

# Introduction aux Statistiques de deuxième espèce : applications des *Logs-moments* et des *Logs-cumulants* à l'analyse des lois d'images radar

---

## Introduction to second kind statistics : application of *Log-moments* and *Log-cumulants* to SAR image law analysis

par Jean-Marie NICOLAS

École Nationale Supérieure des Télécommunications, Département TSI, 46 rue Barrault, 75634 Paris cedex 13

Tél : 01 45 81 81 29, Fax : 01 45 81 37 94, Mel : nicolas@tsi.enst.fr

### *résumé et mots clés*

Les méthodes utilisées en statistique pour étudier une distribution de probabilité (d.d.p.) sont fondées sur la transformée de Fourier, approche qui permet d'établir les définitions des fonctions caractéristiques, des moments et des cumulants. Cependant, cette transformation est mal adaptée à des d.d.p. définies sur  $\mathbb{R}^+$  car les expressions analytiques des fonctions caractéristiques peuvent alors devenir très lourdes, voire impossibles à formuler. Cet article propose de substituer à la transformée de Fourier la transformée de Mellin. Il est alors possible, en s'inspirant des précédentes définitions, d'introduire les statistiques de deuxième espèce : fonctions caractéristiques de deuxième espèce, moments de deuxième espèce (ou log-moments) et cumulants de deuxième espèce (ou log-cumulants). Appliquée à des lois classiques comme la loi Gamma ou la loi de Nakagami, cette approche donne des résultats plus faciles à utiliser que l'approche classique. De plus, pour des lois plus compliquées, comme la loi  $\mathcal{K}$  ou les distributions  $\alpha$ -stables positives, les statistiques de deuxième espèce donnent des expressions vraiment très simples et aisées à exploiter.

Cette nouvelle approche propose donc des méthodes innovantes pour estimer les paramètres de lois définies sur  $\mathbb{R}^+$ . Il est possible de comparer les estimateurs ainsi obtenus avec ceux de la méthode des moments ou celui du maximum de vraisemblance : on peut ainsi montrer que ces nouvelles méthodes ont des variances d'estimées inférieures à la première et légèrement supérieures aux bornes de Cramer Rao.

Lois statistiques définies sur  $\mathbb{R}^+$ , loi Gamma, loi de Nakagami, fonctions caractéristiques, estimation de paramètres, transformée de Mellin.

*abstract and key words*

Statistics methods classically used to analyse a probability density function (p.d.f.) are based on Fourier Transform, on which usefull tools as first and second characteristic functions are based, yielding the definitions of moments and cumulants. Yet this transform does not well match with p.d.f. defined on  $\mathbb{R}^+$  as analytical expressions can be rather heavy in this case. In this article, we propose to start with a rather misknown transform: the Mellin transform, in order to define **second kind statistics**. By this way, second kind characteristic functions, second kind moments (log-moments) and second kind cumulants (log-cumulants) can be defined by mimicing the traditional definitions. For classical p.d.f. defined on  $\mathbb{R}^+$ , as Gamma and Nakagami laws, this approach seems to be simpler than previous one. More, for complicated p.d.f., as the famous  $\mathcal{K}$  law or positive  $\alpha$ -stable distributions, second kind statistics yield oversimple results.

This new approach provides new methods for estimating the parameters of p.d.f. defined on  $\mathbb{R}^+$ . Comparisons can be done with traditional methods as Maximum Likelihood Method and Moment Method: the variance of the new methods estimators are lower than Moment Method ones, and slightly upper than Cramer Rao bounds.

Probability Density Functions defined on  $\mathbb{R}^+$ , Gamma law, Nakagami law, characteristic functions, parameters estimation, Mellin transform.

# 1. introduction

L'estimation des paramètres décrivant une densité de probabilité (d.d.p.) est au cœur des techniques de reconnaissance des formes. En effet, à partir de ces estimations, des algorithmes de segmentation/classification peuvent alors être mis en œuvre, tant dans le domaine du traitement du signal que du traitement des images.

En traitement du signal, la connaissance intrinsèque de la nature des données (fournies par un capteur : microphone, senseur électromagnétique,... ) permet de faire des hypothèses réalistes sur la nature des lois ainsi que sur les modèles pouvant être utilisés. En particulier, de nombreuses techniques se fondent sur la loi normale ainsi que sur un modèle de bruit bien adapté à ce type de loi : le bruit additif. Traditionnellement, si on décrit un phénomène aléatoire par une d.d.p., on introduit alors la notion de fonction caractéristique, définie comme la transformée de Fourier  $\mathcal{F}$  de la d.d.p. Par exemple, si  $p_x(u)$  est la d.d.p. modélisant une variable aléatoire  $x$ , on obtient la fonction caractéristique  $\Phi_x(v)$  par la relation [Mét72] :

$$\Phi_x(v) = \mathcal{F} [p(u)] (v) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jvu} p_x(u) du. \quad (1)$$

On définit aussi la seconde fonction caractéristique comme le logarithme de la fonction caractéristique :

$$\Psi_x(v) = \log (\Phi_x(v)) \quad (2)$$

En prenant en compte les propriétés de la transformée de Fourier, il est aisé de montrer que les moments d'ordre  $n$  s'obtiennent alors par dérivation de la fonction caractéristique :

$$\begin{aligned} m_n &= \int_{-\infty}^{+\infty} u^n p_x(u) du \\ &= (-j)^n \frac{d^n \Phi_x(v)}{dv^n} \Big|_{v=0}. \end{aligned} \quad (3)$$

et les cumulants d'ordre  $n$  par dérivation de la seconde fonction caractéristique :

$$\kappa_{x(r)} = (-j)^n \frac{d^r \Psi_x(v)}{dv^r} \Big|_{v=0}.$$

De plus, si on analyse un phénomène, décrit par sa d.d.p.  $q_y$ , qui est perturbé par un bruit additif, décrit par sa d.d.p.  $r_z$ , on sait que le signal en sortie est décrit par la d.d.p.  $p_x$  telle que

$$p_x = q_y * r_z, \quad (4)$$

l'opérateur  $*$  étant la convolution. On sait alors que fonctions caractéristiques et cumulants peuvent s'écrire :

$$\Phi_x(s) = \Phi_y(s) \Phi_z(s) \quad (5)$$

$$\Psi_x(s) = \Psi_y(s) + \Psi_z(s) \quad (6)$$

$$\kappa_{x(r)} = \kappa_{y(r)} + \kappa_{z(r)} \quad \forall r \quad (7)$$

En traitement des images, la problématique est cependant différente. Il faut noter tout d'abord que les valeurs des pixels sont positives ou nulles (nous n'aborderons pas ici l'analyse des images définies par des valeurs complexes), et que le bruit est souvent multiplicatif. Aussi le modèle précédent doit-il subir quelques adaptations pour pouvoir être appliqué tel quel. Une approche souvent proposée est de passer en échelle logarithmique, ce qui est possible puisque la d.d.p. est définie sur  $\mathbb{R}^+$ . Plusieurs remarques peuvent alors être faites :

- Le calcul analytique des fonctions caractéristiques définies sur  $\mathbb{R}^+$  est parfois laborieux, voire impossible pour certaines lois, ce que nous verrons au paragraphe 3.2.
- Aucune méthodologie globale n'est proposée pour les échelles logarithmiques. Le calcul des moments en échelle logarithmique (que l'on peut appeler log-moments) s'effectue analytiquement à partir de la relation 3. Il nécessite un changement de variable (donc une réécriture de la d.d.p. pour cette nouvelle variable) et s'effectue de manière spécifique pour chaque d.d.p. Cette approche requiert une bonne connaissance des transformations intégrales et des propriétés des fonctions spéciales.
- En statistiques traditionnelles, la référence est la loi normale, ce qui revient à choisir, en passant en échelle logarithmique, la loi log-normale comme référence. Or, dans de nombreux exemples, cette loi n'est pas représentative du phénomène étudié. En particulier, le chatoiement (*speckle*) observé sur des images obtenues par illumination cohérente (laser, radar, ultrasons) vérifie, pour les images d'intensité, la loi Gamma, loi que nous étudierons plus en détails dans cet article et qui ne tend qu'asymptotiquement vers une loi normale dégénérée.

Aussi nous allons montrer qu'une nouvelle méthodologie fondée sur une autre transformation intégrale : la transformée de Mellin [Col59] permet d'analyser de manière plus efficace et pratique les lois définies sur  $\mathbb{R}^+$ . Cette méthodologie, que nous proposons d'appeler statistiques de deuxième espèce, utilise la même axiomatique que les statistiques traditionnelles pour la définition des fonctions caractéristiques (simplement en remplaçant la transformée de Fourier par la transformée de Mellin dans la relation 1) et la même construction des moments et cumulants (par dérivation des fonctions caractéristiques). Ceci débouche naturellement sur les définitions des moments de deuxième espèce et des cumulants de deuxième espèce : nous verrons pourquoi nous proposons d'appeler ces nouvelles grandeurs log-moments et log-cumulants. Grâce à cette approche, il est possible d'analyser plus simplement des lois à 2 ou 3 paramètres classiquement utilisées en imagerie : loi Gamma, loi de Nakagami, loi  $\mathcal{K}$ . Ensuite, nous verrons comment aborder des problèmes plus complexes comme les lois du système de Pearson, les mélanges additifs et les lois « à queue lourde » (lois pour lesquelles les moments ne peuvent être définis à partir d'un certain ordre). Enfin nous analyserons pourquoi

les estimateurs des paramètres de ces lois fondés sur les log-moments et log-cumulants ont une variance plus faible que ceux obtenus à partir des moments et cumulants traditionnels.

Si l'on peut faire dès à présent la remarque fondamentale qu'une telle similitude formelle ne peut conduire *a priori* à des résultats intrinsèquement nouveaux, il faut souligner que l'apport essentiel de cette axiomatique est d'offrir aux traiteurs de signaux et d'images une méthodologie qui s'avère, pour certaines applications, infiniment plus aisée à utiliser que les approches classiques : c'est l'objectif majeur de cet article que d'illustrer sa facilité de mise en œuvre ainsi que sa souplesse d'utilisation.

## 2. définition des fonctions caractéristiques de deuxième espèce

L'objectif de ce paragraphe est donc de proposer le formalisme des statistiques de deuxième espèce fondé sur la transformée de Mellin et reprenant les éléments de base des statistiques traditionnelles, à savoir la définition de fonctions caractéristiques d'où découlent moments et cumulants, comme nous l'avons rappelé en introduction.

### 2.1. première fonction caractéristique de deuxième espèce

Soit  $x$  une variable aléatoire à densité de probabilité et à valeurs réelles positives, dont la densité de probabilité :  $p_x(u)$  est définie pour  $u \in \mathbb{R}^+$ .

On pose comme définition que la première fonction caractéristique de deuxième espèce est la transformée de Mellin  $\mathcal{M}$  de  $p_x(u)$  :

$$\phi_x(s) = \mathcal{M}[p_x(u)](s) = \int_0^{+\infty} u^{s-1} p_x(u) du \quad (8)$$

dans la mesure où cette intégrale converge, ce qui n'est vérifié en règle générale que pour des valeurs de  $s$  situées à l'intérieur d'une bande délimitée par deux parallèles à l'axe imaginaire, *i.e.*

$$s = a + jb \quad a \in ]a_1; a_2[ \quad b \in \mathbb{R}$$

$a_2$  pouvant éventuellement tendre, dans certains cas usuels, vers  $+\infty$ , de même que  $a_1$  vers  $-\infty$ .

Comme la transformation de Mellin possède un inverse [Col59], connaissant  $\phi_x(s)$ , on peut en déduire  $p_x(u)$  grâce à la relation :

$$p_x(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} u^{-s} \phi_x(s) ds$$

dans la mesure où  $c$  appartient à la bande dans laquelle la première fonction caractéristique est définie (i.e.  $c \in ]a_1; a_2[$ ).

Notons que si  $p_x(u)$  est une d.d.p., sa fonction caractéristique de deuxième espèce vérifie la propriété fondamentale :

$$\phi_x(s)|_{s=1} = 1.$$

Par analogie, on définit les moments de deuxième espèce  $\tilde{m}_\nu$  ( $\nu \in \mathbb{N}$ ) par la relation :

$$\tilde{m}_\nu = \left. \frac{d^\nu \phi_x(s)}{ds^\nu} \right|_{s=1}. \quad (9)$$

Grâce à une des propriétés fondamentales de la transformée de Mellin [Col59] :

$$\mathcal{M}[f(u) (\log u)^\nu](s) = \frac{d^\nu \mathcal{M}[f(u)](s)}{ds^\nu}$$

que l'on considère en  $s = 1$ , on peut écrire les moments de deuxième espèce de deux manières différentes :

$$\tilde{m}_\nu = \left. \frac{d^\nu \phi_x(s)}{ds^\nu} \right|_{s=1} \quad (10)$$

$$= \int_0^{+\infty} (\log u)^\nu p_x(u) du \quad (11)$$

L'expression 11 suggère d'appeler ces moments de deuxième espèce log-moments, choix que nous adopterons dans la suite de cet article.

Introduisons maintenant la moyenne de deuxième espèce ou log-moyenne  $\tilde{m}$ . Cette variable auxiliaire se définit par la relation suivante

$$\log \tilde{m} = \tilde{m}_1 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{m} = e^{\tilde{m}_1}$$

Notons que cette grandeur, qui est en fait la moyenne géométrique, prend ses valeurs dans  $\mathbb{R}^+$  (échelle propre à la variable  $u$ ), alors que les log-moments prennent leurs valeurs dans  $\mathbb{R}$  (échelle logarithmique) : il est donc possible de comparer la moyenne  $\tilde{m}$  et la log-moyenne  $\tilde{m}$  et nous verrons qualitativement dans le cas de la loi Gamma tout son intérêt.

De même que l'on définit les moments centrés, nous introduisons la définition des moments log-centrés d'ordre  $n$ ,  $\tilde{M}_n$  :

$$\begin{aligned} \tilde{M}_n &= \int_0^{+\infty} (\log u - \tilde{m}_1)^n p_x(u) du \\ &= \int_0^{+\infty} \left( \log \frac{u}{\tilde{m}} \right)^n p_x(u) du. \end{aligned} \quad (12)$$

En particulier, on retrouve tout naturellement l'expression

$$\tilde{M}_2 = \tilde{m}_2 - \tilde{m}_1^2$$

Ainsi, grâce à ce formalisme, il est possible d'obtenir une expression analytique des log-moments par simple dérivation d'une fonction : la fonction caractéristique de deuxième espèce. Nous allons voir maintenant quelle est en premier lieu l'interprétation classiquement donnée à la transformée de Mellin.

## 2.2. une première interprétation de la transformée de Mellin

Par identification de la définition des moments (équation 3) et de la définition de la première fonction caractéristique de deuxième espèce (équation 8), on peut écrire les moments généralisés  $m_\nu$  :

$$m_\nu = \phi_x(s)|_{s=\nu+1} = \int_0^{+\infty} u^\nu p_x(u) du \quad (13)$$

Pour  $\nu \in \mathbb{N}$ , ce sont les moments « classiques ». Pour  $\nu \in \mathbb{R}^+$ , on a les moments fractionnaires, qui ont été parfois utilisés par certains auteurs (comme l'utilisation des « FLOM » : Fractional Low Order Moments [SN93]). Dans la mesure où la transformée de Mellin est définie pour des valeurs de  $\nu$  dans  $\mathbb{R}^-$ , on justifie l'utilisation des moments d'ordre inférieurs [NMB00]. Enfin, chaque fois qu'un moment est défini pour une valeur  $\nu = a$  (i.e. moment « classique », moment fractionnaire ou moment d'ordre inférieur), on peut définir les moments d'ordre complexe avec  $\nu = a + jb$  pour tout  $b$ , ceci parce que la densité de probabilité  $p_x(u)$  est par définition positive, propriété qui conduit à une démonstration triviale.

## 2.3. cumulants de deuxième espèce ou « log-cumulants »

Toujours par analogie avec les variables aléatoires réelles scalaires sur  $\mathbb{R}$ , on définit la seconde fonction caractéristique de deuxième espèce comme le logarithme népérien de la première fonction caractéristique de deuxième espèce :

$$\psi_x(s) = \log(\phi_x(s)) \quad (14)$$

Les dérivées de la seconde fonction caractéristique de deuxième espèce, prises en  $s = 1$ , définissent alors les cumulants de deuxième espèce d'ordre  $n$  :

$$\tilde{\kappa}_{x(n)} = \left. \frac{d^n \psi_x(s)}{ds^n} \right|_{s=1} \quad (15)$$

Puisque formellement, les cumulants de deuxième espèce sont construits selon les mêmes règles que les cumulants traditionnels, les relations entre log-moments et log-cumulants sont donc identiques aux relations existants entre moments et cumulants. Par exemple, les trois premiers log-cumulants peuvent s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}_1 &= \tilde{m}_1 \\ \tilde{\kappa}_2 &= \tilde{m}_2 - \tilde{m}_1^2 \\ \tilde{\kappa}_3 &= \tilde{m}_3 - 3 \tilde{m}_1 \tilde{m}_2 + 2 \tilde{m}_1^3\end{aligned}$$

Comme dans le cas des log-moments, nous adopterons l'appellation de log-cumulants pour les cumulants de deuxième espèce.

### 2.4. quelques propriétés des log-moments et log-cumulants

L'utilisation de la transformée de Mellin requiert d'en connaître certaines propriétés spécifiques. En particulier rappelons la définition de la convolution de Mellin (qui est une opération associative et commutative) :

$$\begin{aligned}h = f \hat{\star} g &\Leftrightarrow h = \int_0^\infty f(y) g\left(\frac{u}{y}\right) \frac{dy}{y} \\ &\Leftrightarrow h = \int_0^\infty g(y) f\left(\frac{u}{y}\right) \frac{dy}{y},\end{aligned}\tag{16}$$

Sa propriété fondamentale est analogue à la propriété de la convolution vis-à-vis de la transformée de Fourier :

$$\mathcal{M}[f \hat{\star} g](s) = \mathcal{M}[f](s) \mathcal{M}[g](s).$$

Notons dès à présent que si  $f$  et  $g$  sont des d.d.p., alors  $h$  est aussi une d.d.p. (en effet  $h(u) \geq 0 \forall u \in \mathbb{R}^+$  et  $\mathcal{M}[h]|_{s=1} = 1$ ).

L'utilisation de cet opérateur va trouver une application immédiate dans l'étude du bruit multiplicatif. En effet, soient deux variables aléatoires indépendantes  $y$  et  $z$ , et leurs d.d.p. définies sur  $\mathbb{R}^+$  :  $q_y$  et  $r_z$ . Considérons le cas d'une variable aléatoire  $x$  construite multiplicativement à partir de ces deux variables : c'est donc un modèle de bruit multiplicatif. Alors on montre que la d.d.p. de  $x$  :  $p_x$  est obtenue par convolution de Mellin de  $q_y$  et  $r_z$  [NSTT97, NM98] :

$$p_x = q_y \hat{\star} r_z.$$

On en déduit les propriétés suivantes, formellement identiques à celles obtenues dans le cas d'une convolution en statistiques traditionnelles (relations 5, 6 et 7). Si  $\phi_x$  est la fonction caractéristique de deuxième espèce de la d.d.p. de  $x$ ,  $\phi_y$  est la fonction caractéristique de deuxième espèce de la d.d.p. de  $y$  et  $\phi_z$  est la fonction caractéristique de deuxième espèce de la d.d.p. de  $z$ , on obtient les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\phi_x(s) &= \phi_y(s) \phi_z(s) \\ \psi_x(s) &= \psi_y(s) + \psi_z(s) \\ \tilde{\kappa}_{x(n)} &= \tilde{\kappa}_{y(n)} + \tilde{\kappa}_{z(n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}\end{aligned}\tag{17}$$

On note en particulier que, dans le cas d'un bruit multiplicatif, les log-cumulants s'additionnent. Cette propriété n'a rien de surprenant puisque la méthode généralement usitée pour traiter le bruit multiplicatif : le passage en échelle logarithmique, permet de traiter un bruit de nature multiplicative comme un bruit de nature additive.

Notons enfin la propriété suivante :

$$u (f \hat{\star} g) = (u f) \hat{\star} (u g)$$

On peut aussi, par une démarche analogue à celle de la convolution traditionnelle, définir la convolution inverse (opérateur non commutatif et non associatif). Si le rapport

$$\frac{\mathcal{M}[f](s)}{\mathcal{M}[g](s)}$$

est défini dans un voisinage de  $s = 1$  de sorte que l'on puisse en établir la transformée de Mellin inverse, on peut poser la relation :

$$h = f \hat{\star}^{-1} g \Leftrightarrow \mathcal{M}[h](s) = \frac{\mathcal{M}[f](s)}{\mathcal{M}[g](s)}.$$

Avec les notations précédentes, s'il existe  $q_y$  et  $r_z$  tels que  $p_x$ , densité de probabilité, vérifie :

$$p_x = q_y \hat{\star}^{-1} r_z$$

on en déduit :

$$\begin{aligned}\phi_x(s) &= \frac{\phi_y(s)}{\phi_z(s)} \\ \psi_x(s) &= \psi_y(s) - \psi_z(s) \\ \tilde{\kappa}_{x(n)} &= \tilde{\kappa}_{y(n)} - \tilde{\kappa}_{z(n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}\end{aligned}\tag{18}$$

Il peut être enfin utile d'utiliser la corrélation de Mellin (opération non associative et non commutative), que l'on peut définir par la relation :

$$h = f \hat{\otimes} g \Leftrightarrow \mathcal{M}[h](s) = \mathcal{M}[f](s) \mathcal{M}[g](2-s).\tag{19}$$

$h$  vérifie bien la condition que doit vérifier une d.d.p. :  $\mathcal{M}[h]|_{s=1} = 1$ . À partir de cette relation, et toujours avec les mêmes notations, si  $p_x$  vérifie :

$$p_x = q_y \hat{\otimes} r_z$$

on en déduit :

$$\begin{aligned}\phi_x(s) &= \phi_y(s) \phi_z(2-s) \\ \psi_x(s) &= \psi_y(s) + \psi_z(2-s) \\ \tilde{\kappa}_{x(n)} &= \tilde{\kappa}_{y(n)} + (-1)^n \tilde{\kappa}_{z(n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}\end{aligned}\tag{20}$$

L'expression suivante peut alors se démontrer :

$$h = f \hat{\otimes} g \Leftrightarrow h = \int_0^\infty f(uy) g(y) y dy. \quad (21)$$

Notons aussi la propriété :

$$u (f \hat{\otimes} g) = (u f) \hat{\otimes} \left(\frac{g}{u}\right) \quad (22)$$

En fait, l'interprétation de la corrélation de Mellin s'aborde à partir de l'analyse de la « loi inverse », i.e. la loi  $p_I(u)$  que suit la variable aléatoire  $y = \frac{1}{x}$  connaissant la loi  $p(u)$  que suit la variable aléatoire  $x$ . En effet, on connaît la relation que vérifient ces deux lois :

$$p_I(u) = \frac{1}{u^2} p\left(\frac{1}{u}\right)$$

En prenant en compte une des propriétés fondamentales de la transformée de Mellin :

$$\mathcal{M}\left[\frac{1}{u} f\left(\frac{1}{u}\right)\right](s) = \mathcal{M}[f(u)](1-s)$$

on en déduit aisément que

$$\mathcal{M}[p_I](s) = \mathcal{M}[p](2-s). \quad (23)$$

On voit alors que la corrélation de Mellin de la d.d.p.  $q_y$  d'une variable aléatoire  $y$  et de la d.d.p.  $r_z$  d'une variable aléatoire  $z$

$$q_y \hat{\otimes} r_z$$

est simplement une manière d'établir la d.d.p. que suit la variable aléatoire  $\frac{y}{z}$ .

**Tableau 1. – Propriétés de la convolution de Mellin, de la convolution inverse de Mellin et de la corrélation de Mellin pour deux lois définies sur  $\mathbb{R}^+$  :  $p_A$  et  $p_B$ , de fonctions caractéristiques de deuxième espèce  $\phi_A$  et  $\phi_B$ , et de log-cumulants  $\tilde{\kappa}_{A,n}$  et  $\tilde{\kappa}_{B,n}$ .**

	Fonction caractéristique	Cumulant
$p_A \hat{\star} p_B$	$\phi_A(s) \phi_B(s)$	$\tilde{\kappa}_{A,n} + \tilde{\kappa}_{B,n}$
$p_A \hat{\star}^{-1} p_B$	$\frac{\phi_A(s)}{\phi_B(s)}$	$\tilde{\kappa}_{A,n} - \tilde{\kappa}_{B,n}$
$p_A \hat{\otimes} p_B$	$\phi_A(s)\phi_B(2-s)$	$\tilde{\kappa}_{A,n} + (-1)^n \tilde{\kappa}_{B,n}$

Enfin, comme pour les fonctions caractéristiques traditionnelles, il est intéressant de noter que, pour des densités de probabilité, la fonction caractéristique de deuxième espèce peut se développer en fonction des log-cumulants :

$$\begin{aligned} \psi_x(s) = & \tilde{\kappa}_{x(1)} (s-1) + \frac{1}{2!} \tilde{\kappa}_{x(2)} (s-1)^2 \\ & + \frac{1}{3!} \tilde{\kappa}_{x(3)} (s-1)^3 + \dots \end{aligned}$$

## 2.5. théorème d'existence des log-moments et log-cumulants

Nous venons de voir que l'introduction théorique des log-moments et log-cumulants ne pose formellement aucun problème. Cependant, l'existence même de ces grandeurs n'ayant pas encore été prouvée, il est nécessaire de s'interroger sur les conditions nécessaires à leur existence. Nous allons voir dans ce paragraphe un théorème montrant des conditions d'existence certes fortes, mais généralement vérifiées par les lois couramment employées en traitement du signal et des images, ce qui montre l'intérêt de cette nouvelle approche.

Soit  $p(u)$  une distribution de probabilité définie sur  $\mathbb{R}^+$ , de fonction caractéristique de deuxième espèce  $\phi(s)$ . Cette d.d.p. vérifie alors les relations :

- $p(u) \geq 0 \quad \forall u \geq 0$
- $\int_0^{+\infty} p(u) du = \phi|_{s=1} = 1.$

**THÉORÈME** — Si une d.d.p. a sa fonction caractéristique de deuxième espèce définie sur un ouvert  $\Omega = ]s_a, s_b[$ ,  $s = 1 \in \Omega$ , alors elle possède tous ses log-moments et tous ses log-cumulants.

### Démonstration

L'existence des moments et log-cumulants revient à étudier la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} (\log u)^n p(u) du.$$

Pour étudier cette intégrale impropre, nous allons en étudier le comportement en 0 et à l'infini.

• **au voisinage de l'infini** : soit  $\alpha \in \Omega$  tel que  $\alpha > 1$ . On a donc :

$$\exists \alpha > 1 \text{ tel que } \phi(\alpha) = \int_0^{+\infty} u^{\alpha-1} p(u) du < \infty$$

ce qui revient à dire que l'on peut calculer les moments (entiers ou fractionnaires) de  $p(u)$  pour tous les ordres entre 1 et  $\alpha$ . Soit un entier  $n \geq 1$ . Deux cas peuvent alors se présenter :

–  $\forall x > 1 \quad (\log x)^n < x^{\alpha-1}$ . Dans ce cas, sachant que  $p(u)$  est une d.d.p. et vérifie donc  $p(u) \geq 0$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} & \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b (\log u)^n p(u) du \\ & \leq \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b u^{\alpha-1} p(u) du \leq \phi(\alpha) \end{aligned}$$

ce qui démontre la convergence de l'intégrale pour  $x \rightarrow \infty$ .

–  $\exists c > 1$   $(\log c)^n = c^{\alpha-1}$  tel que  $\forall x > c$   $(\log x)^n \leq x^{\alpha-1}$ . Par un raisonnement identique au cas précédent, on en déduit :

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b (\log u)^n p(u) du \leq \phi(\alpha)$$

ce qui démontre la convergence de l'intégrale impropre pour  $x \rightarrow \infty$ .

• **au voisinage de 0 :**

– tout d'abord, prenons le cas particulier, courant en pratique, où la d.d.p. est bornée :

$$\exists A \text{ tel que } \forall u \in [0, 1] \quad p(u) \leq A,$$

et calculons la limite

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 (\log u)^n p(u) du$$

Puisque la d.d.p. est bornée, on a :

$$\begin{aligned} \forall a \in ]0, 1[ \quad \left| \int_a^1 (\log u)^n p(u) du \right| & \leq \left| \int_a^1 (\log u)^n A du \right| \\ & \leq A \left| \int_a^1 (\log u)^n du \right| \end{aligned}$$

La propriété suivante

$$\left| \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 (\log u)^n du \right| = \Gamma(n+1)$$

prouve la convergence en 0.

– Dans le cas général, l'étude de la convergence à l'origine s'effectue par le changement de variable  $x \rightarrow \frac{1}{x}$  et l'utilisation de la propriété de convergence que nous avons démontrée dans le cas  $x \rightarrow \infty$ .

On en déduit que, dès lors qu'une distribution de probabilité à valeurs bornées possède des moments (entiers ou fractionnaires) d'ordre strictement supérieur à 0 et d'ordre strictement inférieur à 0, tous ses log-moments et log-cumulants existent.

Notons qu'une démonstration bien plus élégante et concise, fondée sur les propriétés des fonctions analytiques, peut s'élaborer sans problème majeur puisque, avec les hypothèses choisies,  $\phi$  est holomorphe [Car61], et donc dérivable à tout ordre en  $s = 1$ .

## 2.6. comparaison avec un passage en échelle logarithmique

À ce stade, on peut se demander quels sont les avantages de cette nouvelle approche et si un simple changement d'échelle (passage en échelle logarithmique) ne conduirait pas aux mêmes résultats. Nous allons voir tout d'abord que *de facto* calculer une fonction caractéristique après un passage en échelle logarithmique revient à calculer la transformée de Mellin de la d.d.p. initiale.

Considérons donc une variable aléatoire  $x$  à densité de probabilité et à valeurs réelles positives. Soit  $p_x(u)$  sa d.d.p., définie pour  $u \in \mathbb{R}^+$ . Sa fonction caractéristique s'écrit :

$$\Phi_x(v) = \int_0^{+\infty} e^{jvu} p_x(u) du,$$

Effectuons un passage en échelle logarithmique. La nouvelle variable aléatoire  $y$  est alors décrite par sa d.d.p.  $q_y(w)$  définie pour  $w \in \mathbb{R}$  avec  $w = \log u$ . Cette d.d.p. se déduit de  $p_x$  par la relation :

$$q_y(w) = e^w p_x(e^w).$$

Calculons maintenant la fonction caractéristique de la variable aléatoire  $y$  :

$$\begin{aligned} \Phi_y(v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jvw} q_y(w) dw \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jvw} e^w p_x(e^w) dw \\ &= \int_0^{+\infty} e^{jv \log u} p_x(u) du \quad \text{avec } u = e^w \\ &= \int_0^{+\infty} u^{jv} p_x(u) du \end{aligned} \tag{24}$$

On reconnaît alors dans la relation 24 la transformée de Mellin de  $p_x(u)$  en  $s = 1 + jv$ . D'où la relation :

$$\Phi_y(v) = \phi_x(s) \Big|_{s=1+jv} \tag{25}$$

Cette relation montre donc que si l'on connaît la transformée de Mellin d'une d.d.p. (*i.e.* sa fonction caractéristique de deuxième espèce), on connaît alors sa fonction caractéristique en échelle logarithmique.

En échelle logarithmique, moments et cumulants se déduisent par dérivation (simple ou logarithmique) de l'expression 25, ce qui revient à retrouver la relation 10 que nous avons proposée. On justifie ainsi d'une autre manière l'appellation de log-moments et de log-cumulants. Notons cependant que les statistiques de deuxième espèce proposent une méthode générique

permettant de trouver directement log-moments et log-cumulants sans avoir à recourir à un changement de variable (passage en échelle logarithmique) et sans avoir à calculer la nouvelle loi de probabilité suivie par la variable en échelle logarithmique.

De plus, nous verrons, sur un plan strictement pratique, que, dans les cas généralement rencontrés en traitement du signal et des images et où les grandeurs sont définies sur  $\mathbb{R}^+$ , il se trouve qu'il est plus aisé de calculer les transformées de Mellin que les transformées de Fourier, ce qui simplifie d'autant la mise en œuvre de notre approche. De plus, connaissant la transformée de Mellin, on obtient directement :

- les moments, en prenant pour la variable de Mellin  $s$  les valeurs entières strictement positives,
- les log-moments en dérivant la transformée de Mellin selon  $s$  et en en prenant la valeur en  $s = 1$ ,

ce que peut apprécier tout expérimentateur puisqu'en appliquant une unique transformation sur sa loi de distribution, il peut obtenir aussi bien les moments que les log-moments.

## 2.7. comparaison entre transformations intégrales

L'utilisation dans ce contexte d'une transformation méconnue : la transformée de Mellin, peut surprendre, d'autant qu'il existe d'autres transformées intégrales dotées d'une transformée inverse plus courantes, comme la transformée de Laplace, qui pourraient jouer un rôle majeur dans l'étude des lois définies sur  $\mathbb{R}^+$ . À ce stade, il est important de voir quels sont les liens entre-transformée de Fourier  $\mathcal{F}$ , transformée de Laplace  $\mathcal{L}$  et transformée de Mellin  $\mathcal{M}$ . La transformée de Laplace d'une d.d.p.  $p(u)$ , lorsqu'elle existe, s'écrit :

$$\mathcal{L}[p(u)](\sigma) = \int_0^{\infty} e^{-\sigma u} p(u) du$$

tandis que la première fonction caractéristique de cette d.d.p. s'écrit

$$\mathcal{F}[p(u)](v) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jvu} p_x(u) du.$$

La relation suivante s'en déduit immédiatement :

$$\mathcal{F}[p(u)] \Big|_{v=-\frac{b}{2\pi}} = \mathcal{L}[p(u)] \Big|_{\sigma=jb}$$

La variable de Laplace étant une grandeur complexe, on peut considérer que la transformée de Laplace permet de construire le prolongement analytique de la fonction caractéristique [Luk83]. Cependant, les propriétés intrinsèques de la transformée de Laplace sont les mêmes que celles de la transformée de

Fourier, à savoir que par un passage en échelle logarithmique (et dans ce cas, on traitera de la transformée de Laplace bilatère), on aura *de facto* une transformée de Mellin :

$$\mathcal{L}[\tilde{p}(u)] \Big|_{\sigma=a+jb} = \mathcal{M}[p(u)] \Big|_{s=-a-jb} = \phi_x(s) \Big|_{s=-a-jb}$$

avec  $\tilde{p}$  la d.d.p. en échelle logarithmique.

Il y a donc de fortes relations entre ces transformées qui font que très probablement rien de fondamentalement nouveau ne peut se trouver par l'utilisation de la transformée de Mellin. Aussi le choix peut être dicté par des considérations pratiques : puisque, comme nous l'avons vu, la transformée de Mellin permet à la fois d'obtenir les moments traditionnels et les log-moments sans avoir à rechercher l'expression de la d.d.p. en échelle logarithmique, et puisque, comme nous le verrons, il se trouve que les lois expérimentales utilisées en traitement du signal et des images se trouvent dans les tables de transformées de Mellin, il semble justifié d'approfondir l'utilisation de cette transformée plutôt méconnue. C'est cette démarche pragmatique que nous avons choisi d'appliquer dans cet article.

## 3. exemples fondamentaux

Nous allons illustrer cette nouvelle approche sur des lois utilisées dans la modélisation des images RSO (Radar à Synthèse d'Ouverture) qui sont les lois Gamma et Gamma généralisées (images en intensité, chatoiement pleinement développé), les lois de Rayleigh et de Nakagami (images en amplitude, chatoiement pleinement développé), et enfin la loi  $\mathcal{K}$  (loi en intensité, texture modélisée par une loi Gamma, bruitée multiplicativement par du chatoiement pleinement développé). Même si certains des résultats obtenus sont triviaux, il semble néanmoins important de pouvoir effectuer des comparaisons sur ces cas simples et bien connus, en particulier pour aborder le problème de l'estimation des paramètres des lois, aspect que nous verrons au paragraphe 5.

### 3.1. Lois Gamma et Gamma généralisée

Cette loi à deux paramètres  $\mathcal{G}[\mu, L]$ , solution de type III du système de Pearson [JK70], est définie sur  $\mathbb{R}^+$  par :

$$\mathcal{G}[\mu, L](u) = \frac{1}{\Gamma(L)} \frac{L}{\mu} \left( \frac{Lu}{\mu} \right)^{L-1} e^{-\frac{Lu}{\mu}} \quad \text{avec } L > 0 \tag{26}$$

Nous verrons que  $\mu$  est un paramètre d'échelle et que  $L$  est un paramètre de forme (figure 1).

Le cas particulier  $L = 1$  correspond à la loi Gamma proprement dite (bien connue des radaristes puisqu'elle correspond à la modélisation du chatolement pleinement développé) et  $L = \frac{1}{2}$  à la loi du  $\chi^2$ .

Les tables de transformées de Fourier permettent d'écrire sa fonction caractéristique  $\Phi$  :

$$\Phi = \left(\frac{L}{\mu}\right)^L \frac{e^{j L \arctan(\frac{\nu\mu}{L})}}{\left(\nu^2 + \frac{L^2}{\mu^2}\right)^{\frac{L}{2}}} \quad (27)$$

dont l'expression, peu limpide, pose des problèmes d'utilisation. En revanche la transformée de Mellin de  $\mathcal{G}[\mu, L]$ , que l'on trouve par exemple dans les tables de transformées de Mellin [Col59, Obe74] permet d'exprimer la fonction caractéristique de deuxième espèce à l'aide de la fonction Gamma :

$$\phi_x(s) = \mu^{s-1} \frac{\Gamma(L + s - 1)}{L^{s-1} \Gamma(L)} \quad (28)$$

On en déduit alors directement les moments « classiques »  $m_n \forall n \in \mathbb{N}$  plus facilement que par dérivation de l'expression 27 :

$$m_n = \mu^n \frac{\Gamma(L + n)}{L^n \Gamma(L)} \quad (29)$$

d'où les moments bien connus  $m_1$  et  $m_2$  :

$$m_1 = \mu \quad m_2 = \frac{L + 1}{L} \mu^2.$$

Ce système étant analytiquement inversible, on en déduit les relations donnant les paramètres  $\mu$  et  $L$  en fonction des deux premiers moments :

$$\mu = m_1 \quad (30)$$

$$L = \frac{m_1^2}{m_2 - m_1^2} = \frac{1}{\frac{m_2}{m_1^2} - 1} \quad (31)$$

Notons que cette loi n'est pas symétrique et que son mode s'écrit :

$$m_{mode} = \frac{L - 1}{L} \mu \leq \mu.$$

Remarquons aussi que la fonction caractéristique de deuxième espèce s'exprime sous forme séparable avec un premier terme en  $\mu^{s-1}$ , le second terme, fonction uniquement de  $L$ , représente un facteur de forme. En effet, lorsque  $L$  tend vers l'infini,

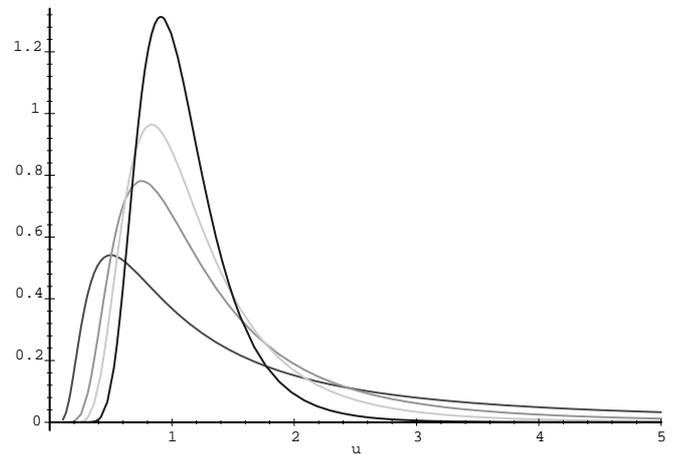
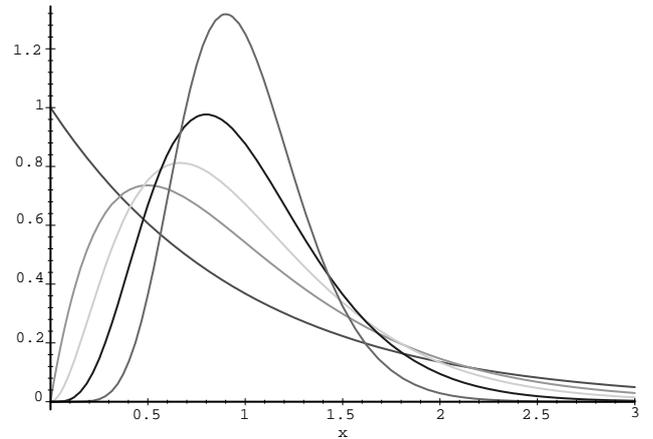


Figure 1 – En haut : loi Gamma  $\mathcal{G}[\mu, L]$  avec  $\mu = 1$  et  $L = 1, 2, 3, 5$  et  $10$ . En bas : loi Gamma Inverse  $\mathcal{GI}[\mu, L]$  avec  $\mu = 1$  et  $L = 1, 2, 3, 5$  et  $10$ .

$\frac{\Gamma(L + s - 1)}{L^{s-1} \Gamma(L)}$  tend vers 1, d'où la convergence de  $\mathcal{G}[\mu, L]$  vers

la loi homothétique  $\mathcal{H}[\mu]$  :

$$\begin{aligned} \phi_x(s) &\rightarrow \mu^{s-1} \\ \Leftrightarrow \mathcal{G}[\mu, L](u) &\rightarrow \mathcal{H}[\mu](u) = \frac{1}{\mu} \delta(\mu u - 1) \end{aligned}$$

Notons que cette loi homothétique peut être vue comme une loi normale dégénérée (*i.e.* à variance nulle) : il nous semble cependant qu'affirmer comme font beaucoup de spécialistes d'image radar que la loi Gamma tend vers la loi normale lorsque le paramètre  $L$  tend vers l'infini est malgré tout un abus de langage pouvant prêter à confusion.

Un autre point majeur propre aux lois définies sur  $\mathbb{R}^+$  repose sur le fait que la transformée de Mellin de  $\mathcal{G}[\mu, L]$  est définie pour  $s > 1 - L$  : on voit donc que, pour  $L > 1$ , on pourra avoir des

valeurs de  $s - 1$  négatives et donc des moments d'ordre inférieur. Qualitativement, les moments d'ordre inférieur – *i.e.* les puissances positives de  $\frac{1}{u}$  – reflètent principalement l'allure de la loi entre 0 et  $\mu$  tandis que les moments traditionnels – *i.e.* les puissances positives de  $u$  – analysent plutôt la loi entre  $\mu$  et  $\infty$ . Puisque la loi Gamma n'est pas symétrique, on peut deviner l'importance de cette observation puisque l'on a donc, grâce aux moments d'ordre inférieur, la possibilité d'analyser sélectivement le début ou la queue de la loi de probabilité.

Les deux premiers log-cumulants de  $\mathcal{G}[\mu, L]$  s'expriment selon les relations suivantes (avec  $\Psi$  fonction Digamma et  $\Psi(r, L)$  fonction Polygamma d'ordre  $r$ , *i.e.* la dérivée  $r$ -ème de la fonction Digamma) :

$$\tilde{\kappa}_{x(1)} = \log(\mu) + \Psi(L) - \log(L) \tag{32}$$

$$\tilde{\kappa}_{x(2)} = \Psi(1, L) \geq 0 \tag{33}$$

$$\tilde{\kappa}_{x(3)} = \Psi(2, L) \leq 0 \tag{34}$$

et on montre de manière triviale que :

$$\tilde{\kappa}_{x(r)} = \Psi(r - 1, L) \quad \forall r > 1,$$

exprimant ainsi la propriété que les log-cumulants ne dépendent que de  $L$  à partir de l'ordre 2.

Notons au passage la propriété :

$$\lim_{L \rightarrow \infty} (\Psi(L) - \log(L)) = 0$$

qui, associée au fait que les fonctions Polygamma tendent vers 0 à l'infini, montre, par identification des log-cumulants, à nouveau la convergence de la loi Gamma vers la distribution homothétique quand  $L$  tend vers l'infini.

Remarquons que le log-cumulant d'ordre 3 est négatif : ceci illustre que, pour la loi Gamma, le début de la distribution est plus marquée que la queue de la distribution, qui décroît donc très vite lorsque l'on tend vers l'infini.

La log-moyenne s'écrit :

$$\tilde{m} = \mu \frac{e^{\Psi(L)}}{L}. \tag{35}$$

Il est intéressant de remarquer les deux points suivants :

- $\frac{e^{\Psi(L)}}{L} \leq 1$  : la log-moyenne est inférieure à la moyenne (notons que cette propriété est vraie pour tout  $L$ ).
- $\frac{e^{\Psi(L)}}{L} \geq \frac{L - 1}{L}$  : la log-moyenne est supérieure au mode.

Une analyse plus complète montrerait que la log-moyenne a par

ailleurs une valeur inférieure à la médiane  $m_{\text{médiane}}$  définie par

$$\int_0^{m_{\text{médiane}}} \mathcal{G}(u) du = 0.5.$$

Aussi utiliser la log-moyenne en lieu et place de la moyenne traditionnelle peut se justifier et donne dans certaines applications de traitement d'images des résultats intéressants [Nic01].

Enfin, par passage en échelle logarithmique, la loi Gamma  $\mathcal{G}[\mu, L](u)$  devient alors la loi de Fisher-Tippett  $\mathcal{G}_{\mathcal{FT}}[\tilde{\mu}, L](w)$  avec  $\tilde{\mu} = \log \mu$  et  $w = \log u$  :

$$\mathcal{G}_{\mathcal{FT}}[\tilde{\mu}, L](w) = \frac{L^L}{\Gamma(L)} e^{L(w - \tilde{\mu})} e^{-Le^{(w - \tilde{\mu})}}$$

Sa fonction caractéristique s'obtient en en prenant la transformée de Fourier. Malheureusement, on ne la trouve pas dans les tables habituelles et il est trivial de montrer que son évaluation revient à en calculer la transformée de Mellin : on applique sans s'en rendre compte la relation 25 !

En conclusion, on voit que, dans le cas de la loi Gamma généralisée, l'approche des statistiques de deuxième espèce permet :

- d'obtenir une expression plus simple pour la fonction caractéristique de deuxième espèce que pour la fonction caractéristique classique,
- d'évaluer plus efficacement les paramètres de la loi en inversant le système d'équations 32 et 33. En effet :
  - \* le paramètre de forme  $L$  se déduit simplement du log-cumulant d'ordre 2, et ce même en l'absence de formulation analytique puisque les fonction Polygamma sont monotones, et donc faciles à inverser numériquement (une tabulation est même possible si l'on souhaite gagner du temps calcul). La variance d'un tel estimateur sera évaluée au paragraphe 5 et nous verrons que sa valeur est notablement inférieure à celle obtenue par la méthode des moments via l'équation 31.
  - \* connaissant  $L$ , il est possible alors d'en déduire  $\mu$  de l'expression donnant le log-cumulant d'ordre 1.
- en traitement d'images, de proposer une « valeur type » entre mode et moyenne pouvant représenter de manière réaliste l'échantillon si l'on considère la zone comme homogène.

### 3.2. lois de Rayleigh et Nakagami

Nous allons maintenant aborder un problème propre à l'imagerie RSO, à savoir le passage de données en intensité à des données en amplitude : en effet, si les modèles ont des expressions simples en intensité (on trouve la loi Gamma connue par toutes les communautés scientifiques), les images sont assez souvent des données en amplitude, ce qui, comme nous allons le voir, fera apparaître de nouveaux problèmes liés à l'estimation des paramètres. Dans cet article, nous allons donc cibler cette ana-

lyse au passage de données en intensité vérifiant la loi Gamma à des données correspondant à la même zone imagée, mais fournies en amplitude.

Les radaristes donnent le nom de loi de Nakagami<sup>1</sup> à la loi que suit une variable dont la variable élevée au carré (l'intensité) suit la loi Gamma. C'est donc une loi à 2 paramètres :  $\mathcal{RN}[\mu, L]$  telle que :

$$\mathcal{RN}[\mu, L](u) = \frac{2}{\mu} \frac{\sqrt{L}}{\Gamma(L)} \left( \frac{\sqrt{L}u}{\mu} \right)^{2L-1} e^{-\left(\frac{\sqrt{L}u}{\mu}\right)^2}. \quad (36)$$

Pour  $L = 1$ , on retrouve la loi de Rayleigh :

$$\mathcal{RN}[\mu, L = 1](u) = \frac{2}{\mu} \left( \frac{u}{\mu} \right) e^{-\left(\frac{u}{\mu}\right)^2}.$$

La relation fondamentale liant la loi de Nakagami (variable d'amplitude) et la loi Gamma généralisée (variable en intensité, *i.e.* en carré de l'amplitude) s'obtient par un simple changement de variable, ce qui permet d'écrire :

$$\mathcal{RN}[\mu, L](u) = 2 u \mathcal{G}[\mu_G, L](u^2). \quad (37)$$

En associant les deux propriétés suivantes de la transformée de Mellin [Col59] :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[u^a f(u)](s) &= \mathcal{M}[f(u)](s + a) \\ \mathcal{M}[f(u^a)](s) &= \frac{1}{a} \mathcal{M}\left[f(u)\right]\left(\frac{s}{a}\right) \end{aligned}$$

et connaissant  $\phi_{\mathcal{G},x}$ , fonction caractéristique de deuxième espèce de la loi Gamma, on en déduit directement la fonction caractéristique de deuxième espèce de la loi de Nakagami  $\phi_{\mathcal{RN},x}$  :

$$\phi_{\mathcal{RN},x}(s) = \phi_{\mathcal{G},x}\left(\frac{s+1}{2}\right)$$

ce qui, en posant  $\mu_G = \mu^2$ , permet d'écrire directement :

$$\phi_{\mathcal{RN},x}(s) = \mu^{s-1} \frac{\Gamma\left(\frac{s-1}{2} + L\right)}{L^{\frac{s-1}{2}} \Gamma(L)}.$$

1. Il est important de rendre à Nakagami la paternité de cette loi, décrite par deux paramètres : moyenne et facteur de forme, et associée souvent à tort à la loi Gamma généralisée : c'est en 1942 que Nakagami a proposé le formalisme et une étude exhaustive des « m-distribution » et ce n'est qu'en 1960 que ses travaux ont été publiés en langue anglaise [Hof60]. Bien entendu, on trouve par exemple dans [Cra46] cette loi comme résultat de transformations à partir de la loi Gamma : cependant, aucune étude complète n'en avait été fait semble-t-il auparavant.

Ce raisonnement peut d'ailleurs s'appliquer à n'importe quel changement de variable en puissance de  $u$ . En effet, on montre aisément que si  $v = u^\alpha$ , alors :

$$p_u(u) = \alpha u^{\alpha-1} p_v(u^\alpha)$$

et l'on déduit alors directement des propriétés de la transformée de Mellin la fonction caractéristique de deuxième espèce pour la variable aléatoire  $u$  :

$$\phi_u(s) = \phi_v\left(\frac{s + \alpha - 1}{\alpha}\right). \quad (38)$$

Notons au passage que ce résultat serait utile pour l'analyse de la loi de Weibull [Nic02], bien connue du monde radar mais que nous n'aborderons pas dans cet article.

Les moments « classiques » de la loi de Nakagami se déduisent directement de  $\phi_{\mathcal{RN},x}(s)$  :

$$m_1 = \frac{\Gamma(L + \frac{1}{2})}{\sqrt{L} \Gamma(L)} \mu \quad m_2 = \mu^2.$$

Notons un particularisme de cette loi : le paramètre  $\mu$  est très simplement lié au moment d'ordre 2, et non au moment d'ordre 1. En revanche, l'expression implicite de  $L$  obtenue par le moment d'ordre 1 est très lourde à gérer : il n'est plus possible d'obtenir une expression simple (comme dans le cas de la loi Gamma : l'expression 31 donnait directement  $L$  en fonction de  $m_1$  et  $m_2$ ) pour inverser le paramètre  $L$ .

Le mode de cette d.d.p. est

$$m_{mode} = \sqrt{\frac{2L-1}{2L}} \mu$$

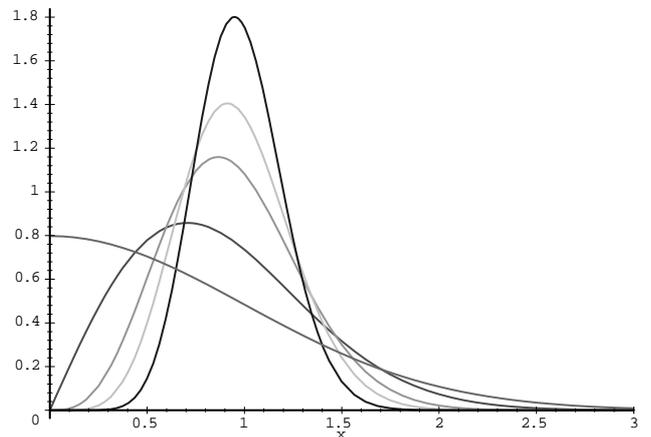


Figure 2 – Loi de Rayleigh-Nakagami  $\mathcal{RN}[\mu, L]$  avec  $\mu = 1$  et  $L = 0.5, 1, 2, 3, 5$ .

Les log-cumulants se déduisent directement de ceux de la loi Gamma. En effet, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_{\mathcal{RN},x(r)} &= \left. \frac{d^r \psi_{\mathcal{RN}}(s)}{ds^r} \right|_{s=1} \\ &= \left. \frac{d^r \log(\phi_{\mathcal{RN}}(s))}{ds^r} \right|_{s=1} \\ &= \left. \frac{d^r \log\left(\phi_{\mathcal{G}}\left(\frac{s+1}{2}\right)\right)}{ds^r} \right|_{s=1} \\ &= \left. \left(\frac{1}{2}\right)^r \frac{d^r \log(\phi_{\mathcal{G}}(s'))}{ds'^r} \right|_{s'=1} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^r \tilde{\kappa}_{\mathcal{G},x(r)} \end{aligned}$$

On en déduit alors :

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_{x(1)} &= \log(\mu) + \frac{1}{2}\Psi(L) - \frac{1}{2}\log(L) \\ \tilde{\kappa}_{x(2)} &= \frac{1}{4}\Psi(1, L) \end{aligned}$$

et pour tout  $r > 1$  :

$$\tilde{\kappa}_{x(r)} = \left(\frac{1}{2}\right)^r \Psi(r-1, L).$$

De manière plus générale, on montre que si  $v = u^\alpha$ , alors :

$$\tilde{\kappa}_{p_u, x(r)} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^r \tilde{\kappa}_{p_v, x(r)}.$$

Dans ce cas, on peut calculer directement  $L$  si on connaît le log-cumulant d'ordre 2 : le problème est du même ordre que celui rencontré dans le cas de la loi Gamma (inversion des fonctions Polygamma).

La log-moyenne s'écrit :

$$\tilde{m} = \mu \frac{e^{\frac{\Psi(L)}{2}}}{\sqrt{L}}. \quad (39)$$

En conclusion, on voit tout l'intérêt d'une telle approche puisque les expressions analytiques des log-moments et des log-cumulants ont une complexité comparable au cas de la loi Gamma, ce qui n'est pas le cas en statistique traditionnelle pour laquelle on ne peut plus obtenir une relation simple liant les deux premiers moments et le facteur de forme  $L$ .

### 3.3. la loi Gamma Inverse

Autre loi à deux paramètres et aussi solution du système de Pearson (solution de type V), la loi Gamma Inverse (figure 1) s'exprime selon l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{GI}[\nu, L](u) &= \frac{1}{\Gamma(L)} \frac{1}{L\nu} \left(\frac{L\nu}{u}\right)^{L+1} e^{-\frac{L\nu}{u}} \\ L \geq 0 \quad \nu > 0. \end{aligned}$$

Sa fonction caractéristique de deuxième espèce s'écrit :

$$\phi_x(s) = \nu^{s-1} \frac{\Gamma(L+1-s)}{L^{1-s} \Gamma(L)}.$$

On voit donc que les moments d'ordre  $n$  de la loi Gamma inverse ne sont pas définis pour  $n \geq L$  : la loi Gamma inverse est donc un exemple de loi à queue lourde. Ses log-cumulants, qui eux existent à tout ordre, s'écrivent :

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_{x(1)} &= \log(\nu) - \Psi(L) + \log(L) \\ \tilde{\kappa}_{x(2)} &= \Psi(1, L) \\ \tilde{\kappa}_{x(r)} &= (-1)^r \Psi(r-1, L) \quad \forall r > 1 \end{aligned}$$

Pour  $r$  pair, ce sont les mêmes que ceux de la loi Gamma, pour  $r$  impair, ce sont les opposés (voir la relation plus générale 20). Comme pour la loi Gamma, à partir de l'ordre 2, ils ne dépendent que du facteur de forme  $L$ . Notons que le log-cumulant d'ordre 3 est positif, ce qui est une condition suffisante pour avoir une queue lourde.

On aurait pu aussi introduire directement cette loi comme la loi inverse de la loi Gamma (cf. paragraphe 2.4), ce qui aurait permis de déduire directement les log-cumulants. Cependant, il était important de rappeler que la loi Gamma inverse est une solution particulière du système de Pearson et répertoriée à part entière dans les ouvrages.

### 3.4. la loi $\mathcal{K}$

Avec la loi  $\mathcal{K}$ , nous allons montrer comment l'utilisation des statistiques de deuxième espèce permet de proposer une méthode d'estimation des paramètres d'une loi complexe par simple utilisation des résultats déjà acquis avec la loi Gamma. La loi  $\mathcal{K}$  est une loi à 3 paramètres  $\mathcal{K}[\mu, L, M]$  définie par l'expression :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}[\mu, L, M](u) &= \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{2 L M}{\mu} \left(\frac{L M u}{\mu}\right)^{\frac{M+L}{2}-1} \\ &K_{M-L} \left[ 2 \left(\frac{L M u}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \right] \end{aligned} \quad (40)$$

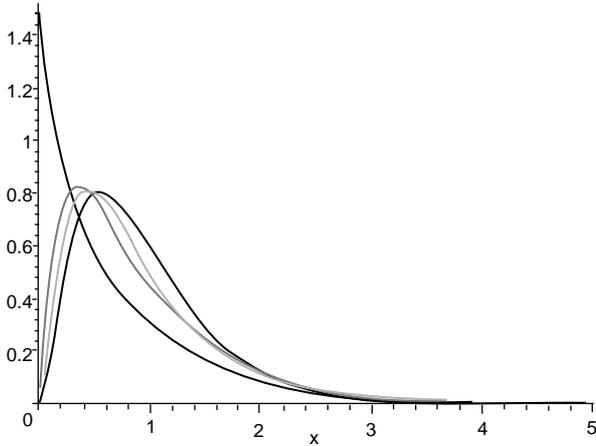


Figure 3 – Loi  $\mathcal{K}$  : chatoisement normalisé ( $L = 3$ ) bruitant multiplicativement une loi Gamma avec  $\mu = 1$  et  $M = 1, 3, 5$  et  $10$ .

avec  $K$  fonction de Bessel modifiée de seconde espèce. Sous cette forme, les calculs des moments et des log-moments nécessitent une bonne connaissance des propriétés des fonctions de Bessel et des tables de transformées les impliquant.

En fait, la loi  $\mathcal{K}$  est la loi que suit une variable aléatoire définie comme le produit de deux variables indépendantes suivant chacune une loi Gamma. Notons que cette définition a permis à Lomnicki [Lom67] de retrouver l'équation 40 en utilisant, déjà à l'époque, la transformée de Mellin.

Plus précisément, il est possible de définir la loi  $\mathcal{K}[\mu, L, M]$ , comme une convolution de Mellin de deux lois Gamma [NM98] :

$$\mathcal{K}[\mu, L, M] = \mathcal{G}[1, L] \hat{\star} \mathcal{G}[\mu, M]$$

Cette définition simplifie grandement les calculs de la fonction caractéristique de deuxième espèce et donc des moments et log-cumulants. En effet, de par les propriétés de la convolution de Mellin (paragraphe 2.4), et connaissant les caractéristiques des lois Gamma, on peut écrire directement la fonction caractéristique de deuxième espèce de la loi  $\mathcal{K}$  comme produit des fonctions caractéristiques de deuxième espèce des lois  $\mathcal{G}[1, L]$  et  $\mathcal{G}[\mu, M]$  :

$$\phi_x(s) = \mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+s-1)}{L^{s-1} \Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+s-1)}{M^{s-1} \Gamma(L)} \quad (41)$$

ce qui permet de déduire immédiatement les moments « classiques »  $m_1$  et  $m_2$  sans passer par la définition de la loi  $\mathcal{K}$  (et donc sans avoir besoin de connaître les propriétés des fonctions de Bessel) :

$$m_1 = \mu \quad m_2 = \mu^2 \frac{L+1}{L} \frac{M+1}{M}.$$

De la même manière on obtient directement les deux premiers log-cumulants comme somme des log-cumulants des lois Gamma  $\mathcal{G}[1, L]$  et  $\mathcal{G}[\mu, M]$  :

$$\tilde{\kappa}_{x(1)} = \log(\mu) + (\Psi(L) - \log(L)) + (\Psi(M) - \log(M)) \quad (42)$$

$$\tilde{\kappa}_{x(2)} = \Psi(1, L) + \Psi(1, M) \quad (43)$$

$$\tilde{\kappa}_{x(3)} = \Psi(2, L) + \Psi(2, M) \quad (44)$$

et on montre que pour tout  $r > 1$  :

$$\tilde{\kappa}_{x(r)} = \Psi(r-1, L) + \Psi(r-1, M).$$

Enfin le moment normalisé d'ordre 2 s'écrit :

$$\tilde{M}_2 = \Psi(1, L) + \Psi(1, M) \quad (45)$$

et la log-moyenne :

$$\tilde{m} = \mu \frac{e^{\Psi(L)}}{L} \frac{e^{\Psi(M)}}{M}. \quad (46)$$

Là aussi, il est aisé de déduire les paramètres de forme  $L$  et  $M$  grâce aux log-cumulants d'ordre 2 et 3 (relations 43 et 44) : une méthode numérique facile à mettre en œuvre et rapide est proposée dans [Nic02]. Ensuite, le paramètre d'échelle se déduit à l'aide du log-cumulant d'ordre 1 (relation 42).

Cette méthode est beaucoup plus aisée que la traditionnelle méthode des moments qui conduit à résoudre une équation du troisième degré. Notons aussi que la méthode du maximum de vraisemblance ne peut s'appliquer pour cette loi [Oli93].

## 4. applications

L'utilisation des statistiques de deuxième espèce s'avère donc facile à mettre en œuvre dans le cadre de l'étude des lois de probabilité fondamentales définies sur  $\mathbb{R}^+$ . Hormis l'introduction de la fonction Gamma et de ses dérivées logarithmiques (fonctions Digamma et Polygamma), aucune difficulté n'apparaît dans les expressions obtenues dans ce cadre qui sont en général limpides et de compréhension aisée.

Nous allons voir maintenant plusieurs applications innovantes de cette modélisation :

- une approche nouvelle pour modéliser les lois à trois paramètres utilisées en imagerie RSO,
- le cas d'un mélange additif de lois Gamma, pour lequel les approches traditionnelles mènent à des expressions très lourdes à manipuler,

- le cas des distributions  $\alpha$ -Stables positives, utilisées par exemple par Pierce pour caractériser le fouillis de mer [Pie97], et dont il est difficile d'estimer les paramètres (on ne connaît pas en général l'expression analytique de la d.d.p. de telles distributions qui sont des lois à queue lourde),
- enfin un autre exemple de distribution  $\alpha$ -Stable : celle proposé par Kuruoğlu et Zerubia [KJ01], et qui peut être vu comme une généralisation de la distribution de Rayleigh.

Auparavant, nous allons rappeler une méthode utilisée classiquement pour caractériser ces lois : l'utilisation des paramètres d'asymétrie  $\beta_1$  (*skewness*) et d'aplatissement  $\beta_2$  (*kurtosis*).

### 4.1. diagramme $(\beta_1, \beta_2)$

Traditionnellement on utilise, pour caractériser des lois appartenant au système de Pearson, les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement. Ces deux coefficients s'écrivent en fonction des moments centrés d'ordre 2, 3 et 4 :

$$\beta_1 = \frac{M_3^2}{M_2^3}$$

$$\beta_2 = \frac{M_4}{M_2^2}$$

Pour le système de Pearson, les courbes ainsi obtenues, telles qu'elles sont représentées classiquement [JK70, SK87], sont reprises figure 4. Le point caractéristique  $\beta_1 = 0, \beta_2 = 3$  correspond aux lois normales (quelle que soit leur variance).

Du fait du choix de l'élévation au carré des moments centrés d'ordre 3, cette analyse ne permet pas de distinguer deux lois ayant un coefficient d'asymétrie opposé : on ne peut donc distinguer lois « standards » et lois « à queue lourde ». Il semble donc que ce diagramme soit mal adapté aux lois définies sur  $\mathbb{R}^+$ .

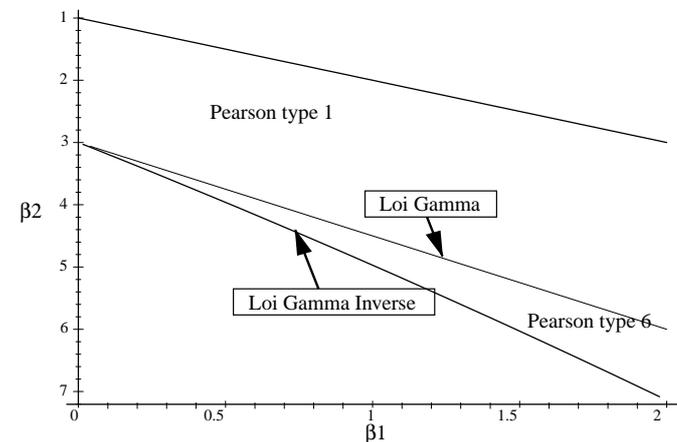


Figure 4 – Diagramme  $\beta_1$  et  $\beta_2$  pour le système de Pearson.

### 4.2. caractérisation de lois de texture dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 \tilde{\kappa}_3$

Le diagramme  $\beta_1 \beta_2$  est en fait fondé sur le calcul de moments centrés traditionnels et vise à comparer les lois avec le modèle habituel des lois : la loi gaussienne, pour laquelle le coefficient d'asymétrie est nul, et pour laquelle l'aplatissement est directement lié à la variance ( $\sigma$ ). Il est alors tentant de proposer une approche analogue, fondée sur les fonctions de deuxième espèce. Nous proposons dans ce paragraphe une méthode nouvelle : le diagramme  $\tilde{\kappa}_2 \tilde{\kappa}_3$ , i.e. la représentation du log-cumulant d'ordre 2 (toujours positif ou nul pour les d.d.p. définies sur  $\mathbb{R}^+$ ) en fonction du log-cumulant d'ordre 3.

Sur ce diagramme, l'origine correspond à la distribution homothétique. En raison des comportements asymptotiques des lois Gamma et Gamma inverse pour  $L \rightarrow \infty$ , ces lois sont représentées par des courbes issues de l'origine. Comme nous l'avons constaté, la loi Gamma a des valeurs négatives pour le log-cumulant d'ordre 3, tandis que la loi Gamma inverse, qui est une loi à queue lourde, a des valeurs positives pour ce log-cumulant. Notons qu'il est facile de montrer que la loi lognormale, qui a tous ses log-cumulants d'ordre  $n > 2$  nuls, occupe l'axe des ordonnées.

La figure 5 positionne donc dans ce diagramme les lois Gamma et Gamma inverse, la loi  $\mathcal{K}$  (qui occupe une surface au-dessus des lois Gamma, limitée supérieurement par une caustique définie par la loi  $\mathcal{K}[L, L]$ ), ainsi que les lois de Pearson type I (directe et inverse) et VI. Nous verrons dans le paragraphe suivant l'analyse de la loi de Pearson de type I inverse, qui apparaît naturellement dans ce diagramme, mais qui offre quelques surprises théoriques.

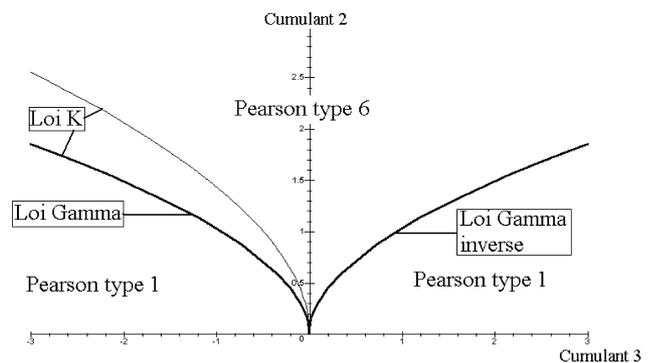


Figure 5 – Diagramme  $\tilde{\kappa}_2 \tilde{\kappa}_3$  pour les lois du système de Pearson et pour la loi  $\mathcal{K}$ .

### 4.3. une approche originale pour caractériser les lois à 3 paramètres utilisées en imagerie RSO

Connaissant les deux lois élémentaires à deux paramètres (Loi Gamma et loi Gamma Inverse), il est alors tentant de s'en servir comme fonctions de base génératrices et de se doter ainsi d'une sorte de grammaire en utilisant comme opérations élémentaires la convolution de Mellin et la convolution inverse de Mellin (on aurait pu tout à fait utiliser la corrélation de Mellin en lieu et place d'une convolution de Mellin par la loi Gamma inverse). En effet, soit deux lois  $p_A$  et  $p_B$ , de fonctions caractéristiques de deuxième espèce  $\phi_A$  et  $\phi_B$ , et de log-cumulants  $\tilde{\kappa}_A$  et  $\tilde{\kappa}_B$ . Appliquer une convolution de Mellin ou une convolution inverse de Mellin se traduira par un produit ou un rapport des fonctions caractéristiques de deuxième espèce, et par une somme ou une soustraction des log-cumulants (voir le tableau 1).

Les fonctions caractéristiques des lois obtenues par convolution directe ou inverse des deux lois normalisées : loi Gamma

( $\mathcal{G}[1, L]$ ) ou loi Gamma inverse ( $\mathcal{GI}[1, M]$ ) sont reprises dans le tableau 2. Au vu de ces expressions, et en consultant les tables de transformée de Mellin (et en utilisant aussi les propriétés de cette transformée), il est alors possible de retrouver les expressions analytiques de ces lois sans autre calcul [Nic02].

D'autre part, en considérant uniquement les cumulants de seconde espèce d'ordre 2 et 3, le tableau 3 résume le résultat obtenu par convolution directe ou inverse des deux lois normalisées : loi Gamma ( $\mathcal{G}[1, L]$ ) ou loi Gamma inverse ( $\mathcal{GI}[1, M]$ ). Rappelons que les cumulants de seconde espèce d'ordre 2 et 3 de ces lois ne font intervenir que les facteurs de forme.

Les lois traditionnellement utilisées dans le traitement des données RSO se retrouvent dans ces tableaux. Ce sont :

- la loi  $\mathcal{K}$
- les lois solutions du système de Pearson [NM98] correspondant à des lois de probabilités définies sur  $\mathbb{R}^+$ , *i.e.*, outre les lois Gamma et Gamma inverse, les solutions de type I (appelée aussi loi Beta) et de type VI (appelée aussi loi de Fisher).

**Tableau 2 – Fonctions caractéristiques de deuxième espèce des différentes lois obtenues par convolutions de Mellin (directe et inverse) de lois Gamma ( $\phi(s) = \mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+s-1)}{L^{s-1} \Gamma(L)}$ ) et Gamma inverse ( $\phi(s) = \mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+1-s)}{L^{1-s} \Gamma(L)}$ ). Les lois en gras correspondent à des expressions analytiques nouvelles. Les log-cumulants d'ordre 2 et 3 seront repris dans le tableau 3.**

$\hat{\star} \nearrow$	$\mathcal{G}[1, M]$	$\mathcal{GI}[1, M]$
$\mathcal{G}[\mu, L]$	Loi $\mathcal{K}$ $\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+s-1) \Gamma(M+s-1)}{L^{s-1} \Gamma(L) M^{s-1} \Gamma(M)}$	Pearson VI $\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+s-1) \Gamma(M+1-s)}{L^{s-1} \Gamma(L) M^{1-s} \Gamma(M)}$
$\mathcal{GI}[\mu, L]$	Pearson VI $\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+1-s) \Gamma(M+s-1)}{L^{1-s} \Gamma(L) M^{s-1} \Gamma(M)}$	<b>Loi <math>\mathcal{KI}</math></b> $\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+1-s) \Gamma(M+1-s)}{L^{1-s} \Gamma(L) M^{1-s} \Gamma(M)}$
$\hat{\star}^{-1} \nearrow$	$\mathcal{G}[1, M]$	$\mathcal{GI}[1, M]$
$\mathcal{G}[\mu, L]$	Pearson I $\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+s-1)}{L^{s-1} \Gamma(L)} \frac{M^{s-1} \Gamma(M)}{\Gamma(M+s-1)}$	<b>Bessel</b> $\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+s-1)}{L^{s-1} \Gamma(L)} \frac{M^{1-s} \Gamma(M)}{\Gamma(M+1-s)}$
$\mathcal{GI}[\mu, L]$	<b>Bessel</b> $\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+1-s)}{L^{1-s} \Gamma(L)} \frac{M^{s-1} \Gamma(M)}{\Gamma(M+s-1)}$	<b>Pearson I-Inverse</b> $\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+1-s)}{L^{1-s} \Gamma(L)} \frac{M^{1-s} \Gamma(M)}{\Gamma(M+1-s)}$

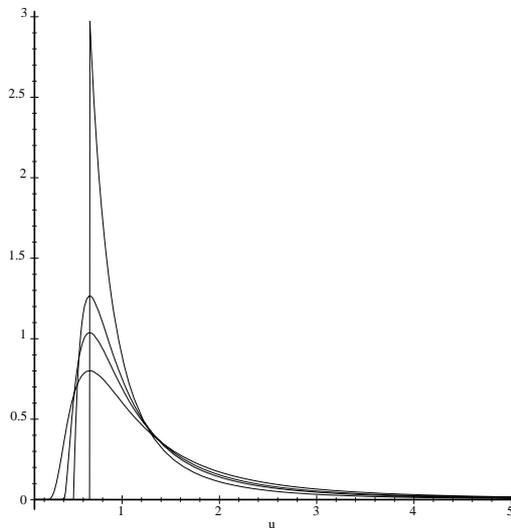
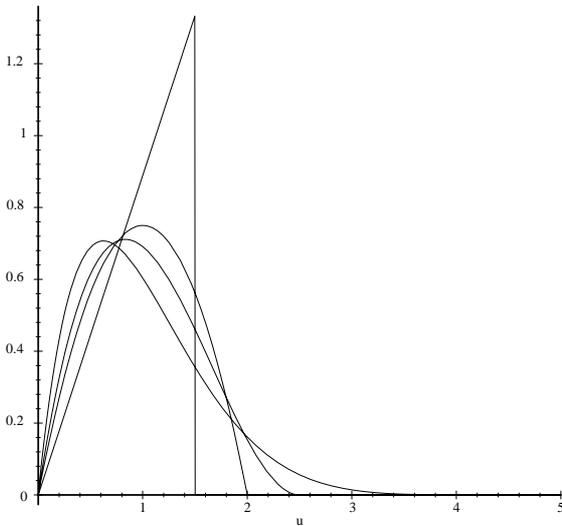


Figure 6 – Loi de Pearson type I  $\mathcal{P}I$  (en haut) et loi de Pearson type I Inverse  $\mathcal{P}II$  (en bas).

De plus, des lois inusitées sont générées par cet algèbre. Il s'agit :

– d'une nouvelle loi de Pearson de type I qui est effectivement une solution du système de Pearson et qui est *de facto* la loi de Pearson type I Inverse,  $\mathcal{P}II [\xi, L, M]$  :

$$\mathcal{P}II [\xi, L, M] = \frac{M}{L\xi} \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)\Gamma(M-L)} \left(\frac{L\xi}{Mu}\right)^{L+1} \left(1 - \frac{L\xi}{Mu}\right)^{M-L-1} \quad (47)$$

avec  $u \geq \frac{L\xi}{M}$  ,  $M \geq L + 1$ .

Cette expression se déduit simplement à l'aide des tables de transformée de Mellin [Col59] puisque cette loi s'exprime par la relation :

$$\mathcal{P}II [\xi, L, M] = \mathcal{G}I [\xi, L] \hat{\star}^{-1} \mathcal{G}I [1, M]$$

d'où sa fonction caractéristique :

$$\xi^{s-1} \frac{\Gamma(L+1-s)}{L^{1-s}} \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(M+1-s)}$$

cette dernière expression se trouvant effectivement dans les tables de transformée de Mellin. La figure 6 permet la comparaison de la loi  $\mathcal{P}I$  avec la loi  $\mathcal{P}II$  pour un même jeu de paramètres. Rappelons que la loi Pearson-I s'exprime par la relation :

$$\mathcal{P}I [\xi, L, M] = \frac{L}{M\xi} \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)\Gamma(M-L)} \left(\frac{Lu}{M\xi}\right)^{L-1} \left(1 - \frac{Lu}{M\xi}\right)^{M-L-1}$$

avec  $u \leq \frac{M}{L\xi}$  ,  $M \geq L + 1$ .

$\hat{\star} \nearrow$	$\mathcal{G} [1, M]$	$\mathcal{G}I [1, M]$
$\mathcal{G} [1, L]$	Loi $\mathcal{K}$ $\Psi(1, L) + \Psi(1, M)$ $\Psi(2, L) + \Psi(2, M)$	Pearson VI $\Psi(1, L) + \Psi(1, M)$ $\Psi(2, L) - \Psi(2, M)$
$\mathcal{G}I [1, L]$	Pearson VI $\Psi(1, L) + \Psi(1, M)$ $-\Psi(2, L) + \Psi(2, M)$	Loi $\mathcal{K}I$ $\Psi(1, L) + \Psi(1, M)$ $-\Psi(2, L) - \Psi(2, M)$

$\hat{\star}^{-1} \nearrow$	$\mathcal{G} [1, M]$	$\mathcal{G}I [1, M]$
$\mathcal{G} [1, L]$	Pearson I $\Psi(1, L) - \Psi(1, M)$ $\Psi(2, L) - \Psi(2, M)$	<b>Bessel</b> $\Psi(1, L) - \Psi(1, M)$ $\Psi(2, L) + \Psi(2, M)$
$\mathcal{G}I [1, L]$	<b>Bessel</b> $\Psi(1, L) - \Psi(1, M)$ $-\Psi(2, L) - \Psi(2, M)$	<b>Pearson I-Inverse</b> $\Psi(1, L) - \Psi(1, M)$ $-\Psi(2, L) + \Psi(2, M)$

Tableau 3 – Log cumulants d'ordre 2 et 3 des différentes lois obtenues par convolutions de Mellin (directe et inverse) de lois Gamma et Gamma inverse (cf. tableau 2). Pour simplifier la lecture, seuls les log-cumulants d'ordre 2 et 3 ont été repris dans ce tableau. Les lois en gras correspondent à des expressions analytiques nouvelles.

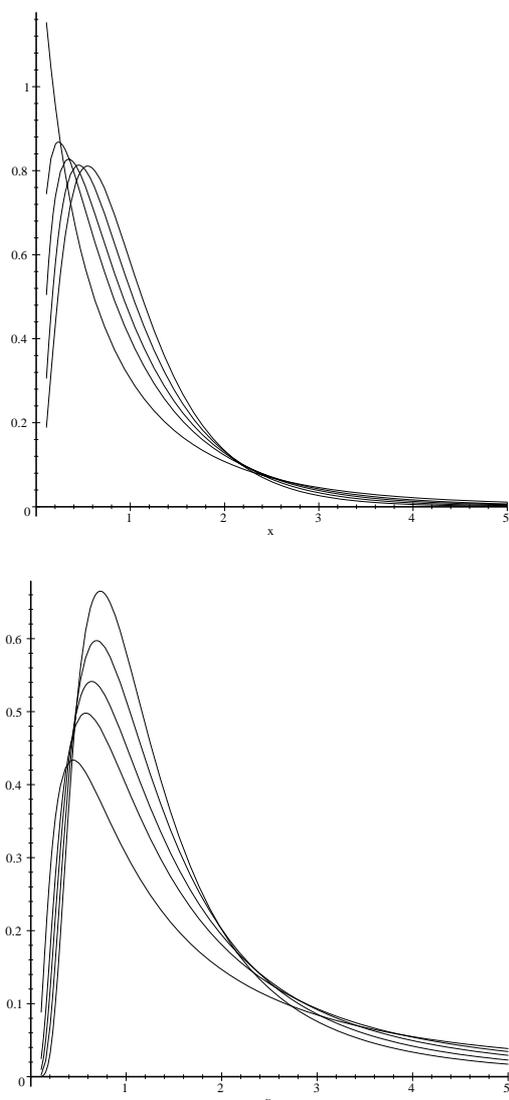


Figure 7 – Loi  $\mathcal{K}$  (en haut) et loi  $\mathcal{KI}$  (en bas).

Curieusement, elle n'est jamais citée dans les ouvrages classiques [SK87, JK70] alors que ceux-ci caractérisent isolément loi Gamma et loi Gamma inverse. De plus, la loi Pearson-I Inverse possède la curieuse propriété d'être localisée, sur le diagramme  $\beta_1\beta_2$ , entre la loi Gamma et la loi Gamma inverse, *i.e.* exactement là où se trouvent les solutions de Pearson type VI : en effet, le cas  $M \rightarrow \infty$  correspond à la loi Gamma inverse et la zone correspondant à la loi Pearson-I inverse ne peut être localisée qu'au-dessus de cette dernière courbe. On voit donc dans ce cas spécifique que ce dernier diagramme peut présenter des ambiguïtés alors que le diagramme  $\tilde{\kappa}_2\tilde{\kappa}_3$  sépare bien les solutions du système de Pearson.

– de la loi  $\mathcal{K}$  Inverse, elle aussi inusitée, et qui s'exprime :

$$\mathcal{KI}(u) = \frac{1}{L \Gamma(L) M \Gamma(M)} \frac{2}{\mu} \left( \frac{L M \mu}{u} \right)^{\frac{M+L}{2}+1} K_{M-L} \left[ 2 \left( \frac{L M \mu}{u} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (48)$$

La figure 7 permet la comparaison de la loi  $\mathcal{K}$  avec la loi  $\mathcal{K}$  Inverse pour un même jeu de paramètres. Comme pour la loi  $\mathcal{K}$ , la modélisation par convolution de Mellin permet de démontrer aisément que la loi  $\mathcal{K}$  Inverse tend vers une loi Gamma Inverse si un des facteurs de forme ( $L$  ou  $M$ ) tend vers l'infini. On dispose ainsi d'une loi à queue lourde à 3 paramètres.

– d'une combinaison :  $\mathcal{G} \hat{\star}^{-1} \mathcal{GI}$  ainsi que son inverse  $\mathcal{GI} \hat{\star}^{-1} \mathcal{G}$  dont on connaît une solution analytique sous forme d'une fonction de Bessel, mais qui s'avère ne pas être une loi de probabilité (la condition  $p_x(u) \geq 0$  n'est pas vérifiée)

On voit ainsi la richesse d'interprétation que l'on peut tirer des log-cumulants d'ordre 2 et 3 :  $\tilde{\kappa}_2$  et  $\tilde{\kappa}_3$ . En effet, par la simple analyse de ces grandeurs, on a ainsi une idée de l'écart qu'une loi étudiée possède par rapport aux références que sont la loi Gamma généralisée et son inverse, et les lois qui pavent cet espace : lois  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{KI}$ , les solutions du système de Pearson. L'analyse des log-cumulants d'ordre 2 et 3 permet aussi de prendre en compte des modèles plus complexes : nous allons voir maintenant comment on peut analyser dans ce même diagramme un mélange additif de lois Gamma et comment on peut alors proposer une méthode originale et facile à mettre en œuvre pour en déterminer les paramètres.

#### 4.4. mélange additif de lois Gamma

Un problème important en pratique (en particulier en imagerie RSO) est celui des mélanges additifs de lois Gamma. Contrairement au cas gaussien, on obtient le plus souvent des d.d.p. unimodales, sauf lorsque les deux lois initiales sont très différentes (voir figure 8). Nous allons montrer qu'il existe cependant une solution simple pour déterminer les paramètres du mélange en analysant ce problème à l'aide des log-cumulants d'ordre 2 et 3.

Considérons le mélange de lois Gamma suivant :

$$\lambda \mathcal{G}[\mu, L] + \lambda' \mathcal{G}[\mu', L]$$

avec  $\lambda \geq 0$ ,  $\lambda' \geq 0$  et  $\lambda + \lambda' = 1$ . Dans ce modèle, nous prenons la même valeur  $L$  pour les deux lois Gamma. On peut réécrire ce modèle en définissant la variable  $\rho$  telle que  $\mu' = \rho\mu$ , ce qui permet d'écrire le mélange sous la forme suivante :

$$\lambda \mathcal{G}[\mu, L] + (1 - \lambda) \mathcal{G}[\rho\mu, L] \quad (49)$$

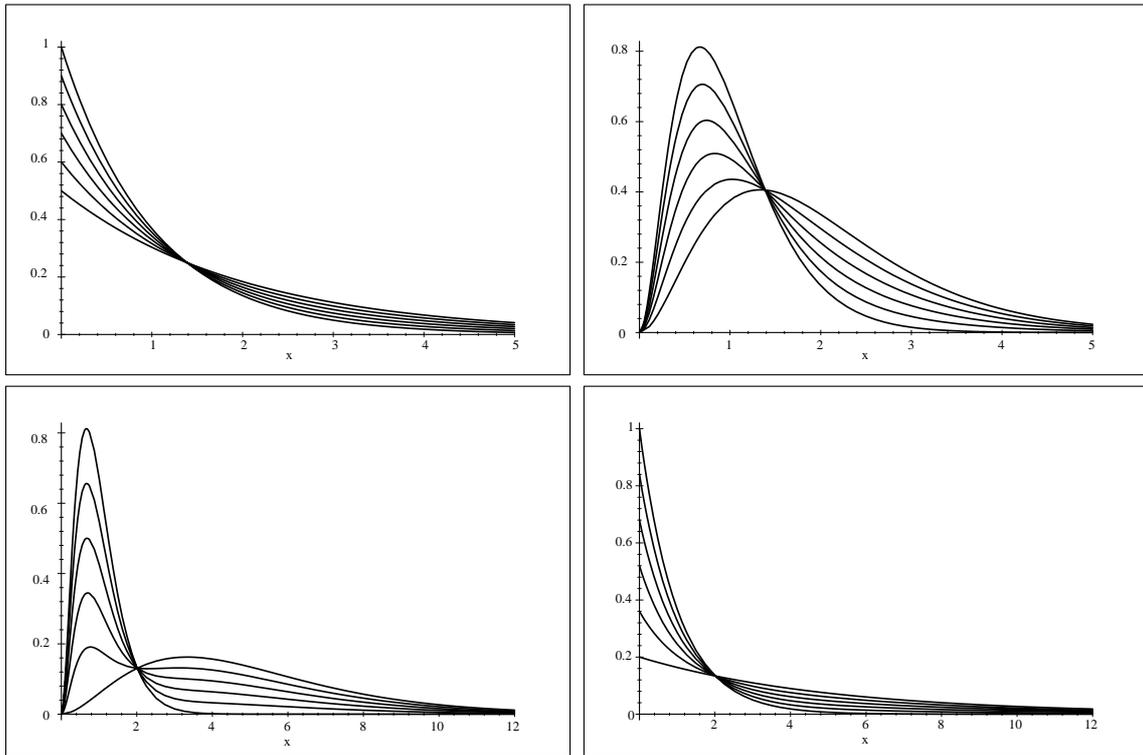


Figure 8. – Exemples de lois de mélange additif de lois Gamma. La colonne de gauche illustre des lois avec  $L = 1$ , la colonne de droite avec  $L = 3$ . Sur la première ligne,  $\rho = 2$  ( $\mu = 1$  et  $\mu' = 2$ ). Sur la seconde ligne  $\rho = 5$  ( $\mu = 1$  et  $\mu' = 5$ ),  $\lambda$  prend les valeurs 0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8 et 1.

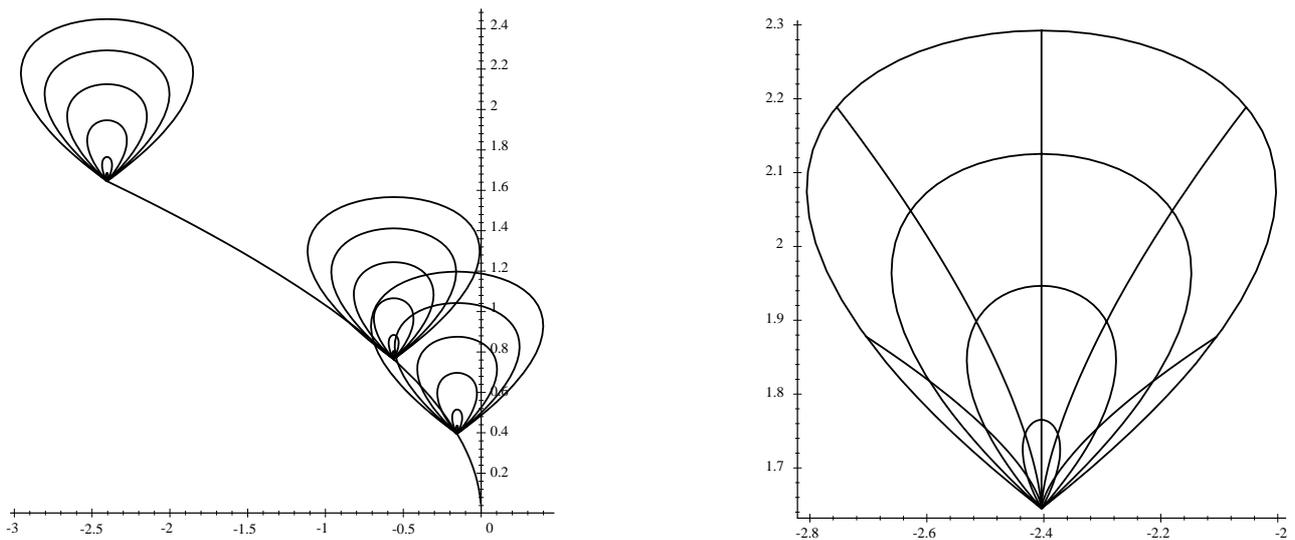


Figure 9 – Diagramme  $\tilde{k}_2$   $\tilde{k}_3$  pour un mélange de lois Gamma décrit par les paramètres  $\lambda$  (proportion du mélange) et  $\rho$  (rapport des moyennes des zones). À gauche, pour  $\lambda$  variant entre 0 et 1, on trace 3 diagrammes correspondant à plusieurs valeurs de  $\rho$  pour 3 valeurs de  $L$  ( $L = 1, 3$  et  $5$ ). Sur cette même figure, la loi Gamma est représentée pour  $L \in [1, \infty]$ . À droite, pour  $L = 1$ , on fait varier séparément  $\rho$  entre 0 et 5 (5 courbes, avec  $\lambda$  prenant les valeurs 0,1, 0,3, 0,5, 0,7 et 0,9) et  $\lambda$  entre 0 et 1 (4 courbes fermées, avec  $\rho$  prenant les valeurs 2, 3, 4 et 5), diagrammes que l'on place sur la même figure.

Le mélange est alors défini par une loi Gamma  $\mathcal{G}[\mu, L]$  (correspondant à une seule des composantes du mélange) et deux paramètres décrivant ce mélange :  $\lambda$  et  $\rho$ . La fonction caractéristique de deuxième espèce s'écrit :

$$\phi(s) = (\lambda + (1 - \lambda)\rho^{s-1}) \mu^{s-1} \frac{\Gamma(L + s - 1)}{L^{s-1} \Gamma(L)}.$$

À partir de cette expression, un calcul des log-cumulants peut se mener directement, donnant les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_{x(1)} &= \Psi(L) - \log L + \log \mu + (1 - \lambda) \log \rho \\ \tilde{\kappa}_{x(2)} &= \Psi(1, L) + \log(\rho)^2 \lambda (1 - \lambda) \\ \tilde{\kappa}_{x(3)} &= \Psi(2, L) + \log(\rho)^3 \lambda (1 - \lambda) (2\lambda - 1) \end{aligned}$$

Remarquons qu'à partir de l'ordre 2, ces log-cumulants ne dépendent pas de  $\mu$  et ont pour les valeurs limites  $\lambda = 0$  et  $\lambda = 1$  la même expression que la loi Gamma standard.

Supposons que la grandeur  $L$  soit connue ( $L$  peut en effet se concevoir comme une fonction d'appareil, et donc être connue de l'expérimentateur). On pose alors :

$$\begin{aligned} \overline{\tilde{\kappa}_{x(2)}} &= \tilde{\kappa}_{x(2)} - \Psi(1, L) \\ \overline{\tilde{\kappa}_{x(3)}} &= \tilde{\kappa}_{x(3)} - \Psi(2, L) \end{aligned}$$

$\lambda$  et  $\rho$  sont alors donnés par les solutions d'une équation du second degré, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2} \left( 1 \pm \frac{\overline{\tilde{\kappa}_{x(3)}}}{\sqrt{4\overline{\tilde{\kappa}_{x(2)}}^3 + \overline{\tilde{\kappa}_{x(3)}}^2}} \right) \\ \rho &= e^{-\frac{\sqrt{4\overline{\tilde{\kappa}_{x(2)}}^3 + \overline{\tilde{\kappa}_{x(3)}}^2}}{\overline{\tilde{\kappa}_{x(2)}}}} \end{aligned}$$

Les évolutions des différents paramètres dans le diagramme  $\tilde{\kappa}_2$   $\tilde{\kappa}_3$  sont données figure 9. Il est intéressant de remarquer que l'allure de ces courbes ne dépend pas de  $L$ .

Si on compare les résultats ainsi obtenus avec ceux que l'on trouve dans la littérature, on peut remarquer que cette approche ne nécessite qu'une hypothèse : la connaissance du paramètre  $L$ , tandis que l'analyse des mélanges par des méthodes classiques nécessitent en sus la connaissance de  $\mu$  [Was67].

## 4.5. distributions $\alpha$ -Stables positives

Nous allons maintenant appliquer la méthodologie proposée dans cet article à un cas de « loi à queue lourde » dont on ne connaît ni la forme analytique de la d.d.p., ni les moments à partir d'un certain ordre (ce qui interdit l'emploi de la méthode des moments).

Une distribution  $\alpha$ -stable positive est une d.d.p. caractérisée par deux paramètres :  $\alpha$  et  $\gamma$ , et n'est, en général, définie que par sa fonction caractéristique  $\Phi$  qui s'écrit (selon Pierce [Pie97]) :

$$\Phi = e^{-\gamma|\nu|^\alpha(1+j\text{sgn}(\nu)\tan(\frac{\alpha\pi}{2}))}$$

avec

$$\text{sgn}(\nu) = \begin{cases} 1, & \nu > 0 \\ 0, & \nu = 0, \\ -1, & \nu < 0 \end{cases} \quad 0 < \alpha < 1 \quad \gamma > 0.$$

Sauf pour certaines valeurs particulières de  $\alpha$ , il n'est pas possible de connaître la forme analytique de ces lois.

On peut néanmoins exprimer les moments (éventuellement fractionnaires) de ces lois :

$$m_\nu = \frac{\gamma^{\frac{\nu}{\alpha}} \sin(\pi\nu) \Gamma(\nu + 1) \left(1 + \left(\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)^2\right)^{\frac{\nu}{2\alpha}}}{\alpha \sin\left(\frac{\pi\nu}{\alpha}\right) \Gamma\left(1 + \frac{\nu}{\alpha}\right)} \quad (50)$$

Ces moments ne sont définis que pour  $\nu < \alpha < 1$ , ce qui veut dire que même le moment d'ordre 1 n'est pas défini : on est en présence d'une loi « à queue lourde ».

Il est néanmoins possible, par prolongement analytique, d'en déduire la fonction caractéristique de deuxième espèce, qui s'écrit :

$$\phi(s) = \frac{\gamma^{\frac{s-1}{\alpha}} \sin(\pi(s-1)) \Gamma(s) \left(1 + \left(\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)^2\right)^{\frac{s-1}{2\alpha}}}{\alpha \sin\left(\frac{\pi(s-1)}{\alpha}\right) \Gamma\left(1 + \frac{s-1}{\alpha}\right)}$$

On voit qu'elle est définie dans un voisinage complexe autour de la valeur  $s = 1$  : le théorème d'existence du paragraphe 2.5 permet donc d'affirmer que les log-moments et log-cumulants de tout ordre existent, alors que les moments d'ordre  $\nu \geq \alpha$  de cette loi ne sont pas définis.

Bien que la forme analytique soit assez compliquée, il est néanmoins possible d'obtenir des expressions simples des log-cumulants. Notons que ces expressions ne sont que des prolongements analytiques car les fonctions Gamma présentent des discontinuités pour la valeur  $s = 1$  requise pour le calcul des cumulants : il est alors nécessaire d'étudier la limite en  $s = 1$  pour obtenir les expressions analytiques. Les résultats suivants, qui nécessitent malgré tout de longs développements analytiques parfois sources d'erreur, ont été établis à l'aide d'un logiciel de calcul formel (Maple ©) :

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_1 &= \frac{(1-\alpha)\Psi(1)}{\alpha} + \frac{-\log\left(\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)}{\alpha} + \frac{\log\gamma}{\alpha} \\ \tilde{\kappa}_2 &= \frac{(1-\alpha^2)}{\alpha^2} \Psi(1,1) \\ \tilde{\kappa}_3 &= \frac{\alpha^3-1}{\alpha^3} \Psi(2,1) \end{aligned} \quad (51)$$

Ces expressions, finalement assez simples, illustrent bien tout l'intérêt de cette nouvelle approche. En effet, les deux paramètres de ces distributions se déduisent aisément puisque :

– grâce au log-cumulant d'ordre 2, on peut estimer le paramètre  $\alpha$  :

$$\alpha = \sqrt{\frac{\Psi(1,1)}{\Psi(1,1) + \tilde{\kappa}_2}}$$

– Connaissant  $\alpha$ , le premier log-cumulant permet d'obtenir  $\gamma$  :

$$\gamma = e^{\alpha\tilde{\kappa}_1 - (1-\alpha)\Psi(1) + \log\left(\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)},$$

– on peut aussi déduire  $\gamma$  uniquement de  $\tilde{\kappa}_1$  et  $\tilde{\kappa}_2$  :

$$\gamma = e^{\sqrt{\frac{\Psi(1,1)}{\Psi(1,1) - \tilde{\kappa}_2}} \tilde{\kappa}_1 - \left(1 - \sqrt{\frac{\Psi(1,1)}{\Psi(1,1) - \tilde{\kappa}_2}}\right) \Psi(1) + \log\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\Psi(1,1)}{\Psi(1,1) - \tilde{\kappa}_2}}\right)\right)}.$$

Notons que la transformée de Mellin apporte, sur un plan théorique, un éclairage nouveau et récent sur les lois à queue lourde [Tag02].

#### 4.6. une généralisation de la distribution de Rayleigh

Un autre exemple tiré des distributions  $\alpha$ -stables a permis à Kuruoğlu et Zerubia de proposer une généralisation de la distribution de Rayleigh [KJ01]. La d.d.p. s'exprime alors sous une forme à deux paramètres ( $\alpha$  et  $\gamma$ ) dont l'expression analytique est donnée par l'équation intégrale suivante :

$$p(u) = u \int_0^\infty v e^{-\gamma v^\alpha} J_0(uv) dv \quad (52)$$

avec  $J_0$  fonction de Bessel de première espèce. Cette distribution entre donc dans la catégorie des lois à « queue lourde » puisque ses moments ne sont pas définis à partir d'un certain ordre :  $\min(\alpha, 2)$ .

Pour calculer sa fonction caractéristique de deuxième espèce, deux approches sont possibles.

• La première cherche la transformée de Mellin de cette expression, ce qui conduit aisément [Nic02] au résultat suivant :

$$\phi(s) = \frac{2^s \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \gamma^{\frac{s-1}{\alpha}} \Gamma\left(\frac{1-s}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \alpha} \quad (53)$$

• Une deuxième approche consiste à réécrire l'expression 52 sous forme d'une corrélation de Mellin :

$$p(u) = u \left( J_0(u) \otimes \left( e^{-\gamma u^\alpha} \right) \right).$$

En utilisant la propriété 22, on retrouve alors directement le résultat 53.

On peut noter qu'en  $s = 1$ , la fonction caractéristique de deuxième espèce de cette loi admet comme limite la valeur 1 puisque

$$\lim_{s \rightarrow 1} \frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} = \frac{\alpha}{2}$$

C'est donc bien une d.d.p.

Au voisinage de  $s = 1$ , cette fonction est définie pour  $s < 1 + \min(\alpha, 2)$  et pour  $s > -1$ . Elle est donc bien définie dans un voisinage de  $s = 1$  et il est donc légitime de calculer ses log-moments et log-cumulants. Notons que le cas  $\alpha = 2$  donne la loi de Rayleigh, et que le cas  $\alpha = 1$  donne la loi

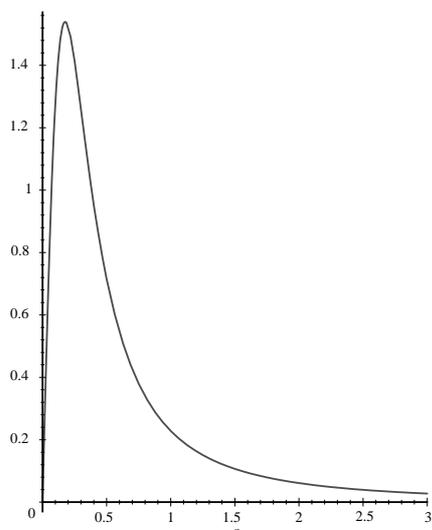
$$p(u) = \frac{\gamma u}{(u^2 + \gamma^2)^{\frac{3}{2}}}$$

La figure 10 illustre cette loi pour  $\alpha = 1$ ,  $\alpha = 1.5$  et  $\alpha = 2$  (loi de Rayleigh).

Bien que la forme analytique soit assez lourde, il est effectivement possible d'exprimer simplement les log-cumulants d'ordre 1 et 2 de cette loi de probabilité. Ici aussi, les expressions obtenues ne sont que des prolongements analytiques requis à cause des discontinuités des fonctions Gamma. Ici aussi, les expressions suivantes ont été établies sous Maple © :

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_1 &= -\Psi(1) \frac{1-\alpha}{\alpha} + \log\left(2\gamma^{\frac{1}{\alpha}}\right) \\ \tilde{\kappa}_2 &= \frac{\Psi(1,1)}{\alpha^2}. \end{aligned}$$

Le système ainsi obtenu est d'un maniement aisé. On retrouve facilement les paramètres de la loi avec les deux premiers log-cumulants :



$$\alpha = \sqrt{\frac{\Psi(1, 1)}{\tilde{\kappa}_2}}$$

$$\gamma = e^{\alpha \tilde{\kappa}_1 - \Psi(1)(1-\alpha)}$$

On vérifie que pour  $\alpha = 2$ , on retrouve la loi de Rayleigh (avec  $\mu = 2\sqrt{\gamma}$ ) :

$$\tilde{\kappa}_1 = \frac{1}{2}\Psi(1) + \log(2\sqrt{\gamma})$$

$$\tilde{\kappa}_2 = \frac{1}{4}\Psi(1, 1)$$

## 5. estimation des paramètres

Proposer une nouvelle méthodologie pour évaluer les paramètres d'une loi de probabilité nécessite de comparer les résultats avec ceux obtenus par des méthodes traditionnelles dans un cadre réaliste : celui où l'on ne dispose que de  $N$  échantillons. Dans ce cadre, il est important de connaître la variance des estimateurs utilisés pour pouvoir décider de l'utilisation d'une méthode. C'est le but de ce paragraphe que d'effectuer une comparaison exhaustive sur un cas d'école : la loi Gamma, pour laquelle méthode des moments, méthode des log-moments et méthode du maximum de vraisemblance sont applicables.

### 5.1. méthodes traditionnelles : méthode des moments et méthode du maximum de vraisemblance

#### 5.1.1. cadre expérimental

Soit une loi de probabilité décrite par  $p$  paramètres :  $\alpha_j, j \in [1, p]$ . L'estimation des paramètres décrivant cette loi s'effectue en général selon les deux approches suivantes :

- la méthode des moments : MM, qui consiste à calculer les estimées des moments d'ordre 1 à  $p$  de façon à obtenir un système de  $p$  équations à  $p$  inconnues (les paramètres de la d.d.p.). Si l'on dispose de  $N$  échantillons  $x_i, i \in [1, N]$  de la loi à estimer, l'estimée du moment d'ordre  $r$  :  $m_r$  s'exprime simplement par

$$m_r = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^r}{N}$$

*A priori*, il est nécessaire, pour déterminer  $p$  paramètres, que les moments jusqu'à l'ordre  $p$  existent, ce qui peut poser problème pour les lois à queue lourde par exemple. Aussi, il est possible d'utiliser des moments fractionnaires (comme les FLOM [SN93]), voire d'ordre inférieur (et même négatifs,

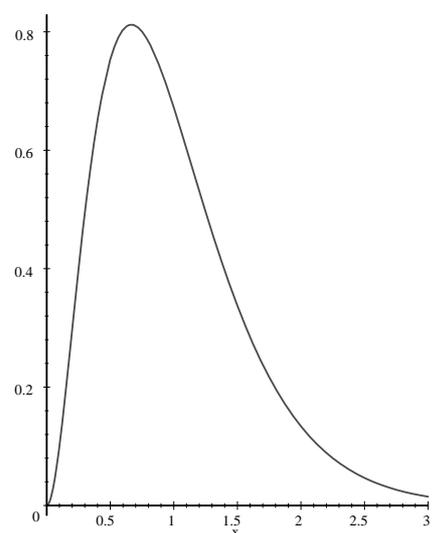
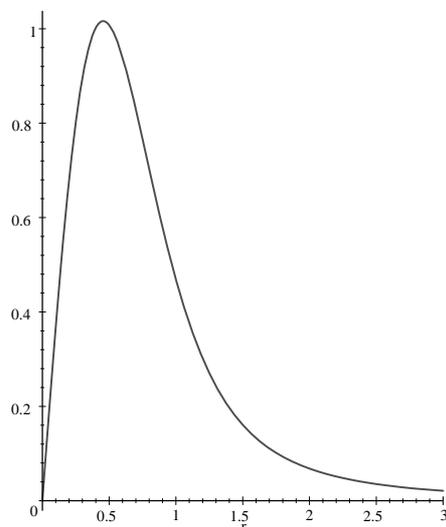


Figure 10 – Loi de Rayleigh généralisée [KJ01] :  $\alpha = 1$ ,  $\alpha = 1.5$  et  $\alpha = 2$ .

possibilité dont l'existence est justifiée au paragraphe 2.2) [NMB00], pour obtenir un système à résoudre. Notons cependant que les expressions s'avèrent parfois impossibles à inverser analytiquement et ne procurent qu'un système implicite souvent difficile à inverser numériquement.

– la méthode du maximum de vraisemblance consiste à considérer les  $N$  échantillons  $x_i$  comme  $N$  tirages indépendants de la loi que l'on cherche à estimer, de sorte qu'ils maximisent l'expression

$$\prod_{i=1}^N p_x(x_i)$$

ou, ce qui revient au même

$$\sum_{i=1}^N \log(p_x(x_i))$$

Ces expressions représentant un maximum, un calcul de dérivées partielles pour chaque paramètre permet alors d'avoir un autre système de  $p$  équations à  $p$  inconnues :

$$\frac{\partial \left( \sum_{i=1}^N \log(p_x(x_i)) \right)}{\partial \alpha_j} = 0 \quad (54)$$

Le problème dans ce cas repose dans l'existence de ces dérivées partielles, qui peut poser problème comme dans la loi  $\mathcal{K}$  [Oli93].

### 5.1.2. variance des estimateurs

Disposer ainsi de plusieurs méthodes concurrentes nécessite de pouvoir les comparer pour sélectionner celle qui serait susceptible de donner les résultats les plus fiables pour un utilisateur. *A priori*, on va rechercher la méthode qui donnera une variance minimale pour l'estimateur d'un paramètre donné, sachant que l'on ne dispose que de  $N$  échantillons.

On sait que pour les lois de la famille exponentielle la méthode du maximum de vraisemblance atteint la borne de Cramer Rao : dans la mesure où l'on peut calculer analytiquement les  $p$  dérivées partielles (expressions 54), et que le système d'équations peut effectivement être résolu, on obtient alors  $p$  estimées dont la variance est minimale. Cependant, bien des lois existantes (comme la loi  $\mathcal{K}$ ) n'ont pas d'expressions analytiques pour certaines dérivées partielles, ce qui rend la méthode du maximum de vraisemblance inemployable.

Dans ce cas, l'utilisation de la méthode des moments se justifie, même si dans l'absolu la variance des estimées ainsi obtenues est supérieure à la borne de Cramer Rao. La variance des estimées obtenues par la méthode des moments s'obtient grâce à une approche proposée par Kendall & Stuart [SK87] : connais-

sant des estimées des deux premiers moments  $m_1$  et  $m_2$  ainsi qu'une fonction  $g(m_1, m_2)$  ne dépendant que de ces deux grandeurs, ces derniers cherchent à en calculer la variance et, pour cela, effectuent un développement limité au premier ordre de la fonction  $g(m_1, m_2)$  autour des valeurs des moments théoriques  $m_{0,1}$  et  $m_{0,2}$  :

$$g(m_1, m_2) = g(m_{0,1}, m_{0,2}) + (m_1 - m_{0,1}) \frac{\partial g}{\partial m_1}(m_{0,1}, m_{0,2}) + (m_2 - m_{0,2}) \frac{\partial g}{\partial m_2}(m_{0,1}, m_{0,2})$$

En ayant vérifié que les  $\frac{\partial g}{\partial m_i}$  ne sont pas tous deux nuls en  $(m_{0,1}, m_{0,2})$ , on établit la variance de  $g$  comme l'erreur quadratique entre  $g(m_1, m_2)$  et  $g(m_{0,1}, m_{0,2})$  grâce à la formule suivante ([SK87], formule 10.12) :

$$\begin{aligned} \text{var} \{g(m_1, m_2)\} &= E \left\{ [g(m_1, m_2) - g(m_{0,1}, m_{0,2})]^2 \right\} \\ &= E \left\{ \left[ (m_1 - m_{0,1}) \frac{\partial g}{\partial m_1}(m_{0,1}, m_{0,2}) + (m_2 - m_{0,2}) \frac{\partial g}{\partial m_2}(m_{0,1}, m_{0,2}) \right]^2 \right\} \\ &= \frac{\partial g}{\partial m_1}{}^2(m_{0,1}, m_{0,2}) \text{var} \{m_1\} \\ &\quad + \frac{\partial g}{\partial m_2}{}^2(m_{0,1}, m_{0,2}) \text{var} \{m_2\} \\ &\quad + 2 \frac{\partial g}{\partial m_1}(m_{0,1}, m_{0,2}) \frac{\partial g}{\partial m_2}(m_{0,1}, m_{0,2}) \text{cov} \{m_1, m_2\} \end{aligned} \quad (55)$$

Cette méthode est bien évidemment généralisable à des fonctions faisant intervenir des moments  $m_i$  d'ordre  $i$  quelconque, sachant par ailleurs que la définition de la matrice de variance-covariance permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \text{var} \{m_i\} &= \frac{1}{N} (m_{2i} - m_i^2) \\ \text{cov} \{m_i, m_j\} &= \frac{1}{N} (m_{i+j} - m_i m_j) \end{aligned}$$

### 5.2. méthode des log-moments

Nous avons donc proposé dans cet article une méthodologie nouvelle pour l'analyse de d.d.p. définies sur  $\mathbb{R}^+$  fondée sur les log-moments et les log-cumulants. Nous allons voir dans ce paragraphe comment la mettre en œuvre et comment calculer les variances des estimateurs ainsi obtenus.

### 5.2.1. description

La méthode des log-moments : MLM consiste à calculer les estimées des log-moments et des log-cumulants de façon à obtenir un système de  $p$  équations à  $p$  inconnues (les paramètres de la d.d.p.). Si l'on dispose de  $N$  échantillons  $x_i, i \in [1, N]$  de la loi à estimer, l'estimée du log-moment d'ordre  $p$   $\tilde{m}_p$  s'exprime simplement par :

$$\tilde{m}_p = \frac{\sum_{i=1}^N \log x_i^p}{N}$$

A priori, il est nécessaire, pour déterminer  $p$  paramètres, que les log-moments existent jusqu'à l'ordre  $p$  : ce qui est en général vrai grâce à notre théorème d'existence vérifié généralement par les lois utilisées en traitement du signal et des images.

### 5.2.2. variance des estimateurs

Puisque nous nous plaçons sur une échelle logarithmique, le critère de l'erreur quadratique (appliqué dans la formule 55), est remplacé par un autre critère que nous appellerons « erreur quadratique normalisée »  $E_{qn}$ , qui est en fait l'erreur quadratique calculée sur une échelle logarithmique :

$$E_{eqn} = E \left\{ \left( \log \left( \frac{x}{y} \right) \right)^2 \right\}.$$

Dans ce même esprit, on introduit les variance et covariance de deuxième espèce :  $\tilde{\text{vâr}}$  et  $\tilde{\text{côv}}$  sous la forme

$$\tilde{\text{vâr}} \{ \tilde{m}_i \} = E \left\{ \left[ (\log x)^i - \tilde{m}_i \right]^2 \right\} = \frac{1}{N} (\tilde{m}_{2i} - \tilde{m}_i^2)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\text{côv}} \{ \tilde{m}_i, \tilde{m}_j \} &= E \left\{ \left[ (\log x)^i - \tilde{m}_i \right] \left[ (\log x)^j - \tilde{m}_j \right] \right\} \\ &= \frac{1}{N} (\tilde{m}_{i+j} - \tilde{m}_i \tilde{m}_j) \end{aligned}$$

les  $\tilde{m}_i$  étant les log-moments d'ordre  $i$ .

Avec cette nouvelle approche, et en s'inspirant de la démarche précédente, dans le cas où une fonction  $g$  s'exprime en fonction des estimées des deux premiers log-moments :  $g(\tilde{m}_1, \tilde{m}_2)$ , on peut en exprimer un développement limité autour des valeurs théoriques des deux premiers log-moments  $\tilde{m}_{0,1}, \tilde{m}_{0,2}$  comme :

$$\begin{aligned} g(\tilde{m}_1, \tilde{m}_2) &= g(\tilde{m}_{0,1}, \tilde{m}_{0,2}) + (\tilde{m}_1 - \tilde{m}_{0,1}) \frac{\partial g}{\partial \tilde{m}_1}(\tilde{m}_{0,1}, \tilde{m}_{0,2}) \\ &+ (\tilde{m}_2 - \tilde{m}_{0,2}) \frac{\partial g}{\partial \tilde{m}_2}(\tilde{m}_{0,1}, \tilde{m}_{0,2}) \end{aligned}$$

En ayant vérifié que les  $\frac{\partial g}{\partial \tilde{m}_i}$  ne sont pas tous deux nuls en  $(\tilde{m}_{0,1}, \tilde{m}_{0,2})$ , on établit la variance de  $g$  par la formule formellement identique à celle du précédent paragraphe :

$$\begin{aligned} \text{Var} \{ g(\tilde{m}_1, \tilde{m}_2) \} &= E \left\{ \left[ g(\tilde{m}_1, \tilde{m}_2) - g(\tilde{m}_{0,1}, \tilde{m}_{0,2}) \right]^2 \right\} \\ &= E \left\{ \left[ (\tilde{m}_1 - \tilde{m}_{0,1}) \frac{\partial g}{\partial \tilde{m}_1}(\tilde{m}_{0,1}, \tilde{m}_{0,2}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\tilde{m}_2 - \tilde{m}_{0,2}) \frac{\partial g}{\partial \tilde{m}_2}(\tilde{m}_{0,1}, \tilde{m}_{0,2}) \right]^2 \right\} \\ &= \frac{\partial g}{\partial \tilde{m}_1}^2(\tilde{m}_{0,1}, \tilde{m}_{0,2}) \tilde{\text{vâr}} \{ \tilde{m}_1 \} + \frac{\partial g}{\partial \tilde{m}_2}^2(\tilde{m}_{0,1}, \tilde{m}_{0,2}) \tilde{\text{vâr}} \{ \tilde{m}_2 \} \\ &+ 2 \frac{\partial g}{\partial \tilde{m}_1}(\tilde{m}_{0,1}, \tilde{m}_{0,2}) \frac{\partial g}{\partial \tilde{m}_2}(\tilde{m}_{0,1}, \tilde{m}_{0,2}) \tilde{\text{côv}} \{ \tilde{m}_1, \tilde{m}_2 \} \end{aligned}$$

Comme précédemment, cette méthode est bien évidemment généralisable à des fonctions faisant intervenir des moments  $\tilde{m}_i$  d'ordre  $i$  quelconque.

## 5.3. cas de la loi Gamma

Nous allons donc utiliser la loi Gamma comme cas d'école pour comparer les différentes méthodes possibles : en effet, cette loi n'est pas à queue lourde (donc la méthode des moments est utilisable, ainsi que de ce fait la méthode des Log-moments) et on en connaît les dérivées partielles par rapport aux paramètres (ce qui permet d'appliquer la méthode du maximum de vraisemblance).

### 5.3.1. variance des estimées des paramètres de la loi Gamma par la méthode des moments (MM)

La méthode des moments consiste donc à utiliser les deux premiers moments pour en déduire  $L$  et  $\mu$  (équations 30 et 31).

Dans le cas de la méthode des moments, en appliquant la méthode de Kendall et Stuart présentée au paragraphe 5.1.2, la variance des estimateurs de  $\mu$  et de  $L$  s'écrit :

$$\text{Var}_{MM} \{ \hat{\mu} \} = \frac{\mu^2}{NL} \quad (56)$$

$$\text{Var}_{MM} \{ \hat{L} \} = \frac{2L(L+1)}{N} \quad (57)$$

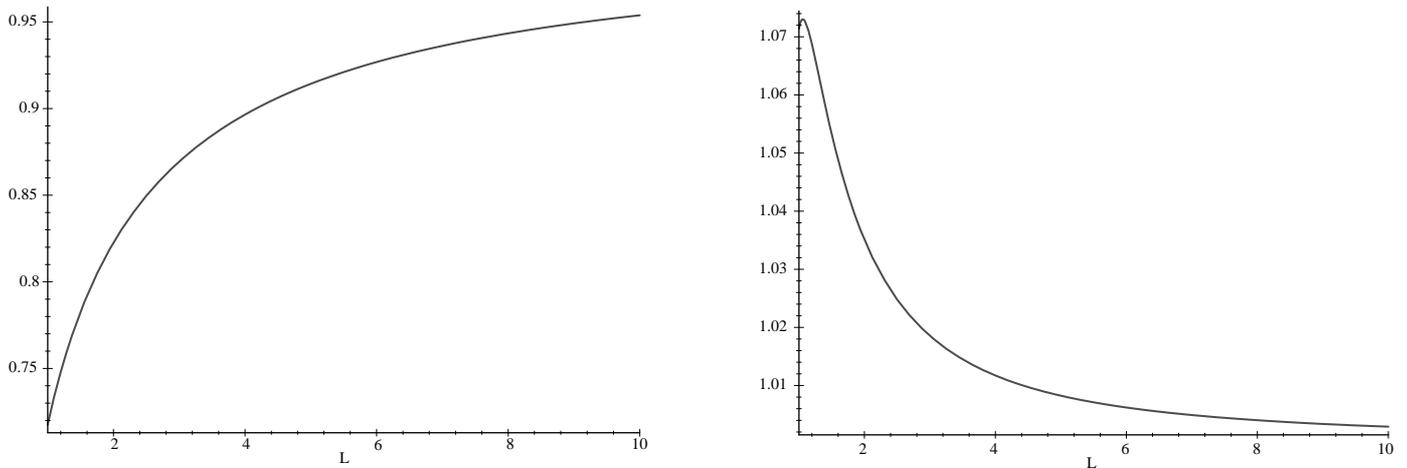


Figure 10 – Loi Gamma. À gauche, comparaison de la variance de l’estimateur de  $L$  par la méthode des log-moments avec la méthode des moments. À droite, comparaison de la variance de l’estimateur de  $L$  par la méthode des log-moments avec la méthode des moments d’ordre inférieur (avec une seule valeur de  $\nu : 0,35$ ). Les courbes représentent le ratio des écart types pour  $L$  variant entre 1 et 10.

### 5.3.2. variance des estimées des paramètres de la loi Gamma par la Méthode des Log-Moments (MLM)

Le paramètre  $L$  se déduit de la relation (33)

$$\Psi(1, L) = \tilde{\kappa}_{x(2)}$$

qui peut se réécrire en fonction de  $(\tilde{m}_1, \tilde{m}_2)$  :

$$\Psi(1, L) = \tilde{m}_2 - \tilde{m}_1^2.$$

On effectue alors le développement limité proposé précédemment, qui nécessite d’utiliser l’expression de la dérivée d’une fonction implicite et, bien que les expressions mettent en jeu les log-moments d’ordre 1 à 4 dont les expressions sont extrêmement lourdes, le résultat se simplifie et on obtient :

$$Var_{MLM} \left\{ \hat{L} \right\} = \frac{1}{N} \frac{\Psi(3, L) + 2\Psi(1, L)^2}{\Psi(2, L)^2} \tag{58}$$

La figure 11 (gauche) présente le ratio de l’écart type de la variance de  $\hat{L}$  calculé par la méthode des log-moments par l’écart type de la variance de  $\hat{L}$  calculé par la méthode des moments. On voit tout l’intérêt d’utiliser cette nouvelle méthode pour de faibles valeurs de  $L$  puisque le gain peut atteindre 30 %, ce qui, à variance d’estimateur égale, se traduit par une diminution du même ordre pour la fenêtre d’analyse, donc une meilleure localisation de cette estimée.

Pour le paramètre  $\mu$ , le calcul est beaucoup plus laborieux, et on arrive finalement à l’expression suivante, dont l’interprétation est peu limpide, mais dont on peut faire aisément une implémentation numérique :

$$\frac{\mu^2 \left( 2\Psi(1, L)L\Psi(3, L) - (\Psi(1, L))^2 L^2\Psi(3, L) + 4(\Psi(1, L))^3 L - 2(\Psi(1, L))^4 L^2 - 2L(\Psi(2, L))^2 + \Psi(1, L)L^2(\Psi(2, L))^2 - 2(\Psi(1, L))^2 - \Psi(3, L) \right)}{N L^2 (\Psi(2, L))^2}$$

**Tableau 4 – Loi Gamma, Méthode des Moments d’Ordre Inférieur.**  
Valeurs optimales du paramètre  $\nu$  pour minimiser la variance de l’estimateur de  $L$  en fonction de  $L$ .

$L$	$\nu_{opt}$
1	-0,35
2	-0,44
3	-0,56
4	-0,59

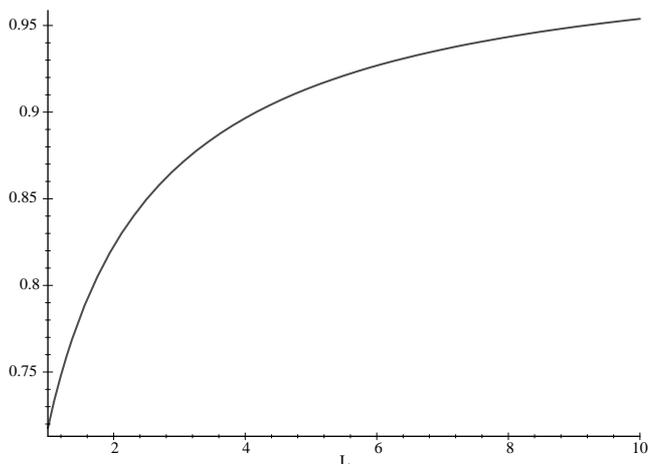
Les variances des estimateurs de  $L$  et  $\mu$  peuvent s’établir par la méthode de Kendall et Stuart, utilisée au paragraphe 5.3.1 (méthode des moments). On obtient pour  $L$  la relation suivante :

$$Var_{MMOI} \{ \hat{L} \} = \frac{1}{N} \frac{(2L(L+1) + \nu(4L(\nu+2) + (\nu+4)(\nu+1)^2)) \Gamma(L) \Gamma(2\nu+L)}{(\Gamma(\nu+L))^2} \tag{59}$$

Le problème de cette relation est qu’elle présente effectivement un minimum pour des valeurs de  $\nu$  fonction de  $L$ , mais que ce minimum ne s’exprime que par une relation implicite. Aussi est-il nécessaire de calculer numériquement les valeurs de  $\nu$ . Le tableau 4 donne quelques valeurs de  $\nu$  en fonction de  $L$ . En l’absence d’information sur la valeur de  $L$ , le choix de la valeur  $\nu = -0.35$  semble être un bon compromis.

La figure 11(courbe de droite) présente le ratio de l’écart type de la variance de  $\hat{L}$  calculé par la méthode des log-moments par l’écart type de la variance de  $\hat{L}$  calculé par la méthode des moments d’ordre inférieur avec  $\nu = -0.35$ . Il est intéressant de noter que la méthode des moments d’ordre inférieur est légèrement meilleure que la méthode des log-moments : néanmoins, il est nécessaire, si l’on veut utiliser au mieux cette méthode, de connaître  $L$  pour pouvoir choisir la valeur de  $\nu$  optimale. Comme la différence est somme toute assez faible, on peut promouvoir la méthode des log-moments par le fait qu’elle ne nécessite pas d’avoir à déterminer un paramètre menant à l’optimalité de la méthode.

Quand à la variance de l’estimateur de  $\mu$ , il est tout-à-fait possible d’en exprimer la formulation analytique. Cependant on démontre aisément que la valeur minimale de cette variance est obtenue pour  $\nu = 0$ , ce qui n’a rien d’étonnant puisque cette valeur correspond à la méthode du maximum de vraisemblance.



**Figure 12 – Loi Gamma : comparaison de la variance de l’estimateur de  $\mu$  par la méthode des log-moments avec la méthode des moments.** La courbe représente le ratio des écart types pour  $L$  variant entre 1 et 10.

Aussi la figure 12 présente le ratio de l’écart type de  $\hat{\mu}$  calculé par la méthode des log-moments par l’écart type de  $\hat{\mu}$  calculé par la méthode des moments.

On peut constater que la méthode des moments donne de meilleurs résultats pour de faibles valeurs de  $L$  : rappelons aussi que cet estimateur est celui de la méthode du maximum de vraisemblance et atteint donc le minimum de la variance de l’estimateur (borne de Cramer Rao)

### 5.3.3. variance des estimées des paramètres de la loi Gamma par la méthode des moments d’ordre inférieur (MMOI)

L’existence de la fonction caractéristique de deuxième espèce pour des valeurs de  $s$  inférieures à 1 justifie l’utilisation de moments d’ordre inférieur, *i.e.* négatifs. Dans le cas de la loi Gamma, on sait que les moments d’ordre inférieur existent pour  $\nu > -L$ . Pour une valeur de  $\nu$  donnée vérifiant  $\nu > -L$  et en utilisant les trois moments  $\mu_\nu, \mu_{\nu+1}$  et  $\mu_{\nu+2}$ , il est aisé de montrer que l’on en déduit  $\hat{\mu}$  et  $\hat{L}$  par les relations :

$$\hat{\mu} = \frac{\hat{m}_{\nu+1}}{\hat{m}_\nu} (1 + \nu) - \nu \frac{\hat{m}_{\nu+2}}{\hat{m}_{\nu+1}}$$

$$\hat{L} = \frac{1}{\hat{m}_\nu \left( \frac{\hat{m}_{\nu+2}}{\hat{m}_{\nu+1}^2} \right) - 1} - \nu$$

Pour  $\nu = 0$ , on retrouve effectivement les résultats de la méthode des moments (équations 30 et 31).

**Tableau 5 – Nombre de points (et exemple de fenêtres d’analyse) nécessaires pour estimer les paramètres  $L$  et  $\mu$  d’une loi Gamma avec 10 % d’erreur. Les méthodes utilisées sont, pour le facteur de forme  $L$ , la méthode des moments (MM), la méthode des moments d’ordres inférieurs avec  $\nu = -0.35$  (MMOI), la méthode des log-moments (MLM). La borne de Cramer Rao est calculée par le biais de la matrice d’information de Fisher. Pour  $\mu$ , seule la méthode des moments est utilisée.**

Loi Gamma					
$L$	$\hat{L}$				$\hat{\mu}$
	MM	MMOI	MLM	Bornes Cramer Rao	MM
1	400 $20 \times 20$	179 $13 \times 13$	206 $14 \times 14$	155 $12 \times 12$	100 $10 \times 10$
2	300 $17 \times 17$	189 $14 \times 14$	203 $14 \times 14$	172 $13 \times 13$	50 $7 \times 7$
3	267 $16 \times 16$	194 $14 \times 14$	202 $14 \times 14$	180 $13 \times 13$	33 $6 \times 6$
5	240 $15 \times 15$	197 $14 \times 14$	201 $14 \times 14$	187 $14 \times 14$	20 $4 \times 4$
10	220 $14 \times 14$	199 $14 \times 14$	200 $14 \times 14$	194 $14 \times 14$	10 $3 \times 3$

**5.3.4. récapitulatif**

Nous proposons pour récapituler ces résultats d’afficher dans le tableau 5 la dimension des fenêtres optimales pour ces trois méthodes lorsque l’on cherche à atteindre 10 % d’erreur (*i.e.* l’écart type a 10 % de la valeur à estimer), ceci pour l’estimation du paramètre de forme  $L$ . Pour le paramètre  $\mu$ , seule la méthode des moments (qui est aussi celle du maximum de vraisemblance) est à utiliser.

Tout d’abord remarquons que, pour une erreur relative identique (10 %), l’estimation de  $L$  nécessite beaucoup plus de points que l’estimation de  $\mu$ . Ensuite, l’estimation de  $\mu$  requiert d’autant moins de points que  $L$  est grand, *i.e.* que la loi est localisée. Enfin, il est intéressant de noter que la Méthode des Log-Moments présente une particularité qui est de requérir, pour l’estimation du paramètre de forme, à peu près le même nombre de points pour toute valeur de  $L$ , alors que la méthode des moments nécessite un nombre d’autant plus important que les valeurs de  $L$  sont faibles. À cela, deux remarques peuvent être faites :

- On peut montrer que la variance de  $\hat{L}$  pour la Méthode des Log-Moments (formule 58) est quasiment quadratique en  $L$  :

$$\frac{\Psi(3, L) + 2\Psi(1, L)^2}{\Psi(2, L)^2} \simeq 2 L^2$$

Donc, si on cherche une erreur relative constante, le nombre de points est alors indépendant de  $L$ .

- Il est intéressant d’analyser le même problème pour la loi normale  $\mathcal{N}[\mu, \sigma]$ . En effet, il est aisé de montrer que les variances des estimateurs de  $\mu$  et  $\sigma$  pour la méthode des moments ne dépendent que de  $\sigma$  et s’écrivent :

$$\begin{aligned} \text{Var}_{\mathcal{N}}(\mu) &= \frac{\sigma^2}{N} \\ \text{Var}_{\mathcal{N}}(\sigma) &= \frac{\sigma^2}{2N} \end{aligned}$$

En choisissant des lois normales avec  $\mu = 1$ , des valeurs de  $\sigma$  comparables et un critère identique, on peut calculer les dimensions de fenêtres requises, ce qui est repris dans le tableau 6.

On voit que la méthode des moments nécessite un nombre de points constant pour l’estimation du paramètre de forme  $\sigma$ , propriété analogue donc à la méthode des Log-Moments appliquée à la loi Gamma.

**Tableau 6 – Nombre de points (et exemple de fenêtres d’analyse) nécessaires pour estimer les paramètres  $\sigma$  et  $\mu$  d’une loi Gaussienne avec 10 % d’erreur.**

Loi Gaussienne		
$\sigma$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\mu}$
1	200 $14 \times 14$	100 $10 \times 10$
0.707	200 $14 \times 14$	50 $7 \times 7$
0.577	200 $14 \times 14$	33 $6 \times 6$
0.447	200 $14 \times 14$	20 $4 \times 4$
0.316	200 $14 \times 14$	10 $3 \times 3$

Pour achever cette analyse, calculons la matrice d’information de Fisher pour la loi Gamma<sup>2</sup> :

$$\begin{pmatrix} \frac{L}{\mu^2} & 0 \\ 0 & \Psi(1, L) - \frac{1}{L} \end{pmatrix},$$

ce qui permet de calculer les bornes de Cramer-Rao, reprises dans le tableau 5.

2. La forme diagonale de cette matrice justifie *a posteriori* le choix de l’expression analytique de la loi Gamma que nous avons choisie et qui diffère légèrement de celle que l’on trouve dans des ouvrages de référence comme [JK70, SK87].

**Tableau 7 – Ecart type des estimées de  $\lambda$  et de  $\rho$  dans le cas d'un mélange de lois Gamma. La dimension de la fenêtre d'analyse est de  $10 \times 10$ . L'écart type étant inversement proportionnel à la racine carrée du nombre de points de la fenêtre d'analyse, ce tableau peut servir à déterminer la fenêtre optimale si on se fixe l'erreur maximum.**

$\rho = 2$		
$\lambda$	$Ect_\lambda$	$Ect_\rho$
.1	.553	3.874
.2	.617	1.967
.3	.676	1.235
.4	.730	.784
.5	.780	.455

$\rho = 5$		
$\lambda$	$Ect_\lambda$	$Ect_\rho$
.1	.071	2.638
.2	.083	1.606
.3	.092	1.183
.4	.099	.925
.5	.105	.749

$\rho = 10$		
$\lambda$	$Ect_\lambda$	$Ect_\rho$
.1	.043	3.867
.2	.052	2.481
.3	.059	1.918
.4	.063	1.591
.5	.065	1.380

**Tableau 8 – Dimension optimale de fenêtre pour une erreur relative de 10 % sur  $\lambda$  et sur  $\rho$ .**

$\rho = 2$		
$\lambda$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\rho}$
.1	$553 \times 553$	$194 \times 194$
.2	$309 \times 309$	$98 \times 98$
.3	$225 \times 225$	$62 \times 62$
.4	$182 \times 182$	$39 \times 39$
.5	$156 \times 156$	$23 \times 23$

$\rho = 5$		
$\lambda$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\rho}$
.1	$71 \times 71$	$53 \times 53$
.2	$41 \times 41$	$32 \times 32$
.3	$31 \times 31$	$24 \times 24$
.4	$25 \times 25$	$19 \times 19$
.5	$21 \times 21$	$15 \times 15$

$\rho = 10$		
$\lambda$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\rho}$
.1	$43 \times 43$	$39 \times 39$
.2	$26 \times 26$	$25 \times 25$
.3	$20 \times 20$	$19 \times 19$
.4	$16 \times 16$	$16 \times 16$
.5	$13 \times 13$	$14 \times 14$

## 5.4. cas de mélange de lois Gamma

Le calcul analytique de la variance des estimateurs dans le cas du mélange de lois Gamma décrit au paragraphe 4.4 ne pose aucun problème, hormis la complexité apparente des expressions obtenues dont la longueur exclut de les incorporer dans une publication. Il reste cependant la possibilité d'en calculer les valeurs numériques.

Le tableau 7 propose les écarts type de  $\lambda$  et de  $\rho$  dans le cas où l'analyse s'effectue sur un voisinage de 100 points (fenêtre  $10 \times 10$ ), pour différentes valeurs de  $\rho$  et de  $\lambda$ .

Le tableau 8 propose un dimensionnement de fenêtres carrées optimal pour garantir 10 % d'erreur sur l'estimation (l'erreur étant définie par le ratio de l'écart type sur la valeur estimée). On peut noter que pour  $L = 1$  des fenêtres de grande taille sont requises, ce qui n'est pas surprenant si on se souvient de la figure 8 qui illustrait qu'un mélange de lois Gamma était le plus souvent unimodal.

## 6. conclusions

Les statistiques de deuxième espèce semblent être un outil innovant et performant pour l'étude de lois de distributions définies sur  $\mathbb{R}^+$ . La formulation analytique des log-moments et des log-cumulants est en effet particulièrement simple et d'exploitation aisée, au moins dans les exemples présentés dans cet article, certains, comme les mélanges, n'étant pas au demeurant triviaux. De plus, la variance des estimateurs ainsi définis se rapproche des valeurs minimales atteintes par la méthode du maximum de vraisemblance, tout en évitant les écueils analytiques. Certaines applications en traitement d'images RSO montrent d'ailleurs le potentiel de cette approche (comme la caractérisation d'un filtre homomorphique optimal [Nic01]).

On peut raisonnablement se demander pourquoi cette approche, finalement très simple, n'a pas été proposée jusqu'à présent. Plusieurs raisons peuvent être invoquées :

- La première se fonde sur la constatation qu'une transformée de Mellin d'une d.d.p. n'est somme toute qu'une transformée de Fourier de cette même d.d.p. prise sur une échelle logarithmique. Si cette démarche est parfaitement justifiée sur le plan théorique, elle masque *de facto* tous les éventuels avantages à passer dans le monde de Mellin, comme l'emploi des tables spécifiques à cette transformée ou l'utilisation directe des log-moments et log-cumulants qui permettent une meilleure estimation des paramètres des lois.
- L'analyse des lois multiplicatives, réservées à des processus particuliers comme l'imagerie cohérente, n'a pas connu l'essor des lois additives. La philosophie parfois adoptée pour l'étude des lois multiplicatives a trop souvent consisté à effectuer un changement d'échelle (passage en échelle logarithmique) pour utiliser les outils des lois additives. Cette démarche réductrice pose rapidement des problèmes d'autant qu'elle requiert une grande maîtrise des expressions analytiques ainsi obtenues. Pour les non spécialistes, elle est probablement vouée à l'échec pour des lois autres que la loi Gamma et Gamma Inverse, comme la loi  $\mathcal{K}$  par exemple.
- Comme dans le cadre des statistiques traditionnelles, le calcul analytique des log-moments et des log-cumulants devient rapidement très lourd. Si, dans ce nouveau formalisme, elles se simplifient idéalement, cela nécessite néanmoins des étapes analytiques fastidieuses et, de plus, sources d'erreur. L'aide d'un outil de calcul formel s'avère alors extrêmement précieux en évitant principalement des « lapsus calami ». Cet outil est effectivement utilisable puisque la seule opération essentielle requise est le calcul des dérivées des fonctions caractéristiques de deuxième espèce, calcul aisé pour ce genre de logiciel.
- Enfin la transformée de Mellin est finalement totalement méconnue. De ce fait, ses applications se confinent dans certains travaux de spécialistes dont la diffusion s'arrête malheureusement au domaine étudié (étude des signaux Radar et Sonar, théorie des nombres, étude de la propagation des ultrasons en milieu hétérogène, automatique, transformée de Fourier-Mellin en traitement d'images). Même si certains travaux, tant anciens [Lom67] que récents [Tag01, Tag02] montrent son utilité en probabilité, son utilisation n'est que très confidentielle. De ce fait, peu de personnes en connaissent les propriétés essentielles, voire même la définition exacte. Cette quasi confidentialité a pour conséquences néfastes que peu d'équipes travaillent sur le sujet : aussi manque-t-il encore à cette transformation analytique des méthodes efficaces pour en permettre une implémentation numérique performante et suffisamment générale. Ceci permettrait d'envisager des déconvolutions numériques des lois de probabilité décrites par une convolution de Mellin, et de remonter ainsi, par exemple, aux paramètres significatifs d'une scène imagée par un radar RSO [NM99].

## BIBLIOGRAPHIE

- [Car61] H. Cartan. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann, 1961.
- [Col59] S. Colombo. *Les transformations de Mellin et de Hankel*. Centre National de la Recherche Scientifique, 1959.
- [Cra46] H. Cramér. *Mathematical methods of statistics*. Princeton University Press, 1946.
- [Hof60] W.W.C. Hoffman. *Statistical methods in radio wave propagation*. Pergamon Press, 1960.
- [JK70] N. Johnson and Samuel Kotz. *Continuous univariate distributions-I*. John Wiley & Sons, 1970.
- [KJ01] E. Kuruoğlu and J. Zerubia. Modelling SAR images with a generalisation of the rayleigh distribution. Technical Report 4121, INRIA, 2001.
- [Lom67] Z.A. Lomnicki. On the distribution of products of random variables. *Journal of Royal Statistics Society Ser. B*, 29(3) : pp. 513-524, 1967.
- [Luk83] E. Lukacs. *Developments in Characteristics Functions Theory*. Charles Griffin, 1983.
- [Mét72] M. Métivier. *Notions fondamentales de la théorie des probabilités*, Dunod, 1972.
- [Nic01] J.-M. Nicolas. Filtrage homomorphique optimal RSO (Radar à Synthèse d'Ouverture). In *GRETSI'01*, Toulouse, France, Sep. 2001.
- [Nic02] J.-M. Nicolas. Introduction aux statistiques de deuxième espèce : applications aux lois d'images RSO. Technical Report 2002D001, ENST, 2002.
- [NM98] J.-M. Nicolas and A. Maruani. PIERS'98. In *Speckle well modeled by Mellin Transform*, Nantes, France, jul 1998.
- [NM99] J.-M. Nicolas and A. Maruani. Numerical Mellin transform applied to texture classification on SAR images, In *PIERS'99*, Taiwan, march 1999.
- [NMB00] J.-M. Nicolas, A. Maruani, and R. Badeau. Les moments d'ordre inférieur : Principes et application au filtrage des images RSO. In *RFIA2000*, Paris, jan 2000.
- [NSTT97] J.-M. Nicolas, M. Sigelle, C. Thuillier, and F. Tupin. Images de radar à ouverture synthétique : transformée de Mellin et multirésolution. In *GRETSI'97*, Grenoble, France, Sep. 1997.
- [Obe74] F. Oberhettinger, *Tables of Mellin Transform*, Springer Verlag, 1974.
- [Oli93] C.-J. Oliver, Optimum texture estimators for SAR clutter. *J. Phys. D. : Appl. Phys.*, 26 : pp. 1824-1835, 1993.
- [Pie97] R.-D. Pierce., Application of the positive alpha-stable distribution. In *IEEE Signal Processing Workshop on Higher-Order Statistics*, pp. 420-424, IEEE, 1997.
- [SK87] A. Stuart and J. Keith. *Kendall's Advanced Theory of Statistics, Vol 1 Distribution Theory (Fifth edition)*. Griffin, 1987.
- [SN93] M. Shao and C.-L. Nikias. Signal processing with fractional lower order moments : stable process and their applications. *Proceeding of the IEEE*, 81(7) : pp. 986-1010, July 1993.
- [Tag01] A. Tagliani. Recovering a probability density function from its Mellin transform. *Applied Mathematics and Computation*, 118 (2-3) : pp. 151-159, 2001.
- [Tag02] A. Tagliani. Numerical inversion of the Mellin transform on the real line for heavy-tailed probability density functions. *Applied Mathematics and Computation*, 130 (2-3) : pp. 525-536, 2002.
- [Was67] M.-J. Wasilewski. Sur certaines propriétés de la distribution Gamma généralisée. *Revue de statistiques appliquées*, 15(1) : pp. 95-105, 1967.

Manuscrit reçu le 5 décembre 2001

L'AUTEUR

Jean-Marie NICOLAS



Ancien élève de l'École Normale Supérieure de Saint-Cloud, docteur 3-ème cycle de l'Université Paris XI (1982), Jean-Marie NICOLAS a travaillé en recherche industrielle pour Philips (au Laboratoire d'Électronique Philips) puis pour Thomson-CSF (à Thomson Sintra Activités Sous-Marines, puis au Laboratoire Central de Recherche). En mai 1995, il a rejoint l'École Nationale Supérieure des Télécommunications en tant que professeur au Département TSI (Traitement du Signal et des Images). Ses activités de recherche traitent principalement de la modélisation et du traitement des images de Radar à Synthèse d'Ouverture.