particulièrement difficile lorsque les variables caractérisant les phénomènes en question sont expérimentalement inaccessibles. Le cadre des systèmes dynamiques fournit alors des solutions pour reconstruire la dynamique de ces variables et par conséquent modéliser ces phénomènes. La méthode de reconstruction employée est la méthode des retards guidée par le test de W. Liebert, K. Pawelzik, H.G. Schuster. Pour comparer les dynamiques, désormais reconstruites, nous préconisons l'utilisation d'arbres de représentation minimaux. La longueur d'un tel arbre, définie sur une dynamique, peut être vue comme une mesure invariante de cette dernière. La différenciation des dynamiques repose alors sur un paramètre global qui permet de s'affranchir des perturbations locales susceptibles de polluer les dynamiques. Cette solution est appliquée à la discrimination des écoulements sanguins. Le résultat joue le rôle de facteur d'identification d'une sténose coronarienne.

Systèmes dynamiques, reconstruction de trajectoires, méthode des retards, comparaison de trajectoires, arbres de représentation minimaux, hémodynamique, quantification d'une sténose.

*abstract and key words*

In this this article we speak about the recognition of dynamic phenomena. This problem is particularly difficult when the variables characterizing the phenomena are experimentally inaccessible. The dynamic systems framework provides solutions to rebuild the dynamics of these variables and consequently to model these phenomena. The reconstruction method is the delays method guided by the W. Liebert, K. Pawelzik, H.G. Schuster's test. To compare the dynamic we propose the use of minimal spanning tree. The length of such tree can be seen like an invariant measurement of the dynamic. The differentiation of dynamic rests on a global parameter which makes it possible to be freed from the local disturbances. This solution is applied to the discrimination of blood flows. The result is a factor of identification of a coronary stenosis.

Dynamic systems, state space reconstruction, delays method, trajectories comparison, minimum spanning tree, hemodynamic, stenosis quantification.

# 1. introduction

Nous nous intéressons au phénomène complexe et non linéaire de l'écoulement du sang dans une artère coronaire partiellement obstruée. Nous proposons de modéliser cette obstruction par l'adjonction d'un modèle géométrique de sténose sélectionné parmi une liste de modèles *a priori* (base de modèles).

Nous partons du principe que toute déformation – du volume interne de l'artère – conduit à une modification de l'écoulement aval en terme de vitesse et de pression. L'état de ces variables le long de la section artérielle et leurs évolutions au cours du temps constituent la signature hémodynamique d'une sténose. Nous émettons l'hypothèse que toute signature peut être approchée par celle d'un modèle synthétique, axis-symétrique et de sévérité paramétrée. En comparant la signature hémodynamique provenant d'une sténose inconnue avec les signatures relatives à plusieurs modèles connus nous devrions être capables de sélectionner le modèle à associer à la sténose.

L'idée que chaque sténose définit une signature hémodynamique n'est pas simplement intuitive, elle est justifiée en mécanique des fluides par l'équation de continuité [7, 30] (dont on fournit une interprétation). Mais attention ce lien théorique sténose-signature est assez pauvre puisque seule la vitesse et la section artérielle (sténosée) sont reliées (par cette équation) et pas la morphologie complète de la sténose (ni la pression). La conséquence est que la seule observation des variables vitesse et pression en région post-sténotique ne permet pas de « remonter » à la morphologie de la sténose d'où l'intérêt de faire appel à des modèles de sténoses *a priori*.

Le problème consiste à comparer une collection d'écoulements calculés en aval des modèles de sténoses, avec un écoulement mesuré en aval d'une sténose réelle inconnue. Le résultat de cette comparaison permet d'identifier le modèle qui engendre l'écoulement le plus proche de l'écoulement mesuré. Par extension, on attribue à la sténose inconnue le modèle sélectionné.

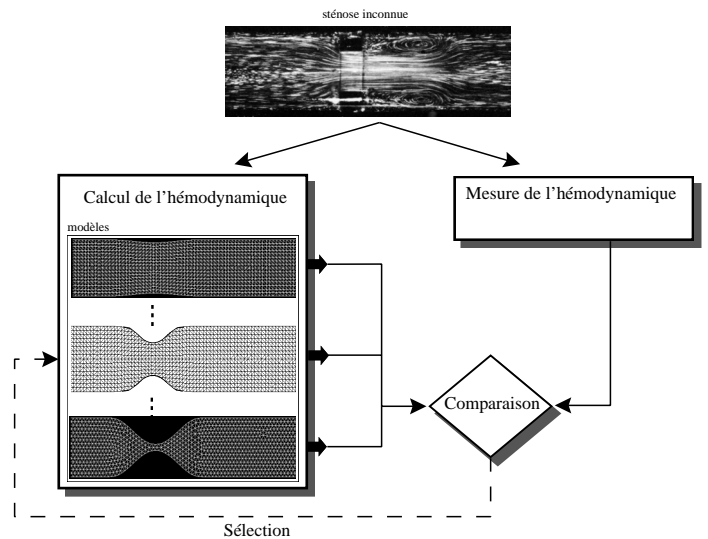


Figure 1. – Modélisation d'une sténose : architecture.

La difficulté est que seule la variable vitesse est mesurable, la variable pression reste inobservable expérimentalement<sup>1</sup>. La conséquence est que l'on accède qu'une partie seulement de la dynamique de l'écoulement. L'idée de reconstruire la dynamique inhérente à la variable pression est séduisante car elle permettrait d'accéder à la totalité de la dimension du problème et pourrait contribuer à prendre une meilleure décision. La technique de reconstruction employée est la méthode des retards qui est performante aussi bien dans le cas de systèmes à comportements chaotiques que de systèmes purement non linéaires.

Comparer les écoulements revient alors à comparer les dynamiques reconstruites. L'option choisie est l'utilisation d'arbres de représentation minimaux (Minimum Spanning Tree) notés ARM. La particularité de ces arbres est que leur longueur est une mesure invariante de la dynamique sur laquelle ils sont construits. Dans le cadre de la reconnaissance des formes (RdF),

1. À notre connaissance, aucun capteur ne peut à l'heure actuelle mesurer le champ scalaire de pression le long d'une section artérielle.

la comparaison des dynamiques se résume (en première approximation) à la comparaison des longueurs d'arbres. Cette solution est évaluée dans une expérience. Les résultats sont analysés et des tentatives d'interprétations sont élaborées.

## 2. reconstruction de la trajectoire d'un système

### 2.1. représentation de la trajectoire d'un système dans l'espace des états

L'évolution d'un système dynamique  $s$ , non linéaire, peut être modélisée dans l'espace des états par :

– une équation d'évolution (« équation d'état ») :

$$\underline{Y}_{n+1} = F(\underline{Y}_n) + b_e \quad (1)$$

– une équation d'observation :

$$x_n = G(\underline{Y}_n) + b_o \quad (2)$$

$\underline{Y}_n$ , le vecteur d'état du système à la date  $n$  qui a pour composante les  $d$  variables d'état correspondant aux  $d$  degrés de libertés du système,

$F$ , une fonction vectorielle de  $R^d \rightarrow R^d$  – non linéaire dans le cas général – décrivant l'évolution dynamique du système ( $\underline{Y}_{n+1}$ ).

$b_e$ , le bruit d'état, qui influe sur l'évolution de la dynamique du système. En effet, l'état à la date  $n + 1$  dépend non seulement de l'état précédent ( $n$ ) mais également de la valeur de  $b_e$  à cette date. Le bruit d'état modélise des bruits physiques tel que le bruit thermique par exemple. La présence du bruit d'état caractérise un système stochastique.

$G$ , une fonction de  $R^d \rightarrow R$  traduisant l'observation du vecteur d'état.

$b_o$ , un bruit d'observation lié à la méthode de mesure. Nous pouvons noter qu'il s'agit d'une perturbation additive qui ne modifie que l'observation que l'on peut avoir du système et n'intervient nullement dans l'évolution ultérieure de la dynamique de ce dernier.

Les  $N$  états recensés au cours d'une durée d'observation fixée, définissent la trajectoire  $\mathcal{E}$  du système  $s$  :

$$\mathcal{E} = \{\underline{Y}_1, \underline{Y}_2, \dots, \underline{Y}_N\} \quad (3)$$

### 2.2. quand la totalité de la dynamique du système n'est plus accessible...

La définition des systèmes dynamiques implique la détermination d'un vecteur d'état ainsi que l'ensemble de ses réalisations, pour que la trajectoire du système soit décrite.

Deux possibilités peuvent se présenter :

- le cas idéal où l'ensemble des variables (correspondant chacune à un degré de liberté) nécessaires pour décrire le système est connu. Pour un espace d'état de dimension  $d$ , il faut disposer des  $d$  séries temporelles correspondant à  $d$  mesures (observations) différentes indépendantes.
- le cas plus réaliste – très fréquent pour des données expérimentales – où une seule variable du système est observable. De plus  $F$  et  $G$  sont *a priori* inconnues mais supposées suffisamment régulières (*i.e.* dérivables et inversibles). C'est l'hypothèse de travail que nous retenons. La trajectoire décrivant l'évolution de la dynamique doit alors être reconstruite à partir de cette unique série temporelle échantillonnée  $\{x_n\}$ .

### 2.3. reconstruction de la trajectoire par la méthode dite « des retards »

Dans cette section nous abordons la reconstruction de la trajectoire d'un système déterministe. Nous émettons l'hypothèse que le bruit d'état peut être négligé par conséquent le seul bruit pris en compte est le bruit d'observation. Nous pouvons noter qu'en présence d'un bruit d'état la méthode de reconstruction dite « des retards » reste valide tant que la trajectoire observée n'est pas conduite par le bruit à l'extérieur du bassin d'attraction, Shadowing Lemme [23].

N. Packard [2], D. Ruelle [20], et F. Takens [26] ont apporté une contribution importante dans la théorie des systèmes dynamiques en démontrant qu'il est possible de construire une trajectoire qui est dans un certain sens équivalente à l'originale. D'un point de vue topologique, la trajectoire reconstruite conserve les invariants géométriques (tels que la dimension d'un attracteur, les exposants de Lyapunov *etc*) qui caractérise le système réel. D'un point de vue dynamique, la trajectoire reconstruite est équivalente – à une transformation difféomorphe<sup>2</sup> inconnue près – à la trajectoire originale. La méthode des retards a pour but de construire une telle trajectoire.

À titre d'exemple, le lien entre trajectoire réelle et reconstruite peut être visualisé sur la figure 2. Cette dernière illustre la reconstruction de la trajectoire pour le système de Rössler<sup>3</sup> à partir de l'observation de sa première composante.

2. Application bijective, continue et dérivable.

3. Le système de Rössler [19] est défini par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - z \\ \frac{dy}{dt} = -x + ay \\ \frac{dz}{dt} = b + xz - cz \end{cases}$$

Les paramètres utilisés sont :  $a = 0.15$ ,  $b = 0.2$ ,  $c = 10$ .

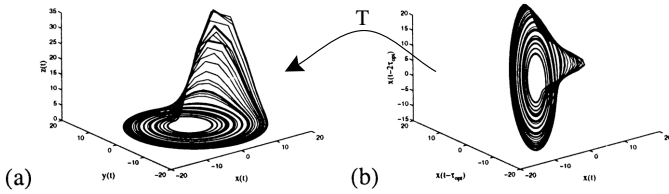


Figure 2. – Lien entre trajectoire réelle (a) et trajectoire reconstruite (b) pour le système de Rössler : transformation difféomorphique (inconnue)  $T$ .

F. Takens [27] montre que la trajectoire reconstruite possède de telles propriétés sous deux conditions :

1. La première est une condition suffisante (non nécessaire) traitant de la dimension de reconstruction  $d$  :

$$d \geq 2.D + 1 \quad (4)$$

avec  $D$ , dimension topologique de l'attracteur.

2. La deuxième condition est nécessaire dans le cas des séries temporelles à durées limitées et concerne le retard de reconstruction  $\tau$  :

$$\tau = i.\delta \quad (5)$$

avec  $\delta$ , un retard élémentaire égal à la période d'échantillonnage de la série observée.

Reconstruire la trajectoire du système  $s$ , c'est construire les vecteurs  $\underline{X}_n$  à partir de la série temporelle échantillonnée  $\{x_n\}_{n \in [1, \dots, \theta]}$  :

$$\underline{X}_n = [x_n \ x_{n-\tau} \ x_{n-2\tau} \ \dots \ x_{n-(d-1)\tau}]^t$$

$\underline{X}_n$  est le vecteur d'état à la date  $n$  reconstruit par la méthode des retards.

Pour une série de longueur  $\theta$  on construit  $N = \theta - (d-1)\tau$  vecteurs qui définissent la trajectoire reconstruite pour le système  $s$  :

$$\mathcal{E} = \{\underline{X}_1, \underline{X}_2, \dots, \underline{X}_{n=N}\}$$

Les paramètres  $d$  et  $\tau$  conditionnent la validité (topologique et dynamique) de  $\mathcal{E}$ . Dans la section suivante nous discutons de leur estimation.

#### 2.4. détermination conjointe de $d$ et $\tau$ : test de W. Liebert, K. Pawelzik, H.G. Schuster

Le test de Liebert, Pawelzik, Schuster [22] estime le couple de paramètres  $(\hat{d}, \hat{\tau})$  optimal pour la reconstruction d'une trajectoire par la méthode des retards.

C'est une approche géométrique qui opère sur la dynamique reconstruite. Elle exploite le postulat suivant lequel une dynamique correctement reconstruite est une application topologique (*i.e.* continue, inversible et bijective) qui possède la propriété dite de « conservation des voisinages ». Cette propriété signifie que les points (les états) qui constituent un voisinage en dimension  $d$ , définissent le même voisinage en dimension  $d + 1$ . La technique de LPS scrute, itérativement pour divers couples  $(d, \tau)$  si la dynamique reconstruite vérifie cette propriété.

$$(\hat{d}, \hat{\tau}) = \underset{W}{\operatorname{Argmin}} \left\{ \frac{1}{\tau} \ln E \left[ \prod_{k=1}^L \frac{\operatorname{dist}_{d+1}^\tau(i, j(k, d)) \cdot \operatorname{dist}_d^\tau(i, j(k, d+1))}{\operatorname{dist}_{d+1}^\tau(i, j(k, d+1)) \cdot \operatorname{dist}_d^\tau(i, j(k, d))} \right]^{\frac{1}{2L}} \right\} \quad (6)$$

avec :

- $E$ , espérance mathématique,
- $\operatorname{dist}_m^\tau(i, j(k, n))$ , distance calculée en dimension  $m$  du  $k$ -ième plus proche voisin en dimension  $n$ ,
- $L$ , le nombre de voisins considérés.

Le critère de W. Liebert quantifie la conservation des distances de voisinages lorsque la dimension de reconstruction augmente d'une unité. La division par  $\tau$ , permet de tolérer les problèmes de dépendance linéaires observés pour de faible valeur du retard [1].

### 2.5. conclusion

En pratique, il est rare de disposer de l'ensemble des variables d'état d'un système. Bien souvent, une seule variable d'état est observable. Nous verrons que c'est le cas dans notre application. La méthode des retards a pour but d'estimer (reconstruire) la trajectoire du système, à partir de cette unique série temporelle. Cette méthode nécessite la détermination de deux paramètres, la dimension de reconstruction  $d$  et le retard  $\tau$ .

Le choix de  $d$  et  $\tau$  est important car il conditionne la validité de la reconstruction et garanti que toute analyse du système effectuée sur la trajectoire reconstruite est fiable. Dans l'application qui suit (section 4), le critère retenu pour le choix de  $d$  et  $\tau$  est le test de W. Liebert, K. Pawelzik, H.G. Schuster.

## 3. comparaison des trajectoires de deux systèmes : proposition

Après la reconstruction d'une trajectoire, bien souvent l'étape suivante est la comparaison de trajectoires issues de systèmes distincts. Une méthode classique consiste à comparer deux à

deux, date à date, les états constituant chacune des trajectoires. Cette technique est rapide mais possède l'inconvénient d'être sensible aux perturbations locales qui peuvent affecter les trajectoires. Notre hypothèse est qu'il est plus robuste d'effectuer une comparaison globale de la trajectoire qu'une comparaison terme à terme dans le sens où l'on s'abstient des perturbations locales.

Dans le cadre de la reconnaissance des formes (RdF), nous proposons de comparer deux trajectoires à l'aide d'arbres de représentation minimaux (Minimum Spanning Tree) notés ARM. Un état est considéré comme un point à  $d$  dimension, et une trajectoire comme une forme, au sens de la RdF, évoluant en  $R^d$ . En RdF, cet arbre peut mesurer la distance qui sépare deux formes.

### 3.1. définition d'un arbre de représentation minimal

Un arbre de représentation minimal (ARM) définit sur une distribution de points de  $R^d$   $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$  est un arbre  $T$  :

- *totalemment connecté* : tout les points de  $X$  sont connectés.
- *non orienté* : il n'y a pas de sens de parcours des arcs  $e_{i,j}$  reliant les points.
- *acyclique* : l'arbre ne décrit pas de cycle ou de boucle ce qui a pour conséquence que deux points quelconques sont reliés par un chemin unique.
- *pondéré* : les longueurs des arcs  $e_{i,j}$  sont pondérées.

$T$  est donc une liste de sommets (les points  $x_i$ ) et de connections  $e_{i,j}$  entre ces sommets. La longueur totale d'ordre  $\gamma$  de l'arbre est la somme des longueurs (norme euclidienne) pondérées en loi de puissance d'ordre  $\gamma \in ]0, d[$  :

$$L_\gamma = \sum_{e_{i,j} \in T} \|e_{i,j}\|^\gamma \quad (7)$$

Le terme *minimal* signifie que parmi tous les arbres acycliques totalement connectés qu'il est possible de construire, l'ARM est celui dont la longueur est minimale :

$$T^* = \underset{T}{\text{Argmin}} L_\gamma \quad (8)$$

Les algorithmes de Kruskal et de Prim [15, 6] résolvent le problème de la construction d'un tel arbre unique si les distances sont différentes. Ces arbres ont été proposés pour résoudre plusieurs problèmes de classification fondés sur le découpage des arêtes de l'arbre afin de faire apparaître des classes, comme étant des zones denses d'arêtes [21].

### 3.2. un exemple d'application

Le calcul des ARM ainsi que le calcul de leur longueur ont été effectués grâce à des programmes développés sous Matlab par O. Michel et A. Hero suivant l'algorithme proposé dans [9,8].

Nous remercions les auteurs pour la mise à disposition gracieuse de ces programmes.

Soit  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$  deux trajectoires (formes) de  $N = 20$  points à  $d = 2$  dimensions.  $\mathcal{E}_1$  la trajectoire référence et  $\mathcal{E}_2$  la trajectoire test. Le problème consiste à comparer  $\mathcal{E}_2$  à  $\mathcal{E}_1$ .

$\mathcal{E}_1 = \{\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_N\}$  est défini à partir des réalisations du processus (déterministe) :

$$\underline{X}_n = (\sin(n.\delta); \cos(n.\delta)) \text{ pour } n = \{1, 2, \dots, 20\} \text{ et } \delta = \frac{2\pi}{20}$$

$n$ , le numéro d'échantillon,

$\delta$ , le pas d'échantillonnage temporel.

$\mathcal{E}_2 = \{\underline{Y}_1, \dots, \underline{Y}_N\}$  est défini à partir du même processus à l'amplitude  $A$  près :

$$\underline{Y}_n = (A.\sin(n.\delta); A.\cos(n.\delta)) \text{ pour } n = u\{1, 2, \dots, 20\} \text{ et } \delta = \frac{2\pi}{20}$$

Pour comparer  $\mathcal{E}_2$  à  $\mathcal{E}_1$  on propose l'algorithme suivant :

**Données :**  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \gamma$

**début**

Construire un ARM sur la trajectoire (forme) référence  $\mathcal{E}_1$ , soit  $L_1$  sa longueur (d'ordre  $\gamma$ ).

Définir  $\mathcal{E}_{12}$  la distribution résultante de l'union entre les trajectoires référence et test :

$$\mathcal{E}_{12} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 = \{\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_N, \underline{Y}_1, \dots, \underline{Y}_N\}$$

Construire un ARM sur  $\mathcal{E}_{12}$ , soit  $L_{12}$  sa longueur (d'ordre  $\gamma$ ).

Comparaison de  $\mathcal{E}_2$  à  $\mathcal{E}_1$  :

$$L_{12} \approx L_1 \implies \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1$$

**fin**

**Algorithme 1. – Comparaison de deux trajectoires par des arbres de représentation minimaux (ARM).**

Cet algorithme est testé à travers deux cas, le premier correspond à la situation où  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$  sont différentes ( $A = 2$ ) et le deuxième à la situation où  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$  sont identiques ( $A = 1$ ).

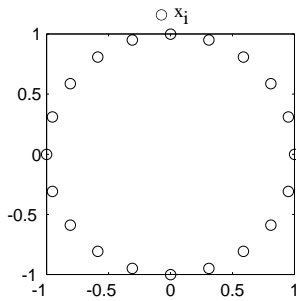


Figure 3. – Trajectoire référence  $\mathcal{E}_1$

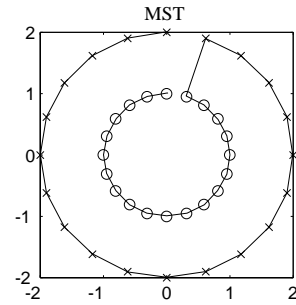


Figure 4. – ARM construit sur  $\mathcal{E}_1 : \gamma = 1, L_1 = 5.944$

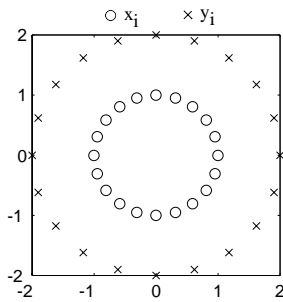


Figure 5. – Trajectoire dite de mélange  $\mathcal{E}_{12}$  : cas  $\mathcal{E}_2 \neq \mathcal{E}_1$

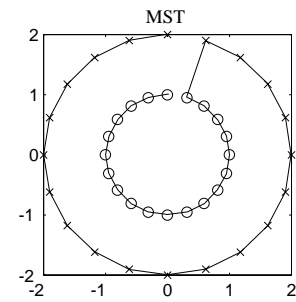


Figure 6. – ARM construit sur  $\mathcal{E}_{12} : \gamma = 1, L_{12} = 18.333$

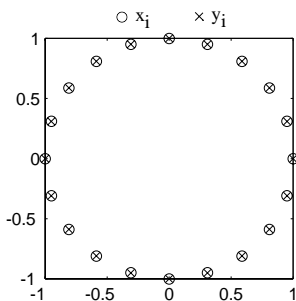


Figure 7. – Trajectoire dite de mélange  $\mathcal{E}_{12}$  : cas  $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1$

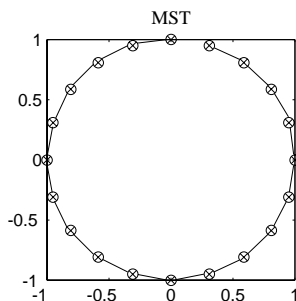


Figure 8. – ARM construit sur  $\mathcal{E}_{12} : \gamma = 1, L_{12} = 5.944$

Les figures 3 et 4 présentent respectivement la trajectoire référence  $\mathcal{E}_1$  et l'ARM ( $\gamma = 1$ , norme euclidienne) construit sur cette dernière.

Les figures 5 et 6 présentent respectivement, dans le cas où  $\mathcal{E}_2 \neq \mathcal{E}_1$ , la trajectoire dite de mélange  $\mathcal{E}_{12}$  et l'ARM construit sur cette dernière.

Les figures 7 et 8 présentent respectivement, dans le cas où  $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1$ , la trajectoire mélange  $\mathcal{E}_{12}$  et l'ARM construit sur cette dernière.

Le critère s'appuyant sur le mélange des trajectoires à comparer exploite le principe que les réalisations (les états  $\underline{X}_k, \underline{Y}_k$ ) de deux trajectoires topologiquement identiques se superposent (cf. figure 7). L'ARM construit sur l'une est alors identique à l'ARM défini sur l'union des deux trajectoires (cf. figures 4, 8). Par voie de conséquence ces arbres possèdent les mêmes longueurs.

Cette stratégie est également utilisée par Bing Ma et A. Hero pour le recalage d'images IRM du cerveau prises selon des angles différents [11]. Les auteurs recherchent la matrice de transformation géométrique (translation et rotation) qui minimise la différence des longueurs d'arbres (les images étant préalablement plongées dans l'espace des paramètres).

Nous retiendrons que le mélange des trajectoires est un moyen d'intégrer la situation où deux trajectoires topologiquement différentes présenteraient les mêmes longueurs d'arbres. Dans cette situation, un critère de comparaison basé uniquement sur les longueurs (des ARM) propres à chacune des trajectoires conclurait de façon erronée à leur égalité. Par contre si  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$  ont la même moyenne et le même écart-type alors on obtient une invariance par rapport à la translation et l'homothétie. Cette solution est évaluée dans l'application.

## 4. application

Cette section traite de la discrimination des écoulements coronariens (puis par extension des sténoses). Le problème consiste à comparer une collection d'écoulements numériques (calculés en aval de plusieurs modèles de sténoses  $\{S_k\}$  par résolution du modèle de Navier-Stokes) à un écoulement expérimental référence (mesuré en aval d'une sténose réelle inconnue  $S$  par un Doppler). D'un point de vue théorique, l'hémodynamique est caractérisée par deux variables, la vitesse et la pression. Ces deux variables sont facilement estimées par calcul numérique. Par contre, seule la vitesse est mesurée par le Doppler, la variable pression restant inaccessible expérimentalement.

Dans un premier temps, on étudie le phénomène écoulement de façon à montrer l'importance de la variable pression. Nous simulons l'écoulement coronarien sur dix cycles cardiaques, et observons dans l'espace des états  $2D$ , les trajectoires des variables vitesse et pression. Ces signatures d'états, aussi bien en amont

qu'en aval d'une sténose, sont conformes aux types d'écoulements prédits par les lois de mécanique des fluides. Ce constat nous permet d'aborder l'écoulement numérique/expérimental en une série de systèmes à deux degrés de libertés (vitesse, pression) dont un seul est supposé observable (la vitesse).

La deuxième section, traite de la reconstruction des trajectoires des systèmes qui composent l'écoulement numérique/expérimental. Cette opération permet de définir complètement ces systèmes et par conséquent devrait permettre de mieux différencier les écoulements. La reconstruction des trajectoires de chaque système est effectuée par la méthode des retards (cf. section 2.3). L'estimation de la dimension et du retard de reconstruction optimum est guidée par le critère de LPS (cf. section 2.4).

Finalement, comparer un écoulement numérique candidat à l'écoulement expérimental référence, revient à comparer les trajectoires (reconstruites) associés aux systèmes qui composent ces écoulements. Dans la quatrième section, on teste la solution mettant en œuvre la longueur de l'arbre de représentation minimum (cf. section 3). Toutes ces étapes sont synthétisées dans la figure 9.

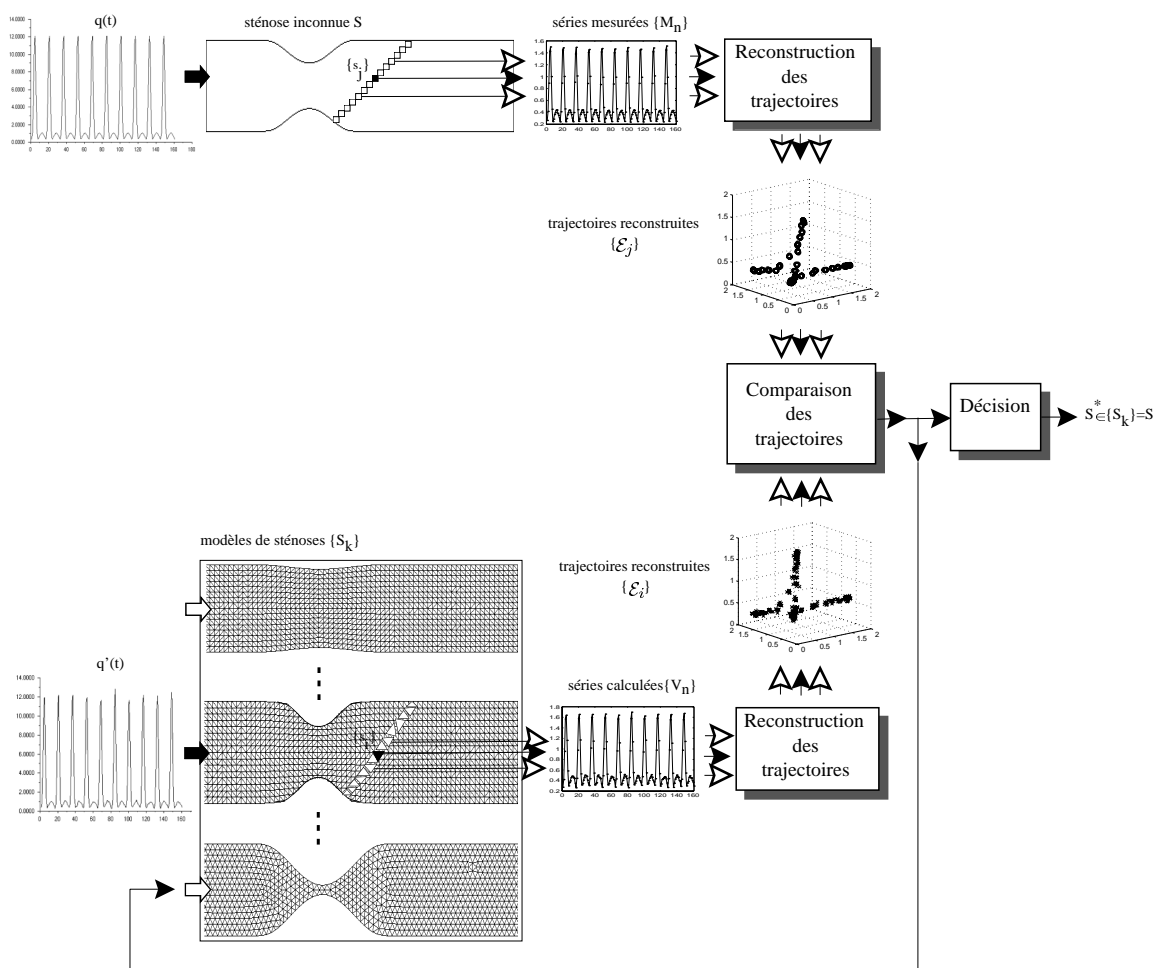


Figure 9. – Discrimination des écoulements coronariens en vue de la quantification d'une sténose : vue globale du processus.

### 4.1. étude de l'hémodynamique

Le modèle mathématique gouvernant l'écoulement coronarien est fonction :

- de la nature du fluide (sang),
- du type de contenant (artère),
- des conditions d'écoulement (débit pulsatile généré par le cœur).

Si l'on se place dans le cadre des hypothèses usuelles [24, 13, 5, 16], l'hémodynamique coronarienne est modélisée par l'équation scalaire de Continuité, et l'équation vectorielle de Navier-Stokes.

Le modèle s'écrit dans un système de coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad \forall t$$

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{\nabla} \vec{V}) \vec{V} \right] = -\vec{\nabla} P + \rho \mu (\overline{\nabla^2 V}) \quad (9)$$

avec  $\vec{\nabla}$  l'opérateur nabla et  $\nabla^2$  l'opérateur Laplacien.

- les paramètres du modèle :
  - $\rho, \mu$ , respectivement la masse volumique et la viscosité du fluide sang <sup>4</sup> ;
- les variables dépendantes (VE) :
  - $\vec{V}$ , le champ de vecteur (spatio-temporel) *vitesse* et  $V_x, V_y$  ses composantes planaires ;
  - $P$ , le champ scalaire (spatio-temporel) de *pression* ;
- les variables indépendantes :
  - $t$ , le temps ;
  - $x, y$ , les variables d'espaces.

Le modèle gouvernant est donc un système différentiel non linéaire aux dérivées partielles spatio-temporelles. Ce système est déterministe <sup>5</sup>, causal <sup>6</sup>, stationnaire (dans le sens où les paramètres du modèle sont indépendants du temps) et non autonome (le comportement du système est conditionné par le choix des conditions initiales d'entrées CI définies par le débit pulsatile généré par le cœur, que nous notons  $q(t)$ ). il est discrétisé spatialement et temporellement par la méthode numérique des volumes finis (Finite Volume Méthod) :

- spatialement: le maillage choisi sera de type non structuré à mailles triangulaires (cf. figure 10),

4.  $\rho = 1050(kg/m^3)$  et  $\mu = 3.8 \cdot 10^{-3}(Pa.s)$   
 5. Il est possible de décrire les solutions par des équations (déterministes) par opposition aux systèmes stochastiques où les solutions sont décrites à l'aide des probabilités.  
 6. Dans le sens où il existe un lien de causalité entre les CI et les solutions du système.

- temporellement,  $t = n \cdot \delta$  avec  $\delta$  le pas d'échantillonnage et  $n = \{1, \dots, \theta\}$ .

La méthode numérique intègre, dans un modèle de sténose donné, au niveau des centres des mailles, à chaque instant  $t = n \cdot \delta$ , sous les conditions  $q(n \cdot \delta)$ , la variable *vitesse*  $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$  et *pression*  $P$ , supposées solutions uniques.

#### 4.1.1. les modèles de sténoses

Nous avons créé une base de sténoses  $\{S_k\}_{k=1, \dots, K}$  comportant  $K = 17$  modèles. Il s'agit de sténoses axis-symétriques, de diamètre  $D_0 = 4mm$  <sup>7</sup>, s'étalant sur  $b - a = 1cm$  et indicées suivant le pourcentage de réduction du diamètre artériel qu'elles provoquent :  $S_k \rightarrow k.5\% + 5\%$  <sup>8</sup>.

Tous les modèles sont construits à partir de la même loi géométrique :

$$f(x) = \frac{S_1 \cdot e^{[\frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-a}]}}{\max\{e^{[\frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-a}]\}} \quad (10)$$

Le choix du rapport  $\frac{S_1}{S_0}$  fixe le pourcentage de sténose désiré. Il fait office de paramètre dans la génération des modèles. Nous rappelons que  $S_1$  correspond à la section obstruée et  $S_0$  à la section non obstruée.

La nature de l'écoulement potentiellement observable en un lieu donné est dicté par l'amplitude du nombre de Reynolds évalué en ce lieu [12, 14].

$$R = \frac{V_m \cdot D_1}{\frac{\mu}{\rho}} \quad (11)$$

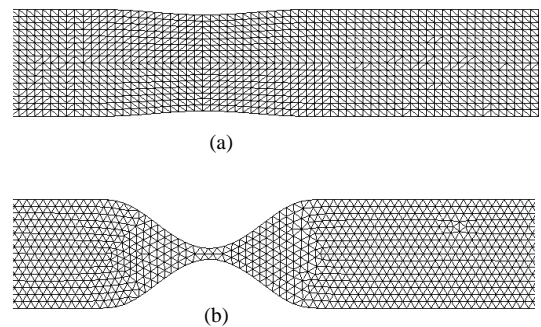


Figure 10. - Nous disposons de  $K = 17$  modèles axis-symétriques. Les  $\{S_k\}$  sont indicés suivant le pourcentage d'occlusion artériel qu'ils provoquent : (a)  $S_1 \rightarrow 10\%$ , (b)  $S_{17} \rightarrow 90\%$ .

7. Le diamètre moyen d'une artère coronaire.  
 8.  $\{S_k\}_{1, \dots, 17} = \{10\%, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90\%$



avec :

$R$ , le nombre adimensionnel de Reynolds ;

$V_m$  en (m/s), vitesse moyenne spatiale calculée sur une section  $S_1$  ;

$D_1$  en (m), diamètre caractérisant  $S_1$  ;

$\frac{\mu}{\rho}$  en (m<sup>2</sup>/s), viscosité cinématique du sang.

Pour  $R < 2000$ , le régime d'écoulement est dit Laminaire. Le flux est ordonné et présente, à chaque instant, une distribution de vitesse parabolique.

*A contrario*, lorsque  $R > 3000$ , le régime d'écoulement est dit Turbulent. La partie non linéaire du modèle ( $(\nabla \cdot \vec{V}) \vec{V}$ , équation 9) intervient et nous ne pouvons plus émettre *a priori* sur la forme du flux solution [29].

Une estimation du nombre de Reynolds dans le modèle  $S_9 \rightarrow 50\%$  indique que la régions pré-sténotique est siège d'un écoulement Laminaire, et la région post-sténotique siège d'un écoulement Turbulent.

Afin de vérifier, si les trajectoires des variables vitesse et pression, en amont et aval de la sténose conduisent à des signatures d'état distinctes, nous injectons un débit simulant dix cycles cardiaques dans une artère sténosée et nous observons les portraits d'état 2D associés à une série de mailles pré et post-sténotiques.

#### 4.1.2. étude des trajectoires solutions : écoulement Laminaire vs. Turbulent

Le débit injecté dans la sténose (cf. figure 11), obéit à la loi :

$$q(t) = A_0 + A_1 \cdot \cos(\omega_o \cdot t + \varphi_1) + A_2 \cdot \cos(2\omega_o \cdot t + \varphi_2) + A_3 \cdot \cos(3\omega_o \cdot t + \varphi_3) + A_4 \cdot \cos(4\omega_o \cdot t + \varphi_4) \quad (12)$$

avec :

$$A_0 = 0.45 \text{ mm}^3/\text{s}$$

$$A_1 = 0.29 \quad \varphi_1 = -1.414 \text{ rad} ; \quad A_2 = 0.97 \quad \varphi_2 = -1.414 ;$$

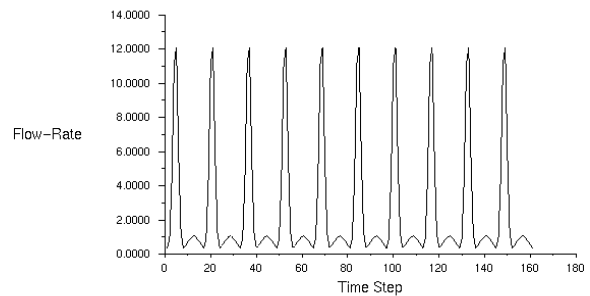
$$A_3 = 0.47 \quad \varphi_3 = -1.414 \text{ rad} ; \quad A_4 = 0.14 \quad \varphi_4 = -1.414 ;$$

$$\omega_o = \frac{2 \cdot \pi}{T_o} = 7.853 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

C'est une loi générique, proposée dans [17, 18] pour décrire une forme de débit pulsatile. La présence de 4 harmoniques suffit à décrire cet effet. Les termes de la série de Fourier  $A_{0,1,2,3,4}$  sont calculées de façon à ce que  $q(t)$  soit conforme au débit sanguin dans les régions coronaires<sup>9</sup>.

$q(t)$  est échantillonné au pas  $\delta = 0.05 \text{ s}$  et est reconduit périodiquement ( $T_o = 0.8 \text{ s}$ ) sur dix cycles.

9.  $q(t)$  assure entre autre un écoulement laminaire à l'entrée des coronaires [28, 17].



Convergence history of Velocity Magnitude on velocity-inlet-1 (Time=8.0500e+00) Fluent/UNS 4.2 (2d, mgle, unsteady)  
Tue Dec 14 1999  
Fluent Inc.

Figure 11. – Débit cardiaque.

La figure 12 (resp. 13) présente les trajectoires de 4 mailles topologiquement adjacentes en zone amont (resp. aval) de la sténose. On constate qu'en amont, les cycles limites sont tous identiques quelque soit leur localisation spatiale, traduisant un flux ordonné. Ce type de portrait d'état est donc **la signature d'un régime laminaire**.

Par contre, en aval, les cycles limites ont des portraits qui varient suivant leur localisation spatiale. **C'est la signature d'un régime turbulent**. On remarque également, la prédominance du gradient de *pression* en régime turbulent/laminaire qui s'impose comme un facteur discriminant de forme des cycles.

#### 4.1.3. conclusion

Les écoulements Laminaire et Turbulent, prédits par les lois de mécanique des fluides, conduisent à des signatures d'états caractéristiques. Ceci a une double signification :

- un écoulement coronarien (phénomène spatio-temporel) peut être abordé, dans les conditions définies section 4.1.2, en une série de systèmes à deux degrés de liberté  $\{P, V\}$ .

- ces systèmes sont non linéaires, déterministes, guidés par un faible nombre de degrés de liberté et leurs trajectoires dans l'espace des états sont bornées (cf. figures 12 et 13). Ils vérifient donc les hypothèses de reconstructions stipulées section 2.

## 4.2. reconstruction des trajectoires : stratégie

La section précédente montre qu'un écoulement est défini par une série de systèmes à deux degrés de liberté. Un seul est mesurable expérimentalement (le module vitesse), tandis que les deux sont estimables par résolution du modèle d'écoulement (Navier-Stokes). La reconstruction des trajectoires concerne donc naturellement les systèmes définissant l'écoulement expérimental.

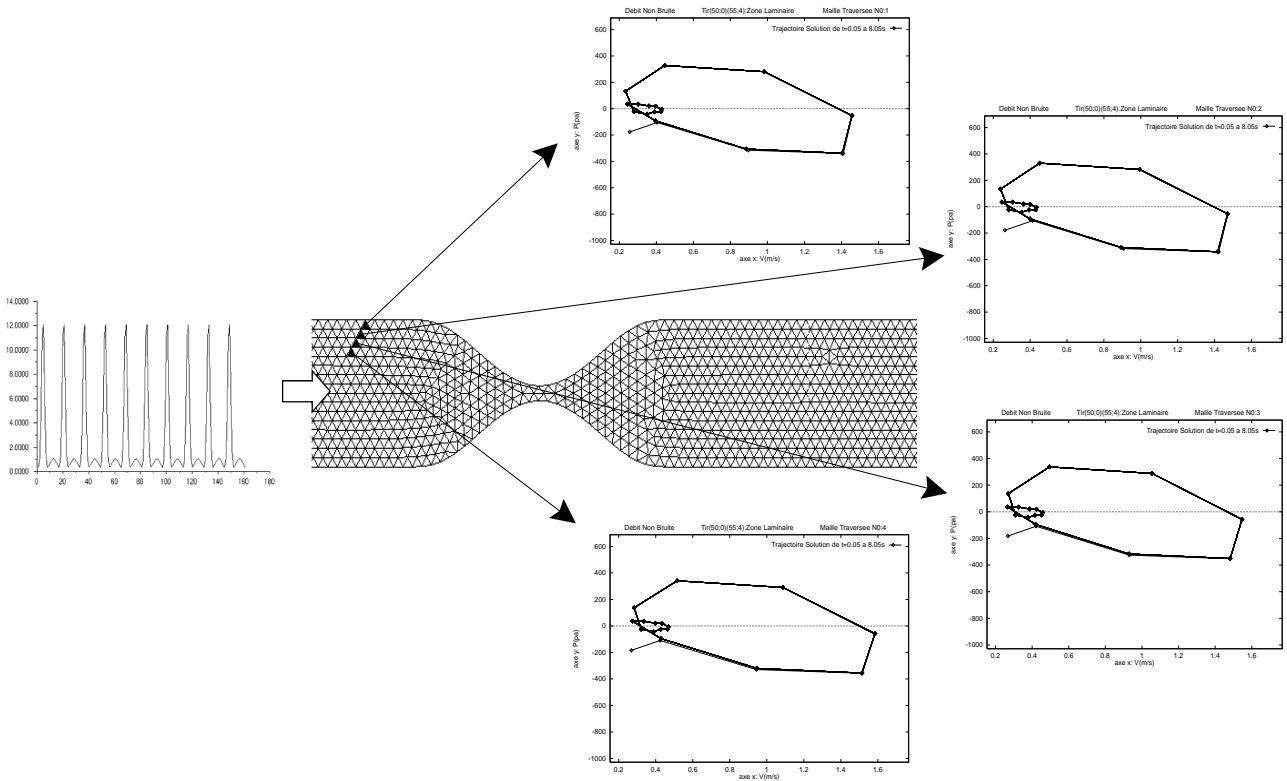


Figure 12. – Écoulement Laminaire : signatures d'état.

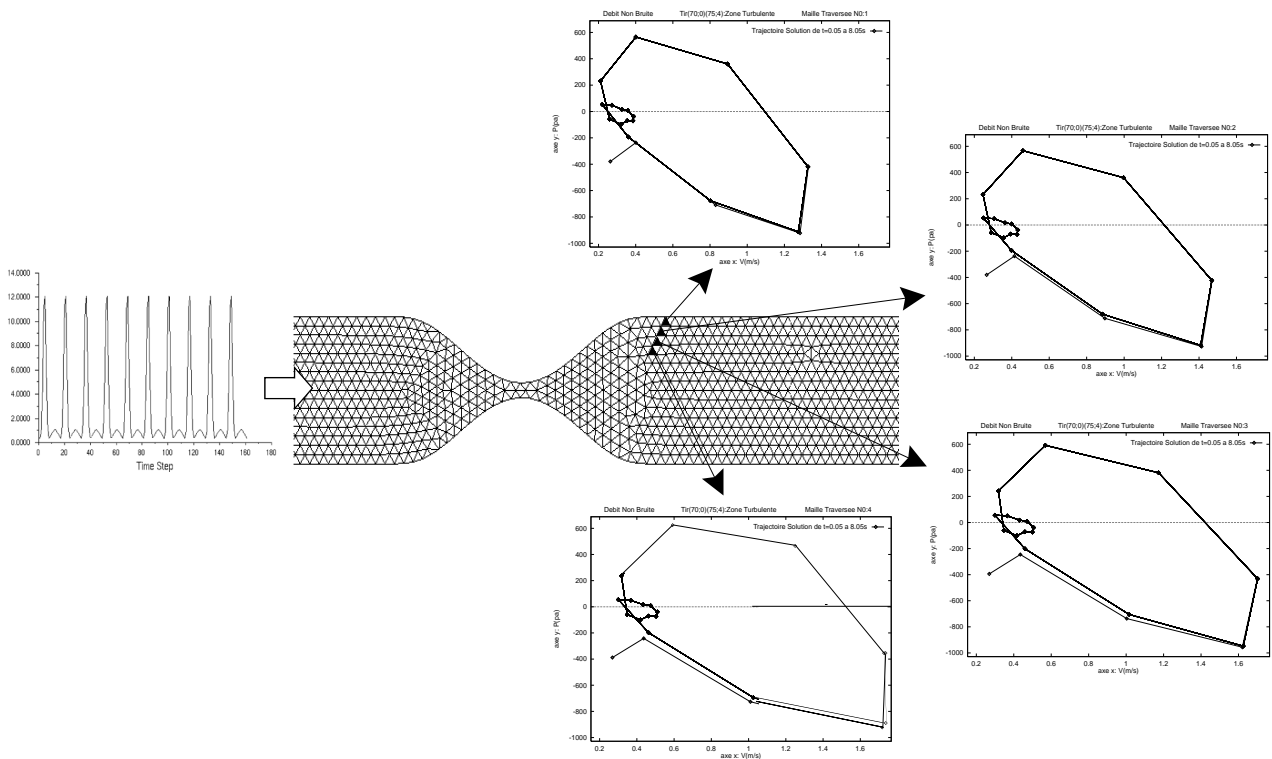


Figure 13. – Écoulement Turbulent : signatures d'état.

Cette opération doit elle être également menée sur les systèmes composant l'écoulement numérique ?

À première vue, non, car la variable pression est une dimension estimable, il serait donc *a priori* inutile de la reconstruire. Toutefois, reconstruire uniquement les trajectoires des systèmes définissant l'écoulement expérimental, nous conduirait lors de l'étape de discrimination des écoulements (expérimental/numérique), à comparer des trajectoires reconstruites avec des trajectoires réelles. Une trajectoire réelle évoluerait dans un espace de dimension 2, tandis qu'une trajectoire reconstruite évolue dans une dimension qui peut être potentiellement très supérieure à 2 ( $\geq 5$ , équation 4). La gestion d'une telle différence de dimension entre trajectoires à comparer s'annonce difficile.

Pour anticiper de telles difficultés une double reconstruction est envisagée :

- d'une part, la reconstruction des trajectoires des systèmes définissant l'**écoulement numérique**, à partir de l'observation des **vitesses calculées** <sup>10</sup> ;
- d'autre part, la reconstruction des trajectoires des systèmes définissant l'**écoulement expérimental**, à partir de l'observation des **vitesses mesurées** ;

#### 4.2.1. reconstruction des trajectoires par la méthode des retards

Selon les conclusion section 4.1.3, l'écoulement  $E_k$  calculé dans le modèle de sténose  $S_k$  est composé par une série de systèmes

10. Solutions du modèle de Navier-Stokes

$\{s_i\}_{i=1,\dots,I}$ . Chaque  $\{s_i\}$  décrit localement dans une zone de la section artérielle (maille) la dynamique des variables *vitesse* et *pression*. Cette dynamique est représentée dans le formalisme d'état section 2.1. Par conséquent, tout écoulement  $E_k$  peut être défini par les trajectoires associés à chacun des  $I$  systèmes qui le compose :

$$E_k = \{\mathcal{E}_1^k, \dots, \mathcal{E}_i^k, \dots, \mathcal{E}_I^k\}$$

avec  $\mathcal{E}_i^k$  la trajectoire du système numéro  $i$  composant l'écoulement calculé  $E_k$ .

On définit, de la même façon, l'écoulement mesuré :

$$E' = \{\mathcal{E}'_1, \dots, \mathcal{E}'_j, \dots, \mathcal{E}'_I\}$$

La particularité des trajectoires  $\mathcal{E}_i^k$  et  $\mathcal{E}'_j$  est qu'elles ne sont que partiellement définies. Seule la variable vitesse est observable, la variable pression reste inaccessible. Nous reconstruisons ces trajectoires par la méthode des retards (cf. section 2.3). Les paramètres  $(\hat{d}, \hat{\tau})$  optimum pour la reconstruction sont calculés par le test de W. Liebert (cf. section 2.4).

Les résultats (cf. figure 14) font apparaître l'émergence de deux couples :

- $(\hat{d} = 5, \hat{\tau} = 4.\delta)$  est l'argument minimisant la quantité  $W$ , c'est la solution optimale pour la reconstruction ;
- $(\hat{d} = 4, \hat{\tau} = 4.\delta)$  est l'argument correspondant au plus petit des minimums locaux, c'est la solution sub-optimale.

Finalement, les trajectoires  $\mathcal{E}_i^k$  et  $\mathcal{E}'_j$  sont reconstruites suivant ces deux configurations. La figure 15 illustre l'allure de ces trajectoires en dimension 3.

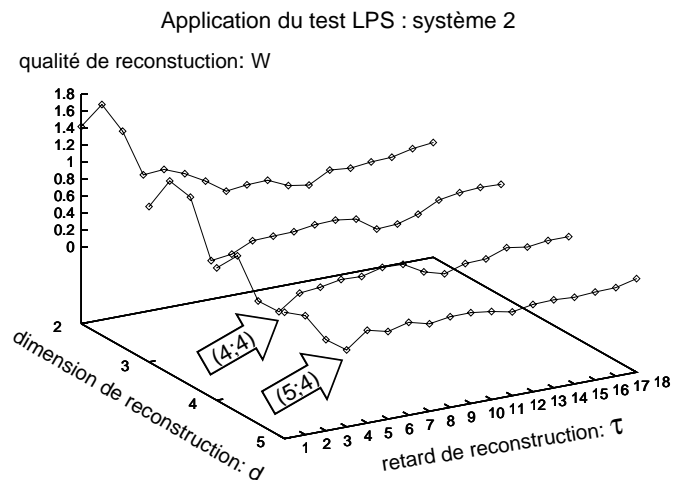
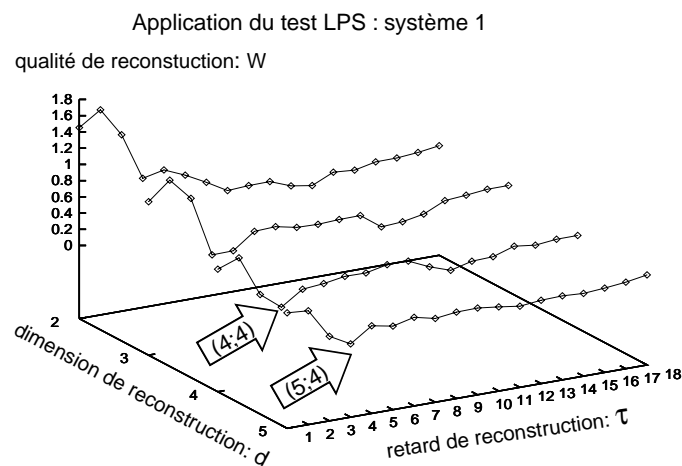


Figure 14. – Calcul de  $d$  et  $\tau$  en vue de la reconstruction d'une trajectoire : application du test LPS ( $L = 50$ ) sur deux systèmes.

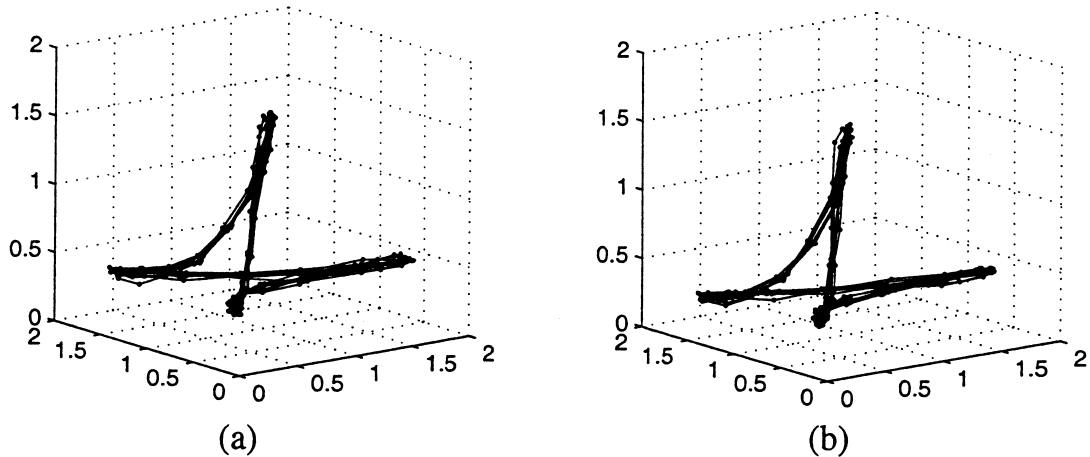


Figure 15. – Trajectoires reconstruites en dimension 3 (avec le retard optimal  $\hat{\tau} = 4.\delta$ ) pour deux systèmes.

### 4.3. comparaison des trajectoires

Comparer  $E_k$  avec  $E'$  revient à comparer leur trajectoire respective soit  $\mathcal{E}_i^k$  avec  $\mathcal{E}'_j$ .

La solution proposée met en œuvre la longueur de l'ARM construit sur  $\mathcal{E}_i^k$  et celle de l'ARM construit sur la trajectoire résultant de l'union des trajectoires à comparer (cf. section 3). La comparaison des longueurs (d'ordre  $\gamma$ ) associées à de tels arbres nous permet de conclure sur la proximité des trajectoires  $\mathcal{E}_i^k$  et  $\mathcal{E}'_j$ . En réitérant sur l'ensemble des trajectoires (pour tout  $i$  et  $j$ ) on compare l'écoulement calculé  $E_k$  à l'écoulement mesuré  $E'$ . La procédure est détaillée ci-dessous.

**Données :**  $\gamma, E_k = \{\mathcal{E}_1^k, \dots, \mathcal{E}_i^k, \dots, \mathcal{E}_I^k\},$   
 $E' = \{\mathcal{E}'_1, \dots, \mathcal{E}'_j, \dots, \mathcal{E}'_I\}$

**pour**  $i = j = 1$  à  $I$  **faire**

- 1. Construire un ARM sur  $\mathcal{E}_i^k$   
Calculer  $L_{i,\gamma}$
- 2. Construire un ARM sur  $\mathcal{E}_i^k \cup \mathcal{E}'_j = \mathcal{E}_{ij}$   
Calculer  $L_{ij,\gamma}$
- 3. Calculer  $\delta_i = \|L_{ij,\gamma} - L_{i,\gamma}\|^2$

**fin**

**Résultat :**  $\Delta_k = \text{mediane}\{\delta_1, \dots, \delta_i, \dots, \delta_I\}$

**Notation :**  
 $\gamma$ , est le coefficient de pondération des arcs définissant l'arbre.  
 $E_k$ , l'écoulement calculé dans le modèle de sténose  $S_k$  ( $k$  donné).  
 $\mathcal{E}_i^k$ , la trajectoire du système numéro  $i$  composant  $E_k$ .

$E'$ , l'écoulement mesuré dans la sténose inconnue  $S$ .  
 $\mathcal{E}'_j$ , la trajectoire du système numéro  $j$  composant  $E'$ .  
 $i$ , l'indice de la  $i^{\text{ième}}$  trajectoire composant  $E_k$  et  $E'$ .  
 $I$ , le nombre de trajectoires.  
 $L_{i,\gamma}$ , la longueur d'ordre  $\gamma$  de l'ARM défini sur  $\mathcal{E}_i^k$ .  
 $\mathcal{E}_{ij}$ , l'espace résultant du « mélange » de  $\mathcal{E}_i^k$  et  $\mathcal{E}'_j$ .  
 $L_{ij,\gamma}$ , la longueur d'ordre  $\gamma$  de l'ARM défini sur  $\mathcal{E}_{ij}$ .  
 $\delta_i$ , le  $i^{\text{ième}}$  écart entre les trajectoires  $\mathcal{E}_i^k$  et  $\mathcal{E}'_j$ .  
 $\Delta_k$ , l'erreur médiane entre l'écoulement calculé  $E_k$  et l'écoulement mesuré  $E'$ .

**Algorithme 2. – Comparaison de deux écoulements : solution par ARM.**

Après trie des  $\delta_i$  par ordre croissant, la médiane est conventionnellement définie par :

$$\text{mediane}\{\delta_i\} = \begin{cases} \delta_{\frac{I}{2}} & \text{si } I \text{ pair} \\ \delta_{\frac{I+1}{2}} & \text{si } I \text{ impair} \end{cases}$$

La médiane est insensible aux valeurs extrêmes ce qui en fait un indicateur robuste.

### 4.4. différentiation des écoulements coronariens : évaluation

En appliquant l'algorithme 2 (sur tout les  $E_k$  avec  $k = 1, \dots, 17$ ) on identifie le modèle  $S^* \in \{S_k\}$ , qui engendre l'écoulement

$E^* \in \{E_k\}$  le plus proche de l'écoulement mesuré  $E'$ . Par extension, on associe à la sténose inconnue  $S$  le modèle  $S^*$ . Le critère de sélection est :

$$E^* = \underset{E_k}{\text{Argmin}}\{\Delta_1, \dots, \Delta_k, \dots, \Delta_K\} \Rightarrow S_{\in\{S_k\}}^* = S \quad (13)$$

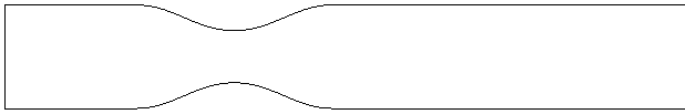


Figure 16. – La sténose recherchée  $S$  présente un rétrécissement de 50 %.

Pour traduire une réalité expérimentale, les modèles  $\{S_k\}$  et la sténose  $S$  sont stimulés volontairement de manière différente. L'écart entre  $q(t)$  et  $q'(t)$  est stigmatisé par l'introduction d'un bruit additif, Gaussien, centré  $b(t)$ .

$$q'(t) \neq q(t) \Rightarrow q'(t) = q(t) + b(t)$$

Le niveau de bruit corrupteur correspond à un RSB de  $10 \log \frac{\sigma_s^2}{\sigma_b^2} = 25 \text{ dB}$ . On rappelle que  $\sigma_s^2$  est la variance du signal (perturbé) et  $\sigma_b^2$  la variance du bruit.

Notons que la figure 9 présente une vue globale du processus.

#### 4.4.1. résultats et interprétations

Les Tables 1, 2 synthétisent les résultats de l'algorithme 2 paramétré par  $\gamma = 1$ , les trajectoires étant reconstruites suivant la

configuration optimale et sub-optimale. Ces tables fournissent un classement des 5 premiers modèles émergents.

La qualité de la prise de décision est mesurée par un critère  $\Lambda_k$  évoquant le caractère discriminant de la décision.  $\Lambda_k$  est évalué par comparaison des erreurs associées au modèle de sténose classé en  $k^{\text{ième}}$  et au modèle classé en  $k + 1^{\text{ième}}$  position :

$$\Lambda_k = \frac{\Delta_{k+1} - \Delta_k}{\Delta_k}$$

$\Lambda_k$  est un indicateur de discrimination.

Tableau 1. – Identification du modèle 50 % : reconstruction optimale + comparaison par ARM ( $\gamma = 1$ ).

classement	modèle : $S_k$	erreur mediane : $\Delta_k$	discrimination : $\Lambda_k$
1	50%	15.490	28.32%
2	45%	19.878	0.37%
3	55%	19.952	12.90%
4	40%	22.526	12.53%
5	60%	25.350	/

Tableau 2. – Identification du modèle 50 % : reconstruction quasi-optimale + comparaison par ARM ( $\gamma = 1$ ).

classement	modèle : $S_k$	erreur mediane : $\Delta_k$	discrimination : $\Lambda_k$
1	50%	10.263	30.59%
2	45%	13.403	1.03%
3	55%	13.542	7.64%
4	40%	14.577	17.41%
5	60%	17.116	/

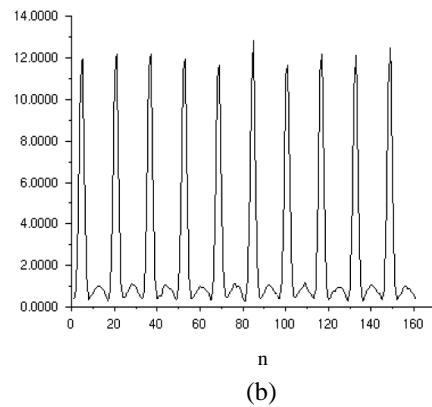
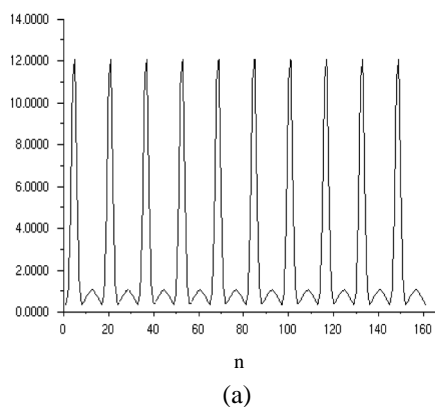


Figure 17. – La sténose et les modèles de sténoses sont stimulés de manière différente :  
 (a) le débit ( $\text{mm}^3/\text{s}$ ) stimulant la sténose réelle :  $q(t)$  ;  
 (b) le débit ( $\text{mm}^3/\text{s}$ ) stimulant les modèles :  $q'(t)$

Le modèle 50% est clairement identifié. On peut également remarquer que les  $\{S_k\}$  sont classés logiquement suivant l'écart entre leur degré de rétrécissement et celui de  $S$ . Par exemple le modèle 45% est en deuxième position alors que le modèle 40%, plus éloigné de  $S = 50\%$  se trouve lui en 4<sup>ième</sup> position.

### Influence de la configuration de reconstruction

Nous pouvons noter que l'impact sur les résultats de la configuration de reconstruction des trajectoires n'est pas flagrant. D'une part, le modèle 50% est identifié avec les deux types de reconstructions et d'autre part le pouvoir de discrimination est du même ordre de grandeur (28.32% vs 30.59%).

Nous interprétons cela de la façon suivante. Dans cette expérience, où l'on s'intéresse aux écoulements évoluant dans la région proxima post-sténotique (à 0.5 cm de la sténose) la qualité de reconstruction des trajectoires (des systèmes composants ces écoulements) ne semble pas avoir une grande importance sur le résultat du processus de reconstruction-comparaison. Nous pensons que ceci est lié à la région de l'artère explorée. En proximité aval de la sténose, les écoulements observés sont très marquées par la géométrie de la sténose. De ce fait, les écoulements calculés dans divers modèles de sténose sont, dans une telle région, plus « facilement » différenciables. Les trajectoires des systèmes composant ces écoulements sont ab-initio différentes y compris lorsque leur reconstruction n'est pas de qualité optimale.

### Influence de $\gamma$

La comparaison des écoulements par ARM nécessite le choix du paramètre  $\gamma$ . Il est intéressant de cerner l'influence de  $\gamma$  sur les résultats. Nous rappelons que  $\gamma$  est la puissance des longueurs élémentaires dont la somme définit l'arbre de représentation minimum. Existe-t-il une valeur particulière de  $\gamma$  qui maximise, pour un type de reconstruction donné, le pouvoir de comparaison de l'approche par ARM ? Pour répondre, nous recherchons les valeurs de  $\gamma$  pour lesquelles le modèle 50% est identifié. Nous représentons ensuite (cf. figure 18) l'évolution de  $\Delta k$  (pour  $k = 1$ ) en fonction de ces diverses valeurs.

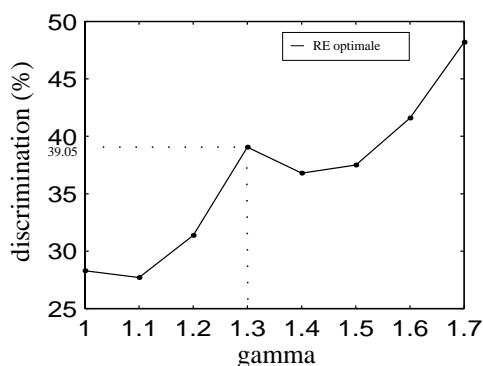


Figure 18. – Influence de  $\gamma$  sur les résultats.

Pour  $\gamma \in [1, 1.7]$  le modèle 50% est identifié, pour  $\gamma = 1.3$  la discrimination des différents modèles de sténose est maximale ( $\Delta 1 = 39\%$ ). Pour  $\gamma > 1.5$ , on observe que  $\Delta 1$  a tendance à augmenter. Nous interprétons cette évolution finale de la façon suivante.  $\Delta_k$  quantifie l'écart relatif entre deux mesures d'erreurs dont chacune tend progressivement vers zéro tout simplement parce qu'au fur et à mesure que  $\gamma$  augmente les longueurs des ARM manipulées diminuent. N'oublions pas que  $\gamma$  pondère les longueurs élémentaires définissant ces arbres.

## 5. conclusion

L'idée d'appréhender l'hémodynamique sous le formalisme d'un système dynamique semble pertinente. Sous les hypothèses (modèles et niveaux de bruit) établies en concertation avec D. Coisne, cardiologue au service de cardiologie du CHU de Poitiers, le processus de reconstruction-comparaison de trajectoires est performant pour discriminer des écoulements. D'autres expériences tendent à confirmer ces résultats. Notamment, outre le modèle de sténose 50%, la recherche des modèles 30% et 80% a été menée avec succès. Il est intéressant de noter que chacun de ces modèles engendre un écoulement spécifique. Le modèle de sténose 30% engendre un écoulement dit Transitoire (mélange d'un écoulement laminaire et turbulent), le modèle 50% engendre un écoulement Turbulent et le modèle 80% un écoulement fortement Turbulent. L'algorithme de reconstruction-comparaison d'état a donc été évalué sur la quasi-totalité de la gamme des écoulements (artériels) référencés en mécanique des fluides et observés par les praticiens.

L'idée de reconstruire la dynamique de la variable *pression*, jusqu'ici inaccessible expérimentalement, est séduisante. Nommée reconstruction d'état, elle apporte une réelle valeur ajoutée dans la différenciation des écoulements. La méthode des retards a notamment la particularité de transférer le même rapport signal sur bruit sur chacune des dimensions qu'elle estime. Cette propriété est précieuse car les trajectoires reconstruites sont (relativement) robustes aux perturbations entourant les conditions de générations des écoulements. Ceci facilite par la suite leur comparaison.

La comparaison des trajectoires par des arbres de représentation minimaux est une solution qui nous paraît intéressante. La longueur d'un tel arbre est une signature naturelle (de la dynamique) d'un système car elle est définie de façon unique. Ceci explique peut être ses performances, par rapport à une méthode plus classique<sup>11</sup>. Néanmoins, ces performances sont accompagnées d'un coût algorithmique non négligeable. Ce coût n'est pas une fatalité car il peut être réduit, soit à la source en

11. Cette solution est comparée à une technique chronologique, selon les critères coût-performance, dans [4].

employant un algorithme plus performant (M. Soss dans [25] propose une implémentation incrémentale), soit de façon stratégique dans la manière d'utiliser les arbres au sein de l'application. Enfin, nous soulignons l'aspect générique de cette solution. La longueur d'un arbre de représentation minimal peut servir à classifier n'importe quel système non linéaire. Il vient d'être démontré [9, 3, 10] que la longueur d'un tel arbre est un estimateur de l'entropie de Rényi, d'ordre  $(\frac{d-\gamma}{d})$ , de la distribution des points (sommets) dans  $R^d$ .

## remerciements

Les auteurs remercient Olivier Michel et Alfred Hero pour leur sollicitude et leurs conseils.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] A.-E. Badel. Modélisation et comparaison de système dynamiques non linéaires à l'aide d'arbres de régression. Master's thesis, École Normale Supérieure de Lyon, Laboratoire de Physique (URA 1325 CNRS), Thèse sous la direction de P. Flandrin N 98ENSL0079, 1998.
- [2] N.H. Packard J.P. Crutchfield J.D. Farmer. Geometry from a time series. *Phys. Rev. Lett.*, 45 : 712-716, 1980.
- [3] O. Michel A. Hero P. Flandrin. Graphe de représentation minimaux, entropies et divergences : applications. *Traitement du Signal*, 17(4) : 287-297, 2000.
- [4] P. Franco. *Reconnaissance de systèmes dynamiques dans un contexte d'informations imparfaites. Application à la comparaison d'écoulements de fluides*. PhD thesis, Université de La Rochelle, Laboratoire d'Informatique et d'Imagerie Industrielle – UPRES EA 2118, Présentée en Décembre 2001.
- [5] M. Giarre. *Color Doppler: A Novel Method for the Blood Flow Velocity Vector Reconstruction*. PhD thesis, École Polytechnique de Lausanne, 1996.
- [6] R. Graham P. Hell. On the history of minimum spanning tree problem. *Annals of History of Computing*, (7), 1985.
- [7] R. Joulie. *Mécanique des Fluides Appliquée*. Édition Ellipses, 1998.
- [8] A. Hero O. Michel. Robust estimation of point process intensity features using k-minimal spanning trees. In *IEEE Symposium on Information Theory (Ulm, Germany)*, 1997.
- [9] A. Hero O. Michel. Asymptotic theory of greedy approximations to minimal k-point random graphs. *IEEE Trans. on Information Theory*, 1999.
- [10] A. Hero O. Michel. Estimation of Rényi information divergence via pruned minimal spanning tree. *IEEE HOS Workshop*, 1999.
- [11] B. Ma A. Hero J. Gorman O. Michel. Image registration with minimum spanning tree algorithm. *I. C. I. P.*, 2000.
- [12] J. Padet. *Fluide en Ecoulement: Méthodes et Modèles*. Masson, 1991.
- [13] T.J. Pedley. *The Fluid Mechanics of Large Blood Vessels*. Cambridge University Press, 1980.
- [14] D.C. Wiggert~M.C. Potter. *Mechanics of Fluids*. Prentice-Hall International Editions, 1991.
- [15] T. Cormen C. Leiserson~R. Rivest. *Introduction à l'algorithmique*. Dunod, 1994.
- [16] M. Rosenfeld. Validation of a numerical simulation of incompressible pulsatile flow in a constricted channel. *J. Comput. Fluids*, 22 : 139-156, 1993.
- [17] M. Rosenfeld. Validation of a numerical simulation of incompressible pulsatile flow in a constricted channel. *J. Comput. FLuids.*, 22(213) : 139-156, 1993.
- [18] M. Rosenfeld. A numerical study of pulsating flow behind a constriction. *J. Fluid. Mech.*, 301 : 203-223, 1995.
- [19] O.E. RöSSLer. An equation for continuous chaos. *Phys. Letter.*, A(57), 1976.
- [20] D. Ruelle. *Chaotic evolution and strange attractors*. Cambridge University Press, 1989.
- [21] S.K. Murthy S. Salzberg. Clustering astronomical objects using minimum spanning trees. Technical report, Dept. of Computer Science, Johns Hopkins University, July 1992.
- [22] W. Liebert K. Pawelzik H.G. Schuster. Optimal embeddings of chaotic attractors from topological considerations. *Europhysics Letters*, 14(6) : 521-526, 1991.
- [23] J.D. Farmer J.J. Sidorowich. Optimal shadowing and noise reduction. *Physica D*, 47 : 373-392, 1991.
- [24] V. Deplano M. Siouffi. Étude d'écoulement pulsé en aval d'une sténose. In *13<sup>ième</sup> Congrès Français de Mécanique des Fluides*, 1997.
- [25] M. Soss. *On the size of the sphere on influence graph*. PhD thesis, Mc Gill University Scholl of Computer Science Montreal, 1998.
- [26] F. Takens. Detecting strange attractors in fluid turbulence. *Dynamical Systems and Turbulence*, 1981.
- [27] F. Takens. Detecting strange attractors in turbulence. *Lecture Notes in Mathematics*, 898 : 366-381, 1981.
- [28] B. Talbot. *Étude expérimentale d'écoulements instationnaires pulsés dans des conduites élastiques axisymétriques présentant des retrécissements de section. Application à la Biomécanique des artères sténosées*. Mécanique des fluides, Université de Poitiers (France) , UER Sciences Fondamentales et Appliquées (N868)., 1982.
- [29] D.J. Tritton. *Physical Fluid Dynamics*. Oxford Science Publications, 2<sup>e</sup> édition, 1988.
- [30] M.C. Potter D.C. Wiggert. *Mechanics of Fluids*. Prentice-Hall International Editions, 1991.

Manuscrit reçu le 29 juin 2001

## Reconnaissance de phénomènes dynamiques par arbres de représentation...

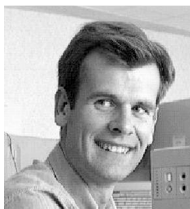
### LES AUTEURS

#### Patrick FRANCO



Patrick Franco est né à Sète en 1971. Après avoir obtenu un D.E.A. en Automatique et Traitement du Signal (LIRMM, Université Montpellier II, 1997) il vient de soutenir une thèse à l'Université de La Rochelle (Décembre 2001) dont la spécialité est l'Informatique et le Traitement du Signal. Ses thèmes de recherche sont la fusion de données multi-sources et les systèmes dynamiques non linéaires. Les approches développées ont été principalement appliquées à l'étude de l'hémodynamique: phénomène complexe et évolutif.

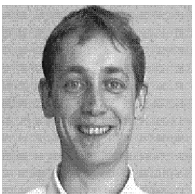
#### Pierre LOONIS



Pierre Loonis est actuellement Maître de Conférences à l'Université de La Rochelle. Ses recherches actuelles entrent dans le cadre de la reconnaissance des formes pour des applications complexes et évolutives.

Au sein du L3I, il est responsable du projet e-FISH (évaluation de la Fraîcheur par l'Instrumentation des Sens Humains), visant à la conception de méthodes pour la reconnaissance du phénomène du vieillissement des produits de la mer post-mortem. L'adaptativité d'un système à son environnement y est étudié à travers les approches de fusion d'information multi-sources en tenant compte des aspects temporels des observations et de la notion de contexte.

#### Michel MÉNARD



Michel Ménard est né en 1966. Il a obtenu un doctorat d'électronique de l'Université de Poitiers en 1993. Ses travaux de recherche portent sur la modélisation de l'information en reconnaissance des formes et en analyse d'images. Les thématiques applicatives sont la coalescence floue, la fusion multi-classifieurs et les approches variationnelles pour la restauration et la segmentation d'images.