

# Algorithmes statistiques pour le traitement des images polarimétriques en lumière cohérente

## Statistical algorithms for processing polarimetric images in coherent light

par François GOUDAIL, Philippe RÉFRÉGIER

Équipe « Physique et Traitement d'images », Institut Fresnel, École Nationale Supérieure de Physique de Marseille Domaine Universitaire de Saint-Jérôme 13397 Marseille cedex 20, France. Tél : (33) 4 91 28 80 86 fax : (33) 4 91 28 82 01 email : francois.goudail@fresnel.fr

### *résumé et mots clés*

L'imagerie polarimétrique consiste à former une image de l'état de polarisation de la lumière réfléchiée par une scène. En particulier, l'image du degré de polarisation constitue une méthode puissante pour détecter des objets qui n'apparaissent pas sur les images d'intensité classiques. Cependant, dans les imageurs actifs illuminant la scène avec une lumière cohérente (laser), les images de degré de polarisation sont fortement perturbées à cause du phénomène de speckle. Il est donc nécessaire d'utiliser des algorithmes de traitement adaptés à leurs propriétés statistiques. Nous proposons tout d'abord d'étudier le modèle de densité de probabilité des images de degré de polarisation, puis nous analysons les propriétés des différents estimateurs du degré de polarisation à partir de ces images. Nous caractérisons ensuite les performances d'algorithmes statistiques de détection de cibles et de bords, ainsi que des méthodes de segmentation d'objets par contour actif statistique. L'une des principales conclusions est que pour ces opérations de traitement, il est préférable de travailler non pas avec l'image de degré de polarisation classique, mais avec une transformation non-linéaire de celle-ci, que nous appelons « représentation naturelle » des images de degré de polarisation.

Optique statistique, estimation de paramètres, détection de cibles, détection de bords, segmentation, contours actifs, imagerie active, polarisation, traitement d'images.

### *abstract and key words*

Polarimetric imagery consists in forming an image of the state of polarization of the light backscattered by a scene. For example, the image of degree of polarization is a powerful method for detecting objects which do not appear in classical intensity images. However, with active imagers which illuminate the scene with coherent light (laser), the images of degree of polarization are strongly perturbed, due to the speckle phenomenon. It is thus necessary to use processing algorithms which are adapted to their statistical properties. We first propose to study a model of the probability density function of the images of degree of polarization, then we analyze the properties of several estimators of the degree of polarization from these images. We then characterize the performance of statistical algorithms for edge and target detection, and of object segmentation methods based on statistical active contours. One of the main conclusions is that for these processing operations, it is preferable not to work on the

classical image of degree of polarization, but on a nonlinearly transformed image, which we call “natural representation” of the degree of polarization images.

Statistical optics, parameter estimation, target detection, edge detection, segmentation, active contours, active imagery, polarisation, image processing.

## 1. introduction

L'imagerie polarimétrique consiste à former une image à partir des propriétés polarimétriques de la lumière réfléchiée par une scène [1, 2, 3], ce qui permet d'enrichir les informations obtenues sur la scène. Par exemple, l'analyse de la direction de polarisation de la lumière peut permettre de déterminer l'orientation des surfaces observées [4] et de remonter ainsi aux caractéristiques géométriques de la scène. D'autre part, ce type d'imagerie peut révéler des contrastes qui n'apparaissent pas dans des images classiques formées à partir de la simple intensité lumineuse réfléchiée. Ainsi, un objet apparaissant sur un fond de même réflectivité, mais qui dépolarise moins la lumière que le fond (cas d'un objet métallique sur un fond naturel par exemple) pourra être détecté sur une image de degré de polarisation [5, 6]. Dans le présent article, nous étudierons plus particulièrement les images polarimétriques actives formées en lumière cohérente. Cela signifie que la scène est illuminée par une source laser et l'image est formée à partir de la fraction de cette lumière rétrodiffusée par la scène [6]. Ce type de système permet de voir la nuit, avec une meilleure résolution que les imageurs thermiques car la longueur d'onde peut être plus faible que pour les bandes infra-rouges habituelles (elle est de l'ordre de  $1 \mu\text{m}$  pour le système que nous considérons dans cet article, contre 3-5 ou 8-12  $\mu\text{m}$  pour les bandes thermiques).

Cependant, les images acquises par ces systèmes peuvent être perturbées par un bruit de speckle. Ce bruit, inhérent aux images cohérentes, introduit de fortes variations de niveaux de gris même sur des zones dont la réflectivité est uniforme [7]. Notre objectif dans cet article va être de concevoir des procédures et des algorithmes de traitement des images polarimétriques robustes à ce type de perturbations. De nombreux travaux ont été réalisés sur les algorithmes de traitement adaptés au speckle dans les images radar à ouverture synthétique (SAR) [8, 9, 10, 11]. L'intérêt de la présente étude vient du fait que nous ne traitons pas directement les images de speckle, mais une combinaison non linéaire de deux d'entre elles, de telle sorte que la densité de probabilité des fluctuations n'appartient pas en général à la famille exponentielle. L'estimateur des paramètres au sens du maximum de vraisemblance n'est donc pas forcément le meilleur et la comparaison de différents estimateurs nous permettra de choisir celui qui présente le meilleur compromis entre

efficacité et simplicité (et donc rapidité de calcul). Nous déterminerons et caractériserons ensuite des algorithmes permettant de réaliser de manière efficace deux opérations importantes en traitement d'images : la détection de bords et la segmentation d'objets par contours actifs statistiques [12, 13].

L'organisation de l'article est la suivante. Dans la section 2, nous décrivons le principe d'un imageur polarimétrique actif en lumière cohérente qui peut permettre de mesurer le degré de polarisation local dans une image. Dans la section 3, nous analysons les propriétés statistiques des fluctuations du degré de polarisation dues au speckle, et nous étudions dans la section 4 les méthodes d'estimation du degré de polarisation en fonction des valeurs mesurées par l'imageur. Dans la section 5, nous utilisons les résultats obtenus pour résoudre deux applications importantes. La première est la détection de zones de contraste dans les images, comme des cibles de petite taille ou les frontières entre des zones de caractéristiques différentes. La seconde est la détermination du contour d'un objet par une méthode de contours actifs statistiques adaptée aux propriétés des images de degré de polarisation.

## 2. le principe de l'imagerie polarimétrique active

Dans cette section, nous présentons tout d'abord de brefs rappels sur la manière dont la lumière partiellement polarisée est représentée en optique. Nous décrivons ensuite le principe de fonctionnement d'un imageur polarimétrique actif.

### 2.1. modélisation de la lumière partiellement polarisée

En optique statistique, on représente la lumière par un champ électrique transversal, qui est un vecteur aléatoire complexe à deux dimensions  $\mathbf{E} = (E_1, E_2)$  et à moyenne nulle.  $E_1$  et  $E_2$  sont les composantes de ce vecteur dans la base orthonormale  $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ . Notons que  $\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{u}_2$  sont des vecteurs complexes, qui correspondent dans le cas général à des états de polarisation elliptique [14]. Ces états de polarisation purs sont classiquement

définis par deux paramètres : l'orientation de l'ellipse représentant la trajectoire du vecteur champ électrique au cours du temps et son ellipticité. L'état de polarisation du champ électrique  $\mathbf{E}$  est caractérisé par sa fonction de covariance :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \langle |E_1|^2 \rangle & \langle E_1 E_2^* \rangle \\ \langle E_2 E_1^* \rangle & \langle |E_2|^2 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 & \delta \\ \delta^* & \mu_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

où  $\mu_1$  représente l'intensité moyenne dans l'état  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mu_2$  l'intensité moyenne dans l'état  $\mathbf{u}_2$  et  $\delta$  est un coefficient de corrélation complexe. L'état de polarisation d'une lumière partiellement polarisée est donc caractérisé par 4 paramètres réels.

En optique, la matrice  $\Gamma$  est appelée « matrice de cohérence ». Comme elle est hermitique, elle peut toujours être diagonalisée sous la forme suivante :

$$\Gamma = V \Lambda V^\dagger = V \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} V^\dagger \quad (2)$$

où  $\dagger$  représente l'opération de transconjugaison.  $V$  est une matrice unitaire et  $\Lambda$  une matrice diagonale avec  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0$ . Si  $\lambda_2 = 0$ , la matrice  $\Gamma$  est de rang 1, de la forme  $\mathbf{v}\mathbf{v}^\dagger$  où  $\mathbf{v}$  est un vecteur complexe. Une telle matrice correspond à un état de polarisation pur représenté par le vecteur  $\mathbf{v}$ . À l'inverse, si  $\lambda_1 = \lambda_2$ , la matrice de cohérence est proportionnelle à l'identité. Une telle matrice représente un état totalement dépolarisé. Entre ces deux cas extrêmes, la lumière est dite partiellement polarisée. On définit classiquement son « degré de polarisation » par le coefficient [15] :

$$\mathcal{P} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad (3)$$

Son « état de polarisation principal » est par définition le vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda_1$ . Il est intéressant de remarquer qu'une lumière partiellement polarisée peut être représentée comme la somme incohérente d'une lumière purement polarisée dans l'état de polarisation principal et d'une lumière purement dépolarisée. En effet, on a :

$$\Gamma = (\lambda_1 - \lambda_2)V \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^\dagger + \lambda_2 V \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} V^\dagger \quad (4)$$

$$= I\mathcal{P} \left( V \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^\dagger \right) + I(1 - \mathcal{P}) \left( V \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} V^\dagger \right) \quad (5)$$

où  $I = \lambda_1 + \lambda_2$  désigne l'intensité de la lumière.

D'autre part, on peut réarranger les 4 coefficients de la matrice de cohérence de manière à former un vecteur à quatre composantes réelles, nommé « vecteur de Stokes » [14], qui est sou-

vent utilisé afin de représenter l'état d'une lumière partiellement polarisée. Il est défini de la manière suivante :

$$\mathbf{s}^\dagger = [\mu_1 + \mu_2, \mu_1 - \mu_2, 2Re(\delta), 2Im(\delta)] \quad (6)$$

Notons que la représentation de Stokes est strictement équivalente à la matrice de cohérence. Elles se déduisent l'une de l'autre par une transformation bijective.

En imagerie polarimétrique active, on peut mesurer la manière dont les matériaux observés modifient l'état de polarisation de la lumière incidente. Cette propriété est représentée de manière phénoménologique par la matrice de Mueller [16]. C'est une matrice  $4 \times 4$  qui opère sur les vecteurs de Stokes. Ainsi, si  $\mathbf{s}$  est le vecteur de Stokes de la lumière incidente, la lumière diffusée par un milieu de matrice de Mueller  $M$  a pour vecteur de Stokes  $\mathbf{s}' = M\mathbf{s}$ . La matrice de Mueller rend compte des transformations intervenues sur l'état de polarisation de la lumière incidente. Dans le présent article, nous considérerons que les matériaux observés ne font que modifier le degré de polarisation de la lumière incidente, sans modifier son état de polarisation principal. C'est le cas de nombreux matériaux naturels éclairés sous incidence normale [6].

## 2.2. le principe d'un imageur polarimétrique

Le principe de fonctionnement d'un système d'imagerie polarimétrique active est illustré sur la figure 1. La scène est illuminée par un faisceau collimaté provenant d'un réseau de diodes lasers. L'état de polarisation du faisceau d'illumination est contrôlé par un système qui permet de générer n'importe quel état de polarisation pure. La lumière rétrodiffusée par la scène est collectée par un télescope et vient former une image sur une caméra CCD. Cependant, avant d'atteindre la caméra, elle traverse un analyseur d'état de polarisation, qui est un système

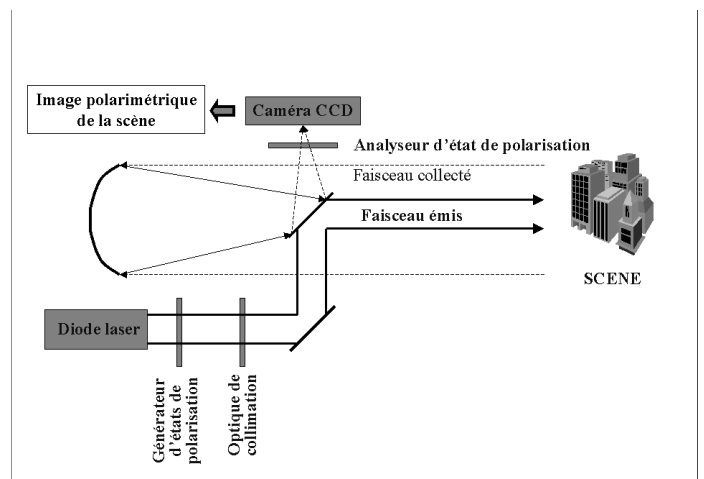


Figure 1. – Principe d'un imageur polarimétrique actif.

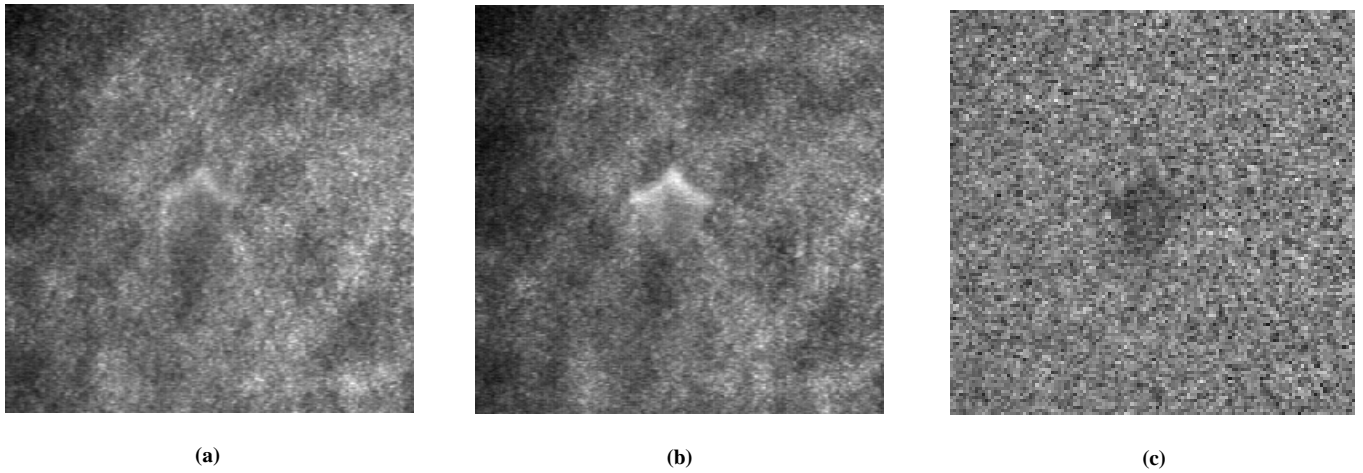


Figure 2. – Exemple d’images polarimétriques réelles. (a) :  $s_1(i, j)$ . (b) :  $s_2(i, j)$ . (c) : ICEO  $\rho(i, j)$ .

optique permettant de mesurer la fraction d’énergie lumineuse correspondant à un état de polarisation donné.

Avec un tel système, il est en principe possible de mesurer la matrice de Mueller complète en chaque point de la scène observée. Pour cela, on peut montrer qu’il suffit d’illuminer successivement la scène avec 4 états de polarisation différents, et d’analyser pour chaque état de polarisation incident la lumière rétrodiffusée dans quatre états différents [6]. Cette technique nécessite donc l’acquisition de 16 images. Pour accélérer la cadence du système, il est possible de simplifier cette procédure. Ainsi, on peut par exemple se contenter d’envoyer un seul état de polarisation, et analyser la lumière réfléchié dans l’état de polarisation incident et dans l’état orthogonal.

Appelons  $\mathbf{u}_1$  l’état de polarisation incident et  $\mathbf{u}_2$  l’état de polarisation qui lui est orthogonal. En chaque pixel  $(i, j)$  de l’image, le champ électrique est  $\mathbf{E}(i, j) = (E_1(i, j), E_2(i, j))$ . Conformément à la modélisation introduite dans la section 2.1, c’est un vecteur aléatoire de moyenne nulle et de matrice de cohérence  $\Gamma(i, j)$ . Lorsqu’on fait passer la lumière dans un analyseur parallèle à l’état incident  $\mathbf{u}_1$ , on mesure une intensité  $s_1(i, j) = |E_1(i, j)|^2$ . C’est une variable aléatoire dont la moyenne est égale à  $\langle s_1(i, j) \rangle = \mu_1$  (cf. équation 1). De même, lorsqu’on fait passer la lumière dans un analyseur parallèle à l’état orthogonal  $\mathbf{u}_2$ , on mesure une intensité  $s_2(i, j) = |E_2(i, j)|^2$  dont la moyenne est égale à  $\langle s_2(i, j) \rangle = \mu_2$ . À partir des mesures  $s_1(i, j)$  et  $s_2(i, j)$ , on peut calculer l’image suivante :

$$\rho(i, j) = \frac{s_1(i, j) - s_2(i, j)}{s_1(i, j) + s_2(i, j)} \quad (7)$$

que nous appellerons dans la suite « Image de contraste d’états orthogonaux » ou plus simplement ICEO. On voit que cette image est une estimation de la valeur  $\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$  au pixel considéré.

Supposons maintenant que les matériaux composant la scène modifient seulement le degré de polarisation de la lumière incidente, sans modifier son état de polarisation principal. Ce type de matériaux est appelé « dépolarisateur pur ». Par définition de la notion de dépolarisateur pur, la matrice de cohérence de la lumière rétrodiffusée est diagonale et les intensités moyennes  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont égales aux valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Dans ce cas, on voit que l’ICEO est une estimation du degré de polarisation de la lumière  $\mathcal{P} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$  au pixel de coordonnées  $(i, j)$ .

Puisque la lumière incidente est purement polarisée, l’ICEO est liée à la capacité de dépolarisation des matériaux observés. Si  $\rho(i, j)$  est proche de 1, le degré de polarisation de la lumière rétrodiffusée est grand, ce qui signifie que la capacité de dépolarisation du matériau correspondant est faible. Si  $\rho(i, j)$  est proche de 0, la zone correspondante dans la scène est fortement dépolarisante. Des études expérimentales [6] ont montré que lorsqu’ils sont observés en rétrodiffusion, la plupart des matériaux rencontrés dans des scènes réelles se comportent effectivement comme des dépolariseurs purs. Nous nous placerons donc dans cette hypothèse. Nous considérerons des images dans lesquelles le contraste entre les différents objets provient de leur différence de capacité de dépolarisation. Notons cependant que même si cette hypothèse n’est pas tout à fait vérifiée, l’ICEO, qui dans ce cas ne correspond pas exactement au degré de polarisation, peut tout de même faire apparaître des contrastes intéressants dans l’image.

Puisque l’imageur polarimétrique fournit deux images  $s_1(i, j)$  et  $s_2(i, j)$ , on pourrait envisager de réaliser les opérations de traitement sur l’image bi-canal formée par ces deux images, ou, ce qui revient au même, par l’image d’intensité  $I(i, j) = s_1(i, j) + s_2(i, j)$  et l’ICEO. Cependant, dans de nombreux cas, l’image d’intensité  $I(i, j)$  est difficilement

exploitable à cause de la non-uniformité du faisceau d'illumination. Considérons par exemple les images polarimétriques réelles de la figure 2. On peut remarquer sur les images  $s_1(i, j)$  et  $s_2(i, j)$  un motif dont les variations d'amplitude sont dues aux variations de l'intensité d'illumination. Certaines parties de ce motif peuvent être prises pour des objets d'intérêt, et créer ainsi de fausses alarmes. La non-uniformité spatiale du faisceau d'illumination est un problème important en imagerie active. Il est particulièrement crucial pour les systèmes à longue portée. En effet, ces systèmes utilisent des sources de haute puissance dont l'uniformité est difficile à contrôler. De plus, même si l'intensité était uniforme en sortie de source, elle subirait d'importantes perturbations du fait des turbulences atmosphériques traversées. Ce phénomène est difficile à éliminer, car la compensation de turbulence atmosphérique nécessite des systèmes complexes d'optique adaptative [17].

D'autre part, il est clair que l'ICEO, qui est une grandeur normalisée, ne dépend pas de l'intensité de l'illumination [1]. On peut le vérifier sur la figure 2.c qui montre l'ICEO construite à partir des images des figures 2.a et 2.b. De plus, comme nous venons de le voir, l'ICEO bénéficie d'une interprétation physique intéressante, puisqu'elle permet de distinguer les zones observées selon leur capacité de dépolarisation. C'est pourquoi, dans la suite, nous travaillerons uniquement avec l'ICEO.

### 3. modélisation et propriétés statistiques de l'ICEO

Les images  $s_1(i, j)$  et  $s_2(i, j)$  acquises par l'imageur polarimétrique sont formées sur un détecteur classique de type CCD : ce sont donc des images d'intensité en lumière cohérente. L'un des inconvénients de ce type d'images est la présence de bruit de speckle, qui est extrêmement perturbant pour les algorithmes de traitement d'images. Les caractéristiques de ce bruit doivent être prises en compte pour obtenir des algorithmes efficaces. C'est pourquoi nous décrivons tout d'abord les modèles classiques utilisés pour représenter le bruit de speckle. Nous étudions ensuite les propriétés statistiques de l'ICEO, qui est une combinaison non-linéaire d'images de speckle.

#### 3.1. les modèles de bruit de speckle

Comme nous l'avons vu dans la section précédente, la valeur mesurée par l'imageur polarimétrique en un pixel de l'image  $s_k(i, j)$ ,  $k = 1, 2$  est une variable aléatoire qui fluctue autour du coefficient  $\mu_k$  de la matrice de cohérence. Ces fluctuations, spécifiques à l'imagerie cohérente, sont classiquement appelées speckle. Le modèle classique pour le bruit de speckle est une distribution exponentielle des valeurs de niveaux de gris, de

moyenne  $\mu_k$  [15] : on parle alors de speckle pleinement développé. C'est un bruit très gênant, puisque son écart-type est égal à sa moyenne. Si l'image est formée à partir de l'addition incohérente de différentes composantes lumineuses, on dit que le speckle est moyenné. On peut montrer que l'intensité  $x$  rétrodiffusée en un point de coordonnées  $(i, j)$  suit alors une loi Gamma d'ordre  $L$  égal au nombre de composantes incohérentes [15] :

$$P(x) = \frac{L^L}{\mu_k^L \Gamma(L)} x^{L-1} \exp \left[ -\frac{Lx}{\mu_k} \right] \quad (8)$$

où  $\mu_k$  représente la valeur moyenne : on parle alors de « speckle d'ordre  $L$  ». Il est bien connu que le rapport entre la moyenne et l'écart-type d'une variable Gamma est égal à  $\sqrt{L}$ . Donc plus l'ordre est grand, moins le bruit de speckle est gênant. C'est pourquoi en imagerie cohérente on s'efforce lorsque c'est possible de moyennier plusieurs images [18].

Cependant, le modèle de lois Gamma n'est pas le seul utilisé pour représenter les fluctuations de speckle. Ainsi, des études phénoménologiques, menées principalement sur des signaux radars, ont montré que dans certains cas, les fluctuations de speckle sont plus fidèlement représentées par une loi de Weibull [19] :

$$P(x) = \frac{b}{\mu_k} \left( \frac{x}{\mu_k} \right)^{b-1} \exp \left[ -\left( \frac{x}{\mu_k} \right)^b \right] \quad (9)$$

où  $b$  est le paramètre de forme de la loi.

Enfin, pour certains matériaux suffisamment rugueux, il est possible que  $\mu_k$  varie spatialement à l'intérieur d'une zone composée d'un même matériau. Si on suppose que cette valeur  $\mu_k$  est une variable aléatoire suivant une loi Gamma d'ordre  $\nu$  et de moyenne  $\langle \mu_k \rangle$ , et si on modélise le phénomène de speckle par une loi Gamma d'ordre  $L$  et de moyenne égale à la variable aléatoire  $\mu_k$ , le niveau de gris observé suit une « loi K » de paramètres  $L, \nu$  et  $\langle \mu_k \rangle$  [9] :

$$P(x) = \frac{2}{x \Gamma(L) \Gamma(\nu)} \left( \frac{L\nu x}{\langle \mu_k \rangle} \right)^{\frac{(L+\nu)}{2}} K_{\nu-L} \left( 2\sqrt{\frac{L\nu x}{\langle \mu_k \rangle}} \right) \quad (10)$$

où  $K_n(x)$  est la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce d'ordre  $n$ .

Ainsi, on voit que selon les conditions expérimentales et les matériaux observés, les fluctuations de speckle seront représentées par différentes lois de probabilité. Ces lois sont multiplicatives, c'est-à-dire que si on multiplie la variable aléatoire par un coefficient scalaire, la nouvelle variable est distribuée avec la même densité de probabilité que la variable initiale, mais avec un paramètre  $\mu_k$  multiplié par ce coefficient. Nous considérons

que la densité de probabilité conjointe de  $s_1(i, j)$  et  $s_2(i, j)$  s'exprime sous la forme suivante :

$$P_{s_1, s_2}(x, y) = \frac{1}{\mu_1 \mu_2} U\left(\frac{x}{\mu_1}, \frac{y}{\mu_2}\right) \quad (11)$$

où  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont les paramètres dans les deux canaux. La fonction  $U(x, y)$  représente la densité de probabilité des canaux  $s_1$  et  $s_2$  lorsque  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ . Ce modèle inclut les cas particuliers que nous venons de décrire sans se limiter à eux seuls.

### 3.2. la densité de probabilité de l'ICEO

Après avoir décrit les fluctuations dans les images  $s_1(i, j)$  et  $s_2(i, j)$ , nous analysons dans cette section les fluctuations des niveaux de gris dans l'ICEO. Définissons tout d'abord les variables aléatoires  $\tilde{s}_1$  et  $\tilde{s}_2$  correspondant aux niveaux de gris mesurés en un pixel  $(i, j)$  des deux images  $s_1(i, j)$  et  $s_2(i, j)$  lorsque  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ , ainsi que la variable aléatoire  $\eta = (\tilde{s}_1 - \tilde{s}_2) / (\tilde{s}_1 + \tilde{s}_2)$ .  $\eta$  représente l'ICEO  $\rho$  lorsque la lumière est totalement dépolarisée. Il est facile de montrer que la variable  $\rho$ , représentant l'ICEO pour des valeurs  $\mu_1$  et  $\mu_2$  quelconques, se déduit de la variable  $\eta$  de la manière suivante :

$$\rho = \frac{\mu_1 \tilde{s}_1 - \mu_2 \tilde{s}_2}{\mu_1 \tilde{s}_1 + \mu_2 \tilde{s}_2} = \frac{\eta + u}{1 + u \eta} \quad (12)$$

où

$$u = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \quad (13)$$

On vérifie en particulier que l'ICEO ne dépend des paramètres  $\mu_1$  et  $\mu_2$  qu'au travers du paramètre  $u$ . Lorsque les matériaux sont purement dépolarisants, le paramètre  $u$  est égal au degré de polarisation de la lumière (cf. équation 3) puisque dans ce cas,  $\mu_1 = \lambda_1$  et  $\mu_2 = \lambda_2$ .

D'autre part, notons que le paramètre  $\gamma = \frac{\mu_1}{\mu_2}$  est une fonction bijective de  $u$ . En effet, on a :

$$u = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{1 + u}{1 - u} \quad (14)$$

Par conséquent, les paramètres  $u$  et  $\gamma$  peuvent être utilisés indifféremment pour spécifier les propriétés de la variable aléatoire  $\rho$ . Intéressons-nous maintenant à la densité de probabilité de  $\eta$ , que nous noterons  $\Psi(x)$ . Nous démontrons dans l'annexe A qu'elle possède les propriétés suivantes :

– Si  $U(x, y) = U(y, x)$ , ce qui correspond à une propriété d'isotropie de la lumière totalement dépolarisée, alors la fonction  $\Psi(x)$  est paire.

– Dans les mêmes conditions, la fonction  $\Psi(x)$  admet un extremum en 0.

– Si  $U(x, 0) = U(0, x) = 0$ , alors  $\Psi(1) = \Psi(-1) = 0$ . Cette condition est par exemple vérifiée pour un speckle de type Gamma, avec  $L \geq 2$ .

Ces propriétés indiquent que la fonction  $\Psi(x)$  est symétrique, et possède, pour un speckle d'ordre élevé, une forme « en cloche », avec un maximum pour  $x = 0$ .

À partir de la relation 12, on peut déterminer l'expression de la densité de probabilité  $P_u^{(\rho)}(x)$  de  $\rho$  en fonction de  $\Psi(x)$ , en utilisant la relation classique  $P_u^{(\rho)}(\rho)d\rho = \Psi(\eta)d\eta$ . On obtient :

$$P_u^{(\rho)}(\rho) = \frac{1 - u^2}{(1 - u\rho)^2} \Psi\left(\frac{\rho - u}{1 - u\rho}\right) \quad (15)$$

Par conséquent, bien que  $\Psi(x)$  soit paire, la densité  $P_u^{(\rho)}(\rho)$  ne l'est en général pas. De plus, il est important de remarquer que le paramètre  $u$ , qui représente le degré de polarisation, ne correspond pas à la moyenne de la variable  $\rho$ . En effet, nous montrons dans l'annexe A.3 à l'aide d'un développement limité que pour les faibles valeurs de  $u$ , la moyenne d'ensemble de  $\rho$  s'écrit de la manière suivante :

$$\langle \rho \rangle - u \simeq (u^3 - u)\sigma_\eta^2 \quad (16)$$

où  $\sigma_\eta^2$  est la variance de la variable aléatoire  $\eta$ . En revanche, nous montrons dans l'annexe A.4 que  $u$  est égal à la médiane de  $\rho$ .

À titre d'exemple, considérons que les canaux  $s_1$  et  $s_2$  sont indépendants et distribués selon des lois Gamma d'ordre  $L$ . En utilisant l'équation 40 de l'annexe A, on peut montrer que la densité de probabilité de l'ICEO a l'expression suivante :

$$P_u^{(\rho)}(\rho) = \frac{(2L - 1)!}{2^{2L-1}[(L - 1)!]^2} (1 - u^2)^L \frac{(1 - \rho^2)^{L-1}}{(1 - u\rho)^{2L}} \quad (17)$$

Nous avons représenté sur la figure 3 les fonctions  $P_u^{(\rho)}(\rho)$  pour trois valeurs de  $u = 0, 0.5, 0.8$  et trois valeurs de  $L = 1, 5, 50$ .

Rappelons que par définition,  $P_0^{(\rho)}(x)$  correspond à la loi  $\Psi(x)$  qui caractérise une lumière totalement dépolarisée. On peut vérifier les propriétés énoncées plus haut : la distribution  $\Psi(x)$  possède une forme « en cloche », sauf pour un ordre  $L = 1$ . D'autre part, on peut observer comment elle se « déforme » et devient asymétrique lorsque  $u$  prend des valeurs non-nulles. Nous avons tracé sur la figure 4 la moyenne, l'écart-type et le mode de  $\rho$  en fonction de  $u$  pour différents ordres. La moyenne et l'écart-type ont été estimés par intégration numérique à partir de la forme analytique de la densité de probabilité dans l'équation 17. Le mode, qui est la position du maximum de la densité de probabilité, peut se calculer analytiquement :

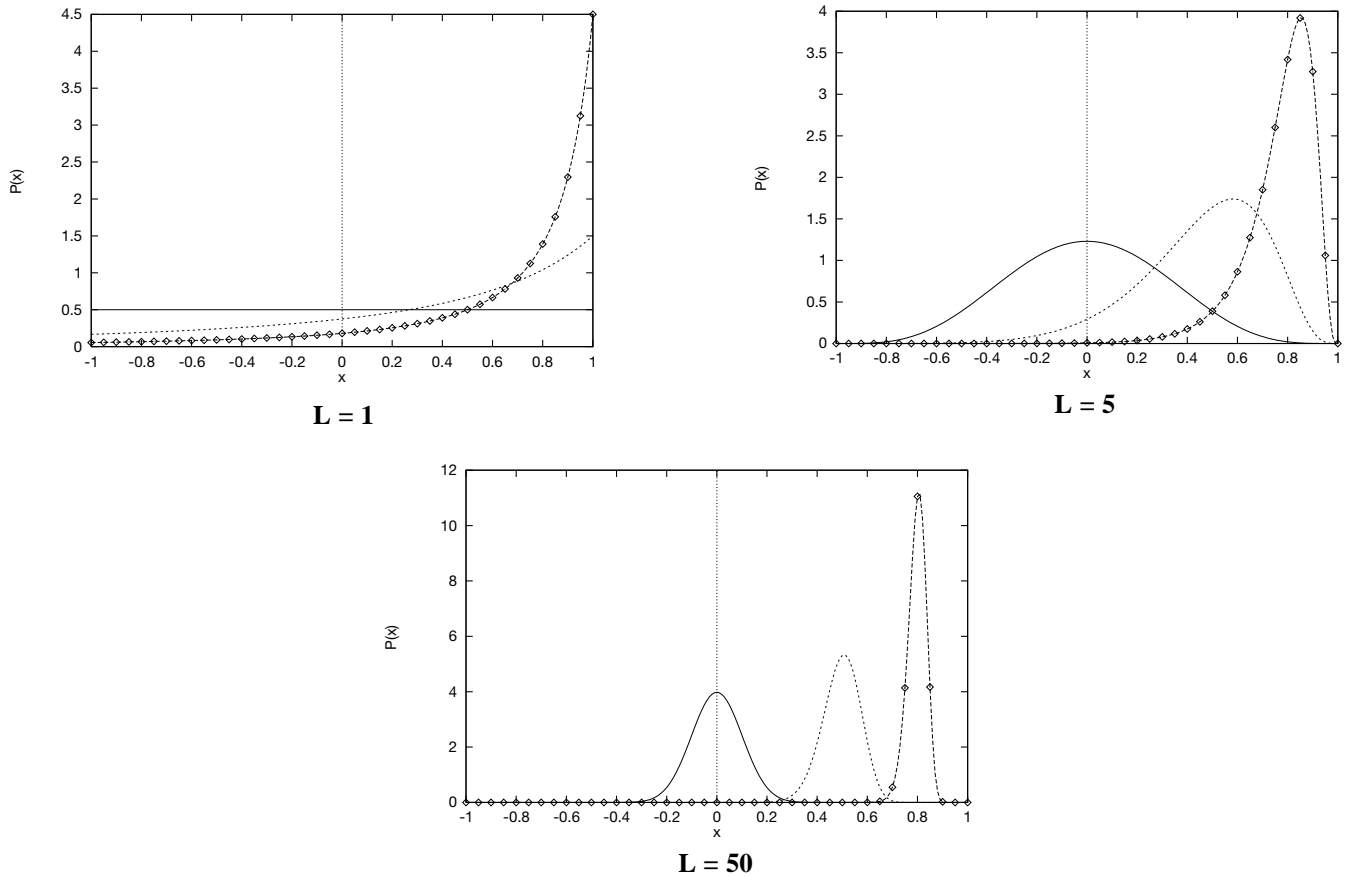


Figure 3. – Densité de probabilité de l'ICEO quand les niveaux de gris des deux canaux sont distribués suivant des lois Gamma de différents ordres  $L$ , et avec des valeurs de  $u$  égales à 0 (trait continu), 0.5 (pointillés longs) et 0.8 (pointillés courts avec  $\diamond$ ).

$$\rho_{max} = \frac{L-1}{2} \frac{1}{u} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{4L}{(L-1)^2} u^2} \right] \quad (18)$$

Sur la figure 4, on vérifie que la moyenne n'est égale à  $u$  que lorsque  $u$  est nul ou lorsqu'il tend vers 1, comme l'indique l'équation 16. D'autre part, la variance diminue lorsque  $u$  augmente. Enfin, lorsque  $L = 1$ , le mode est 1 si  $u > 0$ ,  $-1$  si  $u < 0$  et il n'est pas défini pour  $u = 0$ , puisque la densité de probabilité est alors constante (voir figure 3). En revanche, lorsque  $L$  est grand, le mode est pratiquement égal à  $u$ .

## 4. l'estimation du degré de polarisation

Dans de nombreuses opérations de traitement d'images, comme par exemple la détection et la segmentation, la première étape consiste à estimer le degré de polarisation  $u$  dans une zone

homogène de l'image. Nous allons donc étudier dans cette section les propriétés de différents estimateurs du degré de polarisation à partir d'un échantillon. L'objectif est de déterminer un estimateur présentant un bon compromis entre précision d'estimation et simplicité de calcul.

### 4.1. estimation à partir de l'ICEO

Considérons une zone homogène de l'ICEO, contenant  $N = P \times Q$  pixels, où le degré polarisation prend la valeur  $u$ . Les niveaux de gris des pixels constituent un échantillon  $\{\rho(i, j) | (i, j) \in [1, P] \times [1, Q]\}$ . Notre objectif est d'estimer  $u$  à partir de cet échantillon. L'estimateur le plus simple consiste à calculer la moyenne arithmétique des pixels sur l'ICEO :

$$\hat{u}_{iceo} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{P-1} \sum_{j=0}^{Q-1} \rho(i, j) \quad (19)$$

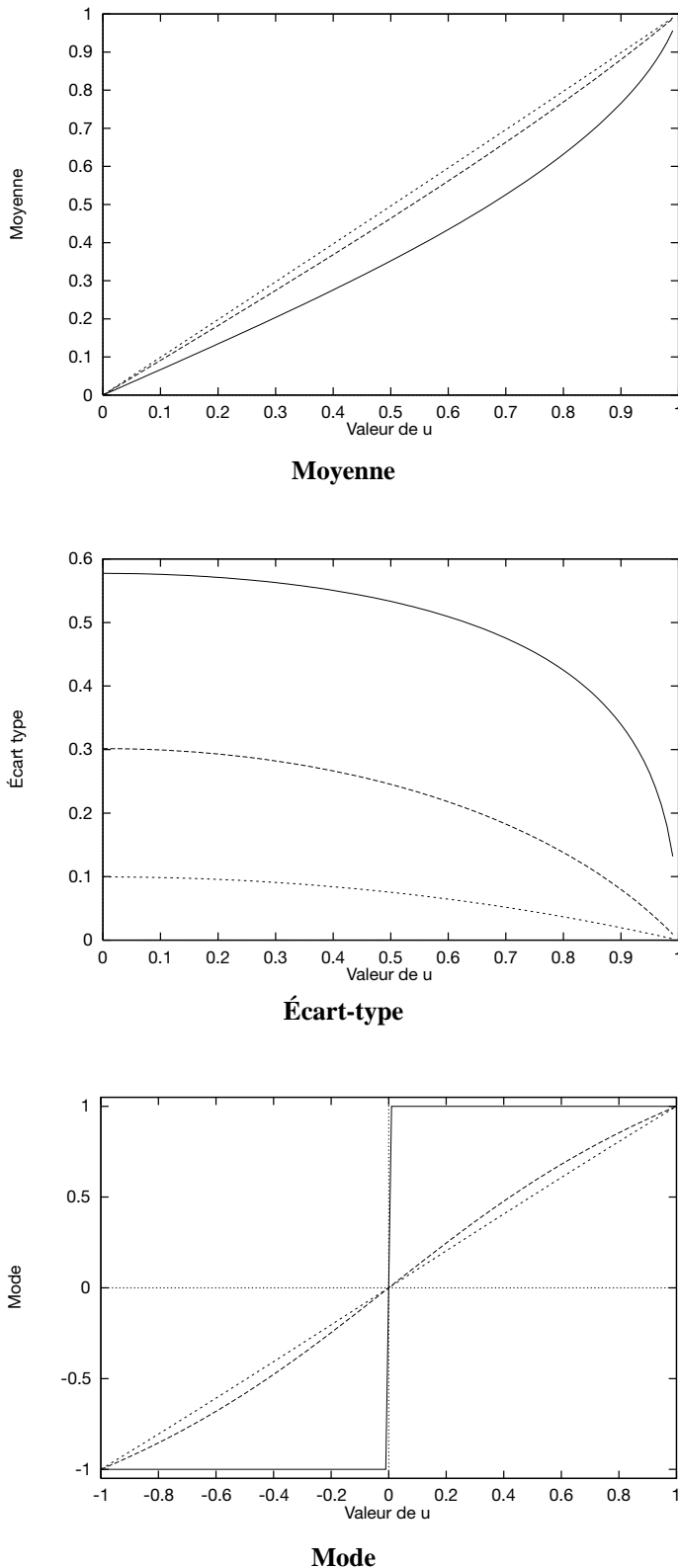


Figure 4. – Moyenne, écart-type et mode de l’OSCI en fonction du paramètre  $u$  pour différentes valeurs de  $L$  :  $L = 1$  (trait continu),  $L = 5$  (pointillés longs) et  $L = 50$  (pointillés courts).

Cependant, il est facile de montrer que cet estimateur est biaisé. En effet,  $\langle \hat{u}_{iceo} \rangle = \langle \rho \rangle$ , et nous avons vu (cf. équation 16) que  $\langle \rho \rangle \neq u$ .

À l’inverse de la moyenne, on peut montrer (cf. annexe A.4) que la médiane de  $\rho$  est égale à  $u$ . Par conséquent, la médiane  $\hat{u}_{med}$  de l’échantillon est un estimateur non biaisé de  $u$ . On sait de plus que la médiane est un estimateur robuste à la présence de valeurs anormales dans l’échantillon. En revanche, le calcul de la médiane nécessite une mise en ordre des valeurs de l’échantillon, ce qui est une opération coûteuse en temps de calcul.

Nous avons représenté la moyenne et l’écart-type des estimateurs  $\hat{u}_{iceo}$  et  $\hat{u}_{med}$  sur la figure 5. Ces valeurs ont été estimées par une méthode de Monte-Carlo en utilisant  $10^4$  réalisations d’un échantillon de  $N = 50$  pixels. Les canaux  $s_1$  et  $s_2$  sont distribués selon des lois Gamma d’ordre  $L$ . On peut voir que pour les faibles valeurs de  $L$ , l’estimateur  $\hat{u}_{iceo}$  est largement biaisé, alors que  $\hat{u}_{med}$  ne l’est pas. D’autre part, on constate que la variance de l’estimation diminue lorsque  $u$  augmente et lorsque l’ordre  $L$  de la loi Gamma augmente. Cela est lié au fait que la variance des fluctuations dans l’OSCI diminue lorsque  $L$  et  $u$  augmentent (cf. figure 4).

Si on connaît la densité de probabilité de l’échantillon, il est aussi possible de déterminer l’estimateur du maximum de vraisemblance de  $u$ . Nous montrons dans l’annexe B que dans le cas d’un speckle de type Gamma, l’estimateur du maximum de vraisemblance  $\hat{u}_{mv}$  de  $u$  consiste à résoudre l’équation suivante :

$$\sum_{i=0}^{P-1} \sum_{j=0}^{Q-1} \frac{\rho(i, j) - \hat{u}_{mv}}{1 - \hat{u}_{mv} \rho(i, j)} = 0 \quad (20)$$

Cette équation peut être résolue grâce à quelques itérations d’une méthode de Newton. La moyenne et l’écart-type de  $\hat{u}_{mv}$  en fonction de  $u$  sont représentés sur la figure 5. On constate que cet estimateur est non biaisé, et que sa variance est inférieure à celle de  $\hat{u}_{med}$ .

Cependant, cet estimateur présente l’inconvénient de nécessiter la résolution itérative d’une équation. D’autre part, comme la distribution des niveaux de gris dans l’ICEO n’appartient pas à la famille exponentielle, cet estimateur n’est pas forcément le plus efficace. La famille exponentielle est une famille de distributions qui inclut les lois gaussiennes, Gamma, Poisson [20]. Elles possèdent la propriété que l’estimateur du maximum de vraisemblance de leurs paramètres est de variance minimale s’il est non-biaisé. Comme nous ne nous trouvons pas dans ce cadre là, il n’est pas sûr que l’estimateur du maximum de vraisemblance soit le meilleur. Nous savons simplement qu’il possède des propriétés asymptotiques d’efficacité [20]. Par conséquent, nous allons nous efforcer de déterminer un estimateur non-biaisé, plus performant que  $\hat{u}_{med}$  et plus facilement calculable que  $\hat{u}_{mv}$ .



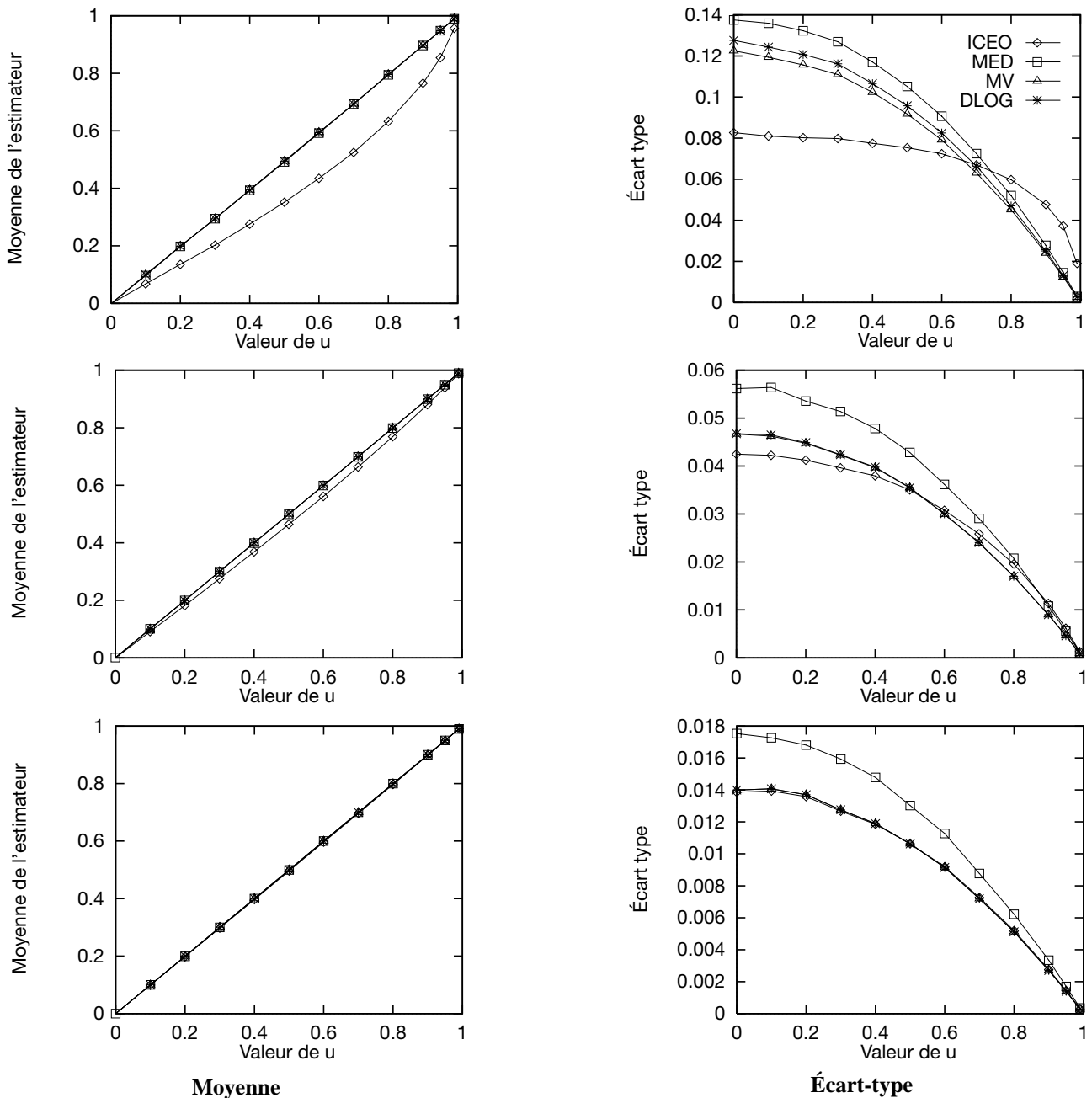


Figure 5. – Moyenne et écart-type de l'estimation du degré de polarisation sur l'ICEO, lorsque les niveaux de gris des différents canaux sont distribués selon les lois Gamma d'ordre 1 (graphe du haut), 5 (graphe du milieu) et 50 (graphe du bas). ( $\diamond$ ) : estimateur de la moyenne empirique sur l'ICEO ( $\hat{u}_{iceo}$ ). ( $\square$ ) : estimateur de la médiane ( $\hat{u}_{med}$ ). ( $\triangle$ ) : estimateur du maximum de vraisemblance ( $\hat{u}_{mv}$ ). (\*) : estimateur de la moyenne empirique sur l'image DLOG ( $\hat{u}_{dlog}$ ). Les valeurs ont été estimées sur  $10^4$  réalisations.

## 4.2. représentation naturelle de l'ICEO

Nous avons constaté dans la section précédente que le biais de l'estimateur  $\hat{u}_{iceo}$  vient du fait que lorsque  $u$  varie, la densité de probabilité de  $\rho$  subit une transformation non-linéaire (cf. équation 17) qui modifie sa forme et la rend asymétrique. Afin de

s'affranchir de ce problème, nous allons rechercher une transformation non linéaire de la variable aléatoire  $\rho$  telle que dans cette nouvelle représentation, la variation de  $u$  n'entraîne qu'une translation de la densité de probabilité. En d'autres termes, on souhaite transformer les perturbations affectant l'ICEO en perturbations de type additif. Pour réaliser cette opération, il suffit de remarquer qu'il existe une relation de bijection entre l'ICEO

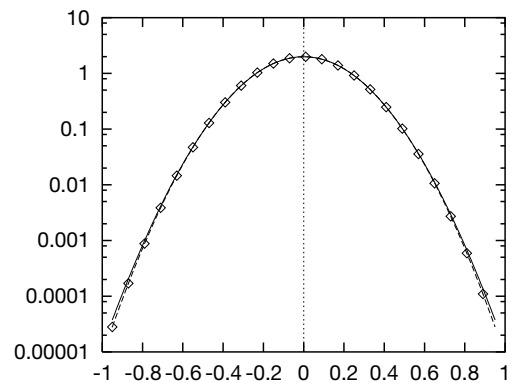
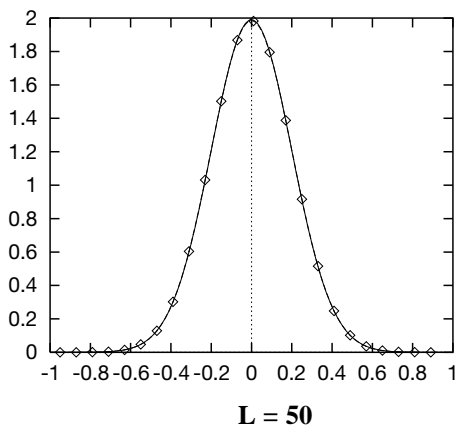
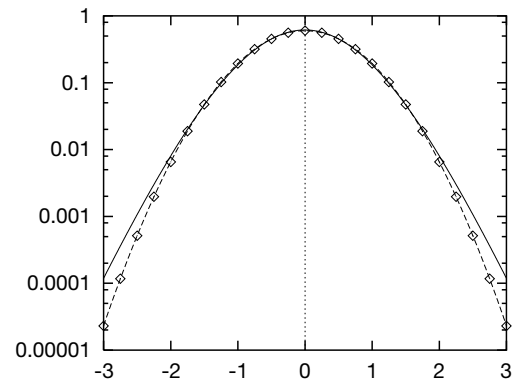
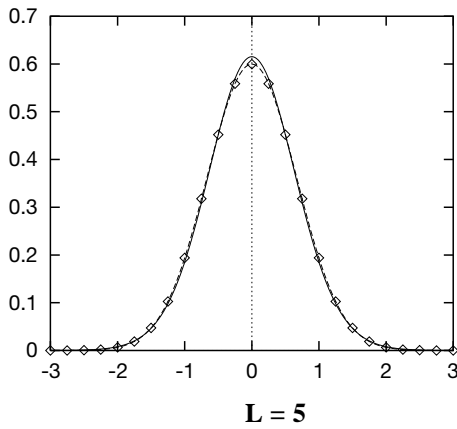
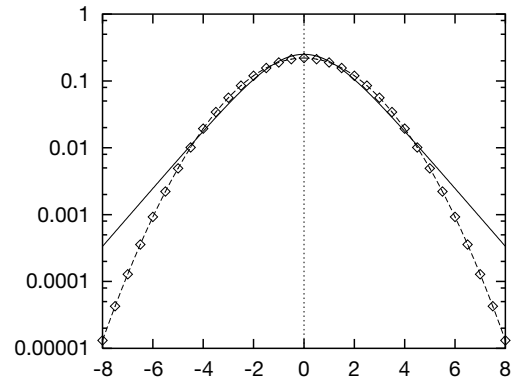
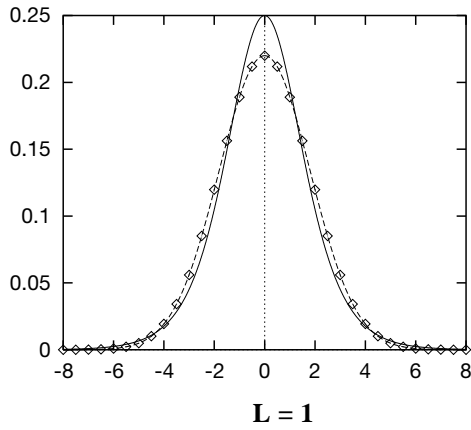


Figure 6. – Densité de probabilité  $\Phi(x)$  des niveaux de gris de l'image  $\beta$  (cf. équation 23) pour des canaux dont les niveaux de gris sont distribués suivant des lois Gamma d'ordres  $L$  différents (ligne continue) et densité de probabilité gaussiennes de même variance (ligne pointillée avec  $\diamond$ ). Colonne de gauche : densité de probabilité. Colonne de droite : logarithme de la densité de probabilité.

$\rho$  et la variable aléatoire  $r = s_1/s_2$ . Si on prend le logarithme de  $r$ , on obtient la variable aléatoire  $\beta$  définie comme suit :

$$\beta = \ln \left[ \frac{s_1}{s_2} \right] = \ln \left[ \frac{\tilde{s}_1}{\tilde{s}_2} \right] + \ln \gamma \quad (21)$$

où  $\tilde{s}_1$  et  $\tilde{s}_2$  sont définies dans la section 3.2, et  $\gamma = \mu_1/\mu_2$ . La variable aléatoire  $\ln \left[ \frac{\tilde{s}_1}{\tilde{s}_2} \right]$  ne dépend que de la distribution  $U(x, y)$ , et pas du paramètre  $u$ . Nous appellerons  $\Phi(x)$  la densité de probabilité de cette variable aléatoire. Il est facile de montrer qu'elle est paire. En effet, on a  $\ln \left[ \frac{\tilde{s}_1}{\tilde{s}_2} \right] = \ln \tilde{s}_1 - \ln \tilde{s}_2$ , qui est donc la différence de deux variables aléatoires identiquement distribuées, ce qui correspond nécessairement à une densité de probabilité symétrique. Cette propriété de symétrie de la densité de probabilité est la différence essentielle qui existe entre la présente étude et le traitement homomorphique des signaux perturbés par un bruit multiplicatif de type speckle [21]. D'après l'équation 21, il est clair que la densité de probabilité de  $\beta$  est égale à :

$$P_\gamma^{(\beta)}(x) = \Phi(x - \ln \gamma) \quad (22)$$

Comme  $\Phi(x)$  est paire, on a  $\langle \beta \rangle = \ln \gamma$ . Par conséquent, une modification du degré de polarisation entraîne une variation de la moyenne de l'image  $\beta$  égale à  $\ln \gamma$ , sans modifier les autres propriétés de la distribution. Du fait de cette propriété, nous appellerons  $\beta$  la *représentation naturelle* de l'ICEO.

Dans le cas où les variables  $s_1$  et  $s_2$  suivent des lois Gamma, il est facile de déterminer la densité de probabilité  $\Phi(x)$ . Il suffit de remarquer que  $\beta = \ln(1 + \rho) - \ln(1 - \rho)$  et d'appliquer la formule classique de transformation d'une variable aléatoire (cf. [22], équation 5.5) à la distribution de  $\rho$  (cf. équation 17). On obtient le résultat suivant :

$$\Phi(x) = \left[ \frac{1}{2} \right]^{2L} \frac{(2L - 1)!}{[(L - 1)!]^2} \left[ \frac{1}{\cosh(x/2)} \right]^{2L} \quad (23)$$

où  $\cosh(x)$  désigne la fonction cosinus hyperbolique. Nous montrons dans la figure 6 l'allure de  $\Phi(x)$  pour trois valeurs différentes de l'ordre  $L$  du speckle. Rappelons que pour une valeur donnée de  $u$ , et donc de  $\gamma$ , la densité de probabilité de l'image  $\beta$  est simplement la fonction  $\Phi(x)$  translatée de la valeur  $\ln \gamma$ . Nous avons aussi tracé sur les mêmes graphes les gaussiennes de même variance que la distribution  $\Phi(x)$ . On peut voir que la fonction  $\Phi(x)$  est d'autant plus proche d'une gaussienne que l'ordre de speckle  $L$  est grand.

Comme  $\langle \beta \rangle = \ln \gamma$ , la moyenne empirique de  $\beta$  est un estimateur non biaisé de  $\ln \gamma$ . À partir de ce résultat, l'estimateur de

$\hat{u}_{dlog}$  consiste à calculer  $\beta(i) = \ln \left[ \frac{s_1(i)}{s_2(i)} \right]$ , puis la moyenne

empirique  $\bar{\beta} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{P-1} \sum_{j=0}^{Q-1} \beta(i, j)$  et enfin :

$$\hat{u}_{dlog} = \frac{e^{\bar{\beta}} - 1}{e^{\bar{\beta}} + 1} = \tanh \left( \frac{\bar{\beta}}{2} \right) \quad (24)$$

Dans l'annexe C, nous étudions les propriétés de cet estimateur. Nous montrons qu'une expression approchée de son biais est la suivante :

$$\hat{u}_{dlog} - u = (u^3 - u) \frac{\sigma_\Phi^2}{4N} \quad (25)$$

où  $\sigma_\Phi^2$  est la variance de  $\Phi(x)$ . Nous voyons que le biais est non nul, mais qu'il tend vers 0 lorsque le nombre  $N$  de valeurs dans l'échantillon augmente :  $\hat{u}_{dlog}$  est donc asymptotiquement non-biaisé. En résumé, on peut dire que  $\bar{\beta}$  est un estimateur non-biaisé de  $\ln \gamma$  et donc de  $\ln \frac{1+u}{1-u}$ , et  $\hat{u}_{dlog}$  est un estimateur asymptotiquement non-biaisé de  $u$ .

Nous avons représenté sur la figure 5 la moyenne et l'écart-type de l'estimateur  $\hat{u}_{dlog}$  dans le cas de canaux suivant des lois Gamma. Ils ont été déterminés par une méthode de Monte-Carlo sur  $10^4$  réalisations, et la taille de l'échantillon était  $N = 50$ . À titre d'exemple, considérons le cas où  $L = 1$ . La valeur de  $\sigma_\Phi$  peut être calculée par intégration numérique, et on trouve  $\sigma_\Phi^2 = 3.29$ . La valeur du biais dépend de  $u$ , mais on peut montrer que sa valeur maximale, atteinte pour  $u = 1/\sqrt{3}$ , est égale à  $-6 \cdot 10^{-3}$ . Pour cette valeur de  $u$ , on voit sur la colonne de droite de la figure 5 que l'écart-type de  $\hat{u}_{dlog}$  est égal à 0.08 : il est donc plus de dix fois supérieur au biais.

Sur la colonne de gauche de la figure 5 on peut vérifier que le biais de l'estimateur est effectivement négligeable. De plus, on constate que son écart-type est légèrement supérieur à celui de l'estimateur du maximum de vraisemblance, mais inférieur à celui de l'estimateur de la médiane.

### 4.3. le cas des loi K et de Weibull

Les propriétés des différents estimateurs ont été illustrées dans les sections précédentes sur des échantillons distribués suivant des lois Gamma. Notre objectif dans cette section est de montrer que ces propriétés restent valables lorsque le speckle est modélisé par d'autres lois. Nous considérons les lois K et les lois de Weibull pour les distributions de  $s_1$  et de  $s_2$ . Il est difficile de déterminer l'expression analytique de la fonction  $\Phi(x)$  dans ces deux cas. Pourtant, nous pouvons montrer que les résultats obtenus sont similaires à ceux obtenus avec des lois Gamma.

Nous avons représenté sur la figure 7 des estimations des fonctions  $\Phi(x)$  pour des exemples de loi de Weibull et de loi K,

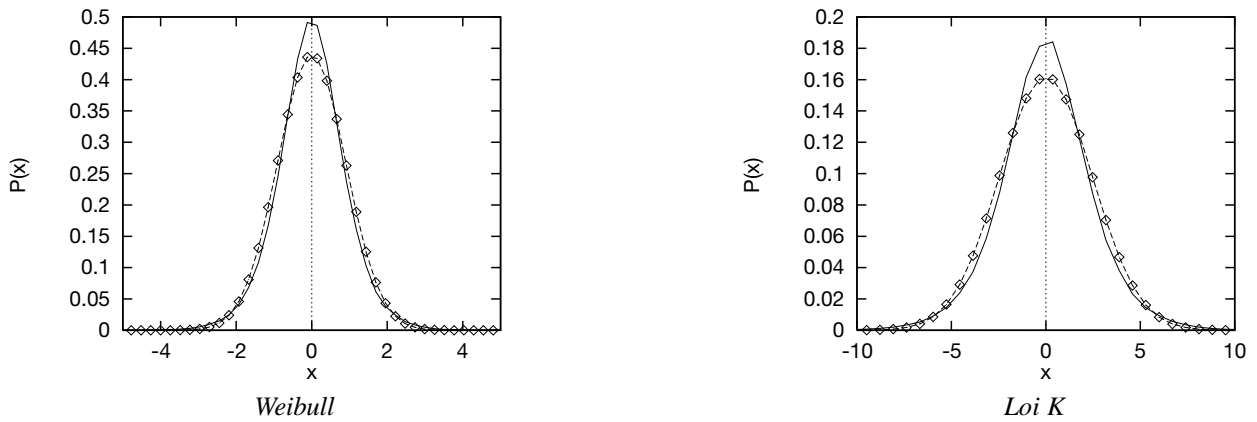


Figure 7. – Densité de probabilité  $\Phi(x)$  des niveaux de gris de l'image  $\beta$  pour des canaux dont les niveaux de gris sont distribués suivant différentes lois, estimées à partir d'échantillons de  $10^5$  valeurs. À gauche : loi de Weibull (cf. équation 9) avec  $b = 2$ . À droite : loi K (cf. équation 10) de paramètres  $\nu = 0.7$  et  $L = 5$ . Traits pointillés : densité de probabilité des gaussiennes de même variance.

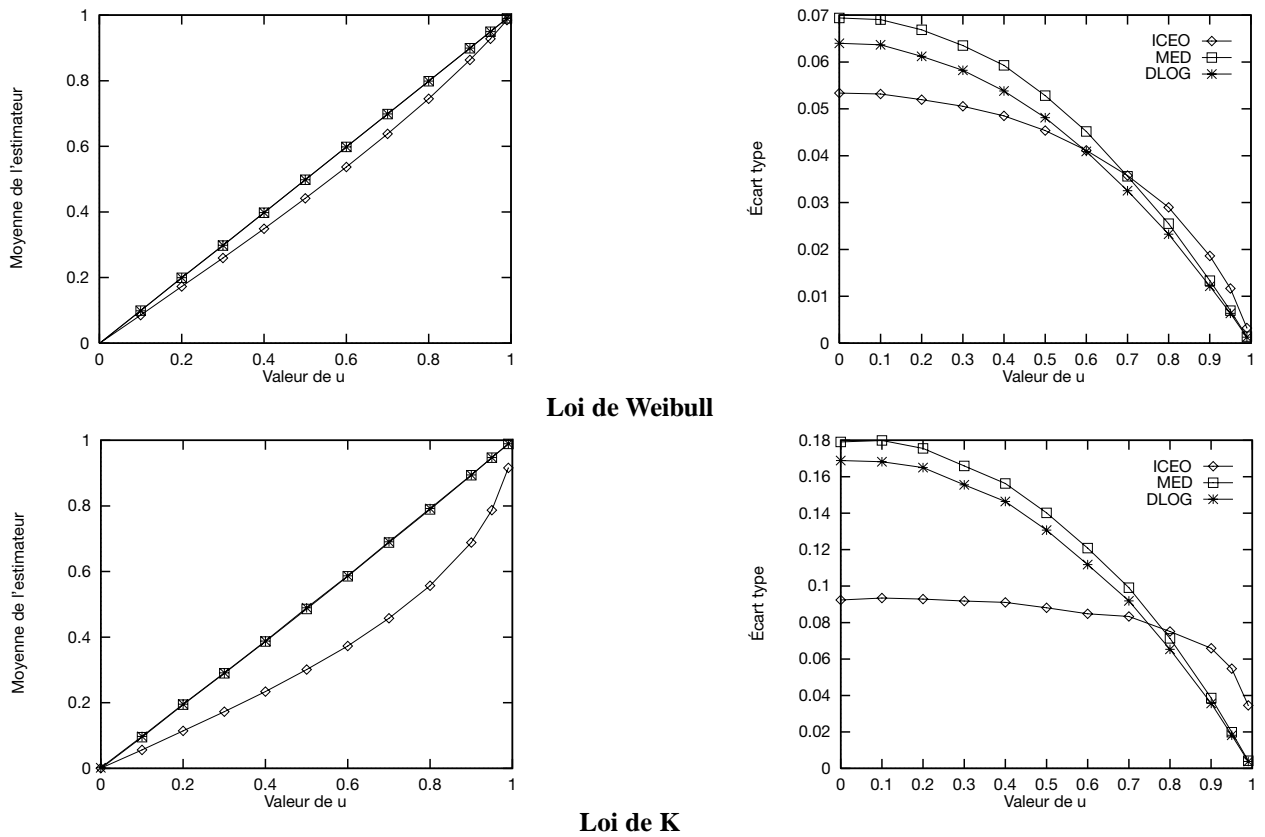


Figure 8. – Moyenne (colonne de gauche) et écart-type (colonne de droite) de l'estimation du degré de polarisation lorsque les canaux dont les niveaux de gris sont distribués suivant les lois de Weibull de paramètres  $b = 2$  (graphes du haut) et des lois K de paramètres  $\nu = 0.7$  et  $L = 5$  (graphes du bas). ( $\diamond$ ) : estimateur de la moyenne empirique sur l'ICEO ( $\hat{u}_{dlog}$ ). ( $\square$ ) : estimateur de la médiane ( $\hat{u}_{med}$ ).

obtenues en réalisant un histogramme. On constate que les fonctions sont similaires à celle obtenue dans le cas des lois Gamma : elles sont symétriques, et ont une forme « en cloche ». Nous avons aussi représenté sur les mêmes figures les densités de probabilité gaussiennes ayant la même variance que  $\Phi(x)$ . On peut voir que comme dans le cas des loi Gamma, la fonction  $\Phi(x)$  est proche d'une gaussienne. Enfin, nous présentons dans

la figure 8 les estimations de la moyenne et de la variance d'estimation du degré de polarisation  $u$  dans le cas de lois de Weibull et K, à l'aide des estimateurs  $\hat{u}_{iceo}$ ,  $\hat{u}_{med}$  et  $\hat{u}_{dlog}$ . On constate que les conclusions que l'on peut en déduire sur les propriétés des différents estimateurs sont similaires à celles obtenues à partir des lois Gamma.

#### 4.4. conclusion

Nous avons comparé les performances de différents estimateurs du degré de polarisation à partir d'un échantillon de niveaux de gris de pixels d'une image polarimétrique. Au point de vue de la variance d'estimation, l'estimateur du maximum de vraisemblance  $\hat{u}_{mv}$  et celui reposant sur la représentation naturelle  $\hat{u}_{dlog}$  ont des performances similaires. Cependant, l'estimateur  $\hat{u}_{dlog}$  présente l'avantage d'avoir une expression indépendante de la densité de probabilité du speckle. Ce n'est pas le seul avantage de la représentation naturelle  $\beta$ . En effet, dans cette représentation, une variation du degré de polarisation ne modifie que la moyenne des fluctuations, et non la forme de la densité de probabilité des niveaux de gris. D'autre part, leur densité de probabilité est proche d'une gaussienne. Nous démontrerons dans la section suivante que ces propriétés permettent de définir des algorithmes de traitement d'images rapides et efficaces.

## 5. applications au traitement des images polarimétriques

Deux des opérations les plus courantes réalisées sur des images sont la détection de zones de contraste (cibles de petite taille ou bords) et la segmentation d'objets. Il est clair que sur des images fortement perturbées telles que l'ICEO, il est nécessaire de prendre en compte les caractéristiques du bruit pour concevoir des algorithmes efficaces. Cela a été démontré dans le traitement des images SAR, où les filtres de détection et les algorithmes de segmentation adaptés se sont révélés bien supérieurs aux techniques classiques [8, 12]. Notre objectif dans cette section est d'utiliser le principe des méthodes qui ont fait leurs preuves en SAR pour traiter les images polarimétriques. L'originalité de l'étude tient au fait que comme nous l'avons montré dans la section précédente, la densité de probabilité des perturbations est plus complexe que dans le cas du SAR, et n'appartient pas à la famille exponentielle. Nous rechercherons donc les algorithmes réalisant un bon compromis entre performance et efficacité en temps de calcul.

### 5.1. détection

Notre objectif va être de déterminer des algorithmes de détection de cibles ou de bords robustes aux fluctuations de niveaux de gris présentes dans l'ICEO. Mais auparavant, nous décrivons brièvement le principe des algorithmes que nous considérons.

#### 5.1.1. algorithmes de détection reposant sur le rapport de vraisemblance

Le problème que nous considérons est celui de la détection de zones de contraste dans l'image. Pour cela, nous balayons

l'image avec un masque  $\mathbf{F}$  qui contient  $N_F$  pixels et qui est partitionné en deux régions disjointes  $\mathbf{w}$  et  $\overline{\mathbf{w}}$ . La géométrie de ces régions dépend de l'application. Ainsi, nous avons représenté sur la figure 9 les structures adaptées à la détection d'un bord horizontal, d'un bord vertical et d'une cible de petite taille. Nous noterons le nombre de pixels dans chaque région  $N_w$ ,  $N_{\overline{w}}$  and  $N_{\overline{w}}$ , avec la propriété  $N_F = N_w + N_{\overline{w}}$ .

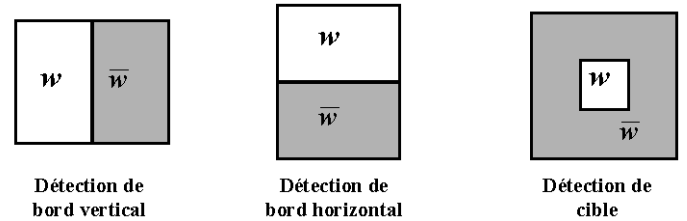


Figure 9. – Structure de masques pour la détection de bords et de cibles. Le masque  $\mathbf{F}$  est l'union des masques  $\mathbf{w}$  et  $\overline{\mathbf{w}}$ .

Pour chaque position  $(i, j)$  dans l'image,  $\mathbf{F}$  recouvre un échantillon de  $N_F$  pixels. Nous supposons que les valeurs de ces pixels sont des variables aléatoires indépendantes de densité de probabilité  $P_\theta(x)$  où  $\theta$  est un vecteur de paramètres. Le « test du maximum du rapport de vraisemblance » (MLRT, pour « Maximum Likelihood Ratio Test » en anglais) [20] consiste à comparer les deux hypothèses suivantes :

- $\mathbf{H}_0$  : les niveaux de gris des pixels dans les régions  $\mathbf{w}$  et  $\overline{\mathbf{w}}$  sont distribués suivant des densités de probabilité ayant le même paramètre  $\theta_b$ .
- $\mathbf{H}_1$  : les niveaux de gris des pixels dans les régions  $\mathbf{w}$  et  $\overline{\mathbf{w}}$  sont distribués suivant des densités de probabilité ayant des paramètres différents  $\theta_a$  et  $\theta_b$ .

On calcule le logarithme du rapport des vraisemblances des deux hypothèses, ce qui revient à faire la différence de leurs logvraisemblances  $\mathcal{L}_1(\theta_a, \theta_b)$  et  $\mathcal{L}_0(\theta_b)$  :

$$\mathcal{R}(\theta_a, \theta_b) = \mathcal{L}_1(\theta_a, \theta_b) - \mathcal{L}_0(\theta_b) \quad (26)$$

Cependant, ce rapport dépend des paramètres  $\theta_a$  et  $\theta_b$  qui sont en général inconnus, et qui doivent être estimés à partir des données, dans chacune des hypothèses. On obtient alors le « test du rapport de vraisemblance généralisé » (GLRT, pour « Generalized Likelihood Ratio Test » en anglais) [20] :

$$\mathcal{R} = \max_{\theta_a, \theta_b} \mathcal{L}_1(\theta_a, \theta_b) - \max_{\theta_b} \mathcal{L}_0(\theta_b) \quad (27)$$

$\mathcal{R}$  est comparé à un seuil  $\lambda$  de telle sorte que :

$$\begin{cases} \text{si } \mathcal{R} \geq \lambda & , \quad H_1 \text{ est choisie} \\ \text{si } \mathcal{R} < \lambda & , \quad H_0 \text{ est choisie} \end{cases} \quad (28)$$

La valeur du paramètre  $\lambda$  détermine le compromis entre probabilité de détection ( $P_D$ ) et probabilité de fausse alarme ( $P_{FA}$ ). Le MLRT (cf. équation 26) est l'algorithme qui donne la meilleure probabilité de détection pour une probabilité de fausse alarme donnée. En revanche, le GLRT ne possède pas cette propriété en général [20], mais il fournit en pratique de bonnes performances.

### 5.1.2. détection sur l'ICEO et la représentation naturelle

Si l'on connaît la densité de probabilité des niveaux de gris de l'ICEO, il est possible de déterminer l'expression exacte du GLRT. Cependant, nous avons vu dans les sections précédentes que l'estimation du paramètre  $u$  au sens du maximum de vraisemblance nécessite la résolution itérative de l'équation 20, ce qui rend le GLRT lourd en temps de calcul. Or dans les applications courantes, les algorithmes de type GLRT sont utilisés pour détecter des régions d'intérêt, qui seront analysées ensuite par des algorithmes plus performants, et plus complexes. Un tel algorithme doit donc être le plus simple et le plus rapide possible [23]. Une manière d'obtenir un algorithme rapide consiste à considérer une approximation de la densité de probabilité réelle de l'ICEO par une loi dont les paramètres peuvent être plus facilement estimés au sens du maximum de vraisemblance, comme par exemple une loi gaussienne. Dans ce cas, il est clair que les performances dépendront de l'adéquation de cette loi approchée avec la distribution réelle des niveaux de gris dans l'image. Le choix de la représentation de l'ICEO sera donc important.

Dans les sections précédentes, nous avons utilisé deux représentations de l'ICEO :  $\rho$  (cf. équation 12) et  $\beta$  (cf. équation 21). Ces deux représentations se déduisent l'une de l'autre par une transformation bijective. Par conséquent, elles permettent bien de décrire la même grandeur physique. Cependant, si on utilise le GLRT adapté à des lois gaussiennes, les performances dépendent des densités de probabilité des niveaux de gris dans ces deux représentations, qui sont différentes (cf. figure 3 et 6). De ce point de vue, la représentation naturelle  $\beta$  présente deux avantages déterminants sur la représentation habituelle  $\rho$ .

Tout d'abord, comme on peut le voir en comparant les figures 3 et 6, la forme de la densité de probabilité de la représentation  $\beta$ , qui est symétrique quelle que soit la valeur de  $u$ , est plus proche de celle d'une variable aléatoire gaussienne que celle de  $\rho$ . De plus, dans l'image  $\beta$ , seule la moyenne de la distribution des niveaux de gris dépend du degré de polarisation  $u$ . Ainsi, deux zones présentant un contraste de degré de polarisation auront des densités de probabilité de même forme, et en particulier de même variance. On peut donc leur appliquer le GLRT adapté à des lois gaussiennes de variances identiques et de moyennes différentes. Nous montrons dans l'annexe D.1 que l'expression de ce GLRT est :

$$GLRT_{\beta} = A [\hat{m}_w - \hat{m}_{\bar{w}}]^2 \quad (29)$$

où  $A = \frac{1}{2\sigma^2} \frac{N_w N_{\bar{w}}}{N_F}$ ,  $\sigma = \sigma_a = \sigma_b$  est la variance commune aux deux régions  $w$  et  $\bar{w}$ , et

$$\hat{m}_{\alpha} = \frac{1}{N_{\alpha}} \sum_{(i,j) \in \alpha} s(i,j) \quad (30)$$

avec  $\alpha = w$  ou  $\bar{w}$ . On peut constater que  $GLRT_{\beta}$  est équivalent à un filtrage linéaire avec mise au carré du résultat. Il est donc potentiellement très rapide.

Dans la représentation naturelle  $\beta$ , les densités de probabilité des niveaux de gris de la cible et du fond ne diffèrent que par leurs moyennes  $\ln \gamma_a$  et  $\ln \gamma_b$ . Par conséquent, les performances du  $GLRT_{\beta}$  ne dépendent que de la différence entre ces moyennes. On peut donc définir le coefficient de contraste entre deux régions de degrés de polarisation  $u_a$  et  $u_b$  de la manière suivante (cf. figure 10) :

$$\chi = |\ln \gamma_a - \ln \gamma_b| = \left| \ln \frac{\mu_1^a \mu_2^b}{\mu_2^a \mu_1^b} \right| = \left| \ln \frac{(1+u_a)(1-u_b)}{(1-u_a)(1+u_b)} \right| \quad (31)$$

où l'on a utilisé la relation entre  $\gamma$  et  $u$  apparaissant dans l'équation 14. On peut aussi définir la valeur de  $\chi$  en décibels de la manière suivante :

$$\chi_{dB} = 10 \left| \frac{\chi}{\ln 10} \right| = 10 \left| \log_{10} \frac{(1+u_a)(1-u_b)}{(1-u_a)(1+u_b)} \right| \quad (32)$$

On peut constater que ce coefficient dépend de manière non triviale des degrés de polarisation dans les deux régions.

Si dans la représentation  $\beta$ , les performances du  $GLRT_{\beta}$  ne dépendent que de  $\chi$ , il n'en est pas de même lorsqu'on travaille

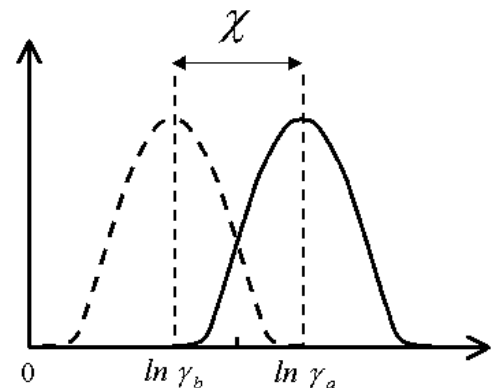


Figure 10. – Définition du contraste  $\chi$  sur la représentation naturelle  $\beta$ . Trait continu : densité de probabilité des niveaux de gris de la cible. Trait pointillé : densité de probabilité des niveaux de gris du fond.

sur la représentation standard  $\rho$ . En effet, dans ce cas, les densités de probabilité sur la cible et sur le fond ont des formes différentes, qui varient avec les valeurs de  $u_a$  et  $u_b$ . En particulier, lorsque le degré de polarisation  $u$  change, la moyenne et la variance de la loi sont modifiées. Par conséquent, contrairement à la représentation  $\beta$ , les fluctuations ne peuvent plus être considérées comme additives. Pour réaliser la détection, on peut utiliser le GLRT adapté à des lois gaussiennes de moyennes et de variances différentes, dont l'expression est la suivante (cf. annexe D.2) :

$$GLRT_\rho = -N_w \ln[\hat{\sigma}_w] - N_{\bar{w}} \ln[\hat{\sigma}_{\bar{w}}] + N_F \ln[\hat{\sigma}_F] \quad (33)$$

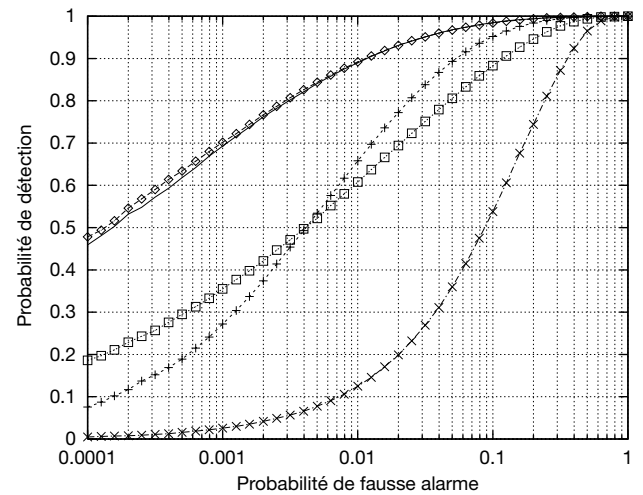
avec

$$\hat{\sigma}_\alpha^2 = \frac{1}{N_\alpha} \sum_{(i,j) \in \alpha} [\rho(i,j) - \hat{m}_\alpha]^2, \quad (34)$$

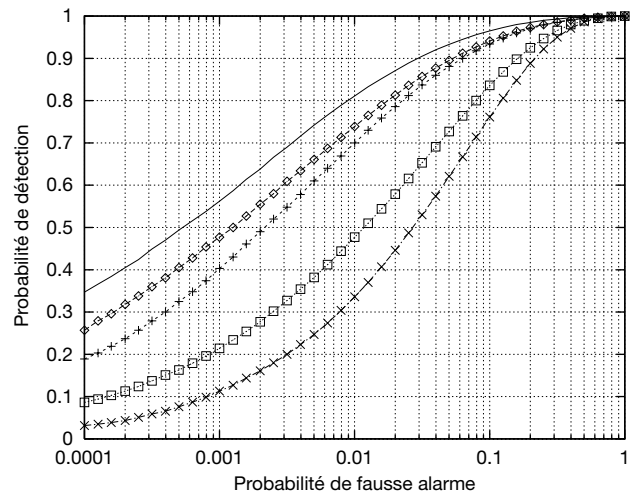
et  $\alpha = w, \bar{w}$  ou  $F$ . Ce détecteur est plus complexe que  $GLRT_\beta$ . De plus, le contraste  $\chi$  ne représente plus la difficulté de traitement de l'image  $\rho$  par le  $GLRT_\rho$ .

Afin de comparer les deux approches  $GLRT_\beta$  et  $GLRT_\rho$ , nous avons tracé leurs « caractéristiques opérationnelles de récepteur » (COR) pour différents paramètres  $u_a$  et  $u_b$ . Ces courbes représentent la probabilité de détection en fonction de la probabilité de fausse alarme du détecteur, et sont obtenues en faisant varier le seuil de détection  $\lambda$ . Elles ont été estimées par une méthode de Monte-Carlo sur  $10^6$  réalisations. Les nombres de pixels de la cible ( $N_w$ ) et du fond ( $N_{\bar{w}}$ ) sont égaux à 50. Nous avons choisi 4 combinaisons de paramètres  $u_a$  et  $u_b$ , qui correspondent toutes à une même valeur de  $\chi_{dB}$ . Nous pouvons voir sur la figure 11 que les performances du détecteur  $GLRT_\rho$  sont très dépendantes des valeurs de  $u_a$  et  $u_b$ . En particulier, ces performances sont faibles lorsque  $u_b$  est fort, c'est-à-dire lorsque la cible dépolarise plus que le fond. Lorsque la probabilité de fausse alarme d'un détecteur ne dépend pas des paramètres statistiques du fond, mais seulement du seuil de détection utilisé, on dit qu'il est à « taux de fausse alarme constant » (CFAR, pour « constant false alarm rate ») : le  $GLRT_\beta$  est CFAR, alors que le  $GLRT_\rho$  ne l'est pas.

Nous allons illustrer ces résultats sur une application importante, qui est la détection de bords dans une image. Dans ce cas, les masques  $w$  et  $\bar{w}$  ont la forme de rectangles contigus (cf. figure 9). Nous avons généré des images synthétiques comprenant deux zones ayant des degrés de polarisation différents, pour un speckle d'ordre 1. Le masque  $F$  a une forme du type de celle de la figure 9, dessin de gauche, où chaque partie a une taille  $5 \times 10$  pixels. Nous avons comparé les résultats de l'application du  $GLRT_\rho$  à l'image  $\rho$  et du  $GLRT_\beta$  à l'image  $\beta$ . Nous pouvons constater que lorsqu'on utilise le  $GLRT_\rho$ , les fluctuations de la sortie du détecteur n'ont pas la même amplitude sur les



$$L = 1, \chi_{dB} = 6dB$$



$$L = 5, \chi_{dB} = 2dB$$

Figure 11. – Performances des détecteurs  $GLRT_\beta$  et  $GLRT_\rho$  en présence de speckle Gamma d'ordres  $L = 1$  et  $L = 5$ . Sur les deux graphes, la ligne continue représente la ROC du  $GLRT_\beta$ , qui ne dépend que de  $\chi_{dB}$ . Les autres courbes représentent les ROC du  $GLRT_\rho$ , pour une même valeur de  $\chi_{dB}$  mais différentes combinaisons de valeurs ( $u_a, u_b$ ). Graphe du haut : ( $\diamond$ ) : (0.6, 0) ; ( $\square$ ) : (0.9, 0.67) ; (+) : (0, 0.6) ; ( $\times$ ) : (0.67, 0.78). Dans tous les cas,  $N_w = 50$  pixels et  $N_F = 100$  pixels. Les COR ont été obtenues par une méthode de Monte-Carlo avec  $10^6$  réalisations.

parties claires et sombres de l'image. C'est une illustration du fait que ce détecteur ne possède pas la propriété CFAR, contrairement au  $GLRT_\beta$ . Les images seuillées montrent également que c'est avec le  $GLRT_\beta$  que l'on obtient les meilleurs résultats. Enfin, nous présentons sur la figure 13 quelques exemples de détection de bords sur des images polarimétriques réelles (dans la représentation naturelle  $\beta$ ). Afin de pouvoir détecter des bords d'orientations différentes, nous avons utilisé quatre masques différents, qui sont quatre versions du masque utilisé dans les simu-

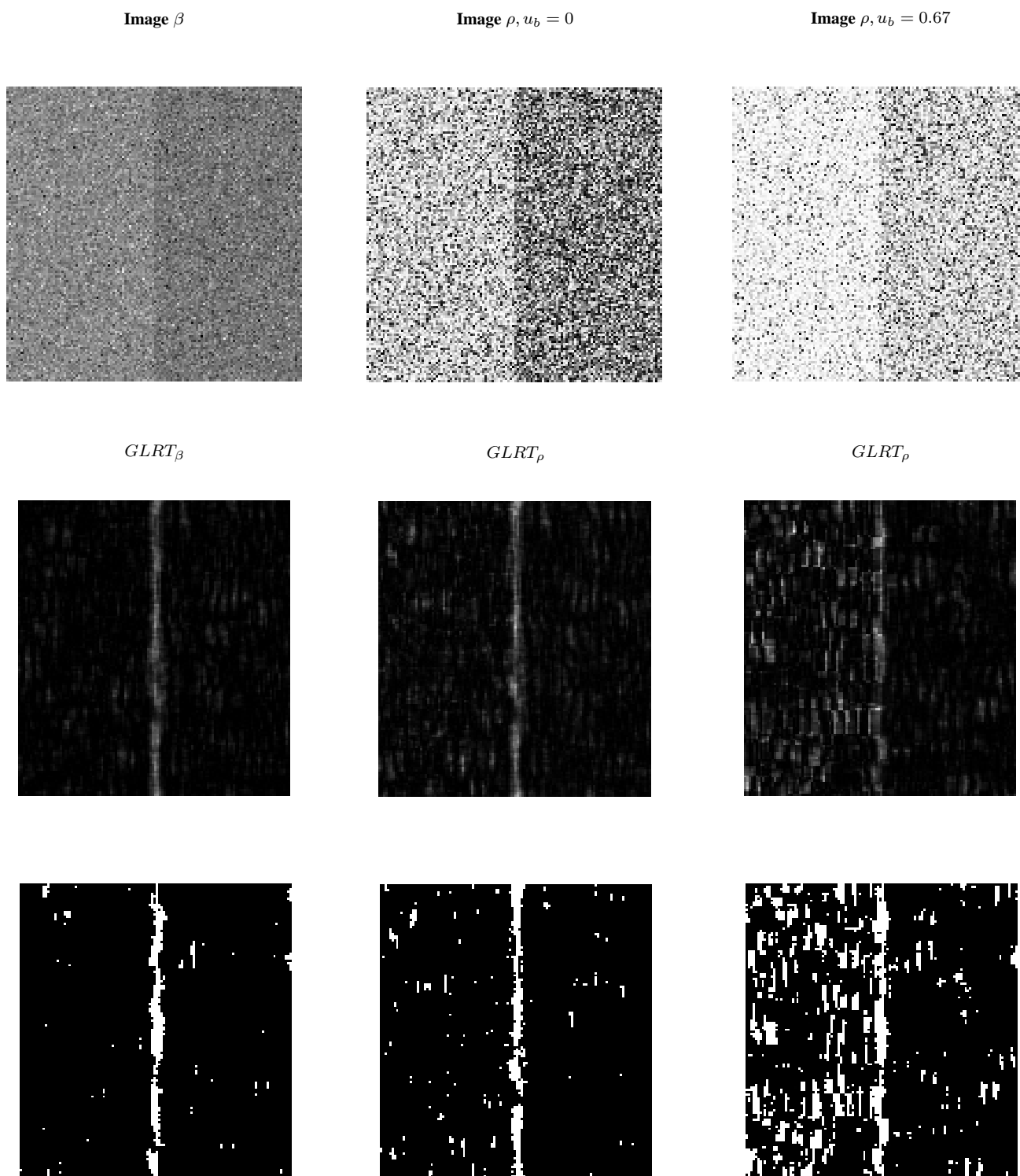


Figure 12. – Ligne du haut : Représentation naturelle  $\beta$  et image  $\rho$  pour deux valeurs de  $u_b$  (paramètres de la partie sombre de l'image) différentes. Dans tous les cas,  $L = 1$  et  $\chi = 6dB$ . Deuxième ligne : résultat de l'application du *GLRT* adapté aux trois images. Troisième ligne : Version binarisée des images précédentes.



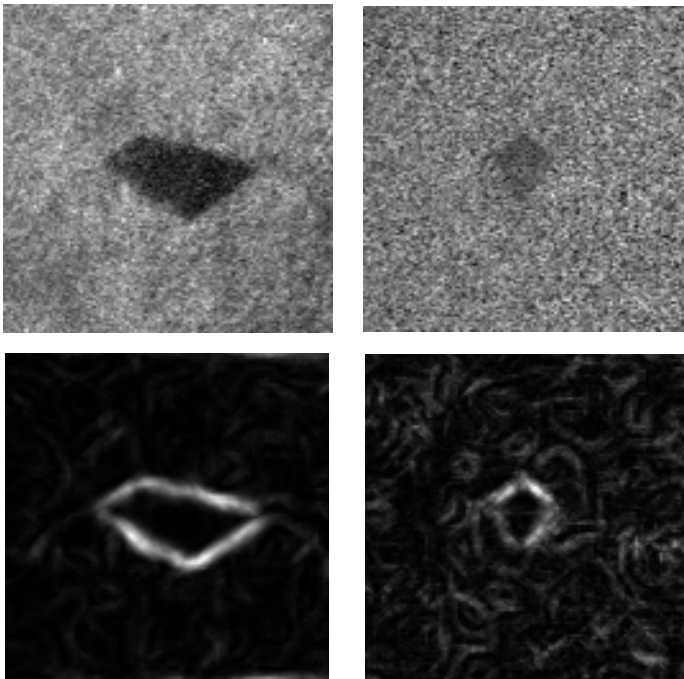


Figure 13. – Exemples de détection de bords sur des images polarimétriques réelles. Première ligne : Image  $\beta$ . Deuxième ligne : résultat de l'application du détecteur de bords  $GLRT_{\beta}$ . Le détecteur de bords a été construit à partir de quatre masques orientés à 0, 45, 90 et 135 degrés afin d'être sensible à des bords d'orientations différentes.

lations précédentes tournées de 0, 45, 90 et 135 degrés. On obtient ainsi quatre plans de sortie :  $P_0(i, j)$ ,  $P_{45}(i, j)$ ,  $P_{90}(i, j)$  et  $P_{135}(i, j)$ . Le plan de sortie total est obtenu en prenant, en chaque pixel  $(i, j)$ , le maximum de ces 4 plans.

## 5.2. segmentation par contours actifs statistiques

Pour segmenter des cibles résolues dans les images polarimétriques, nous proposons d'utiliser un algorithme de segmentation par contours actifs développé récemment [12, 13]. Cet algorithme repose sur une modélisation de l'image en une zone cible et une zone fond, dont les niveaux de gris ont des densités de probabilité homogènes. On cherche à déterminer la forme  $w$  de la zone cible. Nous avons choisi de représenter cette forme par un polygone. La forme  $w$  est alors paramétrée par les positions des noeuds de ce polygone. Dans la suite, nous utiliserons la même notation  $w$  pour désigner la forme géométrique de la cible et les paramètres qui la définissent.

On peut associer à chaque valeur du paramètre  $w$  une vraisemblance  $L(w)$ . L'algorithme consiste à déterminer la forme qui maximise cette vraisemblance. En d'autres termes, le contour final est défini par :

$$\hat{w} = \arg \max_w L(w) \quad (35)$$

Pour maximiser ce critère, nous utilisons un algorithme stochastique très simple. Il consiste à itérer le processus suivant

- choisir aléatoirement un nœud du polygone, et le déplacer de manière aléatoire,
- accepter le déplacement s'il a diminué  $L(w)$ , le refuser sinon, pendant un nombre fini d'itérations [13]. On peut noter que cet algorithme, s'il présente l'avantage d'être simple et rapide, ne garantit pas une convergence vers le minimum global de  $L(w)$ . D'autre part, le résultat final dépend de la forme initiale du contour actif. Pour augmenter la robustesse de l'algorithme à ces paramètres, nous avons mis en œuvre une méthode de multi-résolution simple, dans laquelle le nombre de nœuds du polygone est augmenté progressivement. En d'autres termes, la segmentation commence avec un nombre réduit de nœuds, ce qui permet d'obtenir une approximation grossière du contour de l'objet. Par exemple, sur la figure 14, le contour initial contient 4 nœuds. On rajoute ensuite des nœuds supplémentaires entre

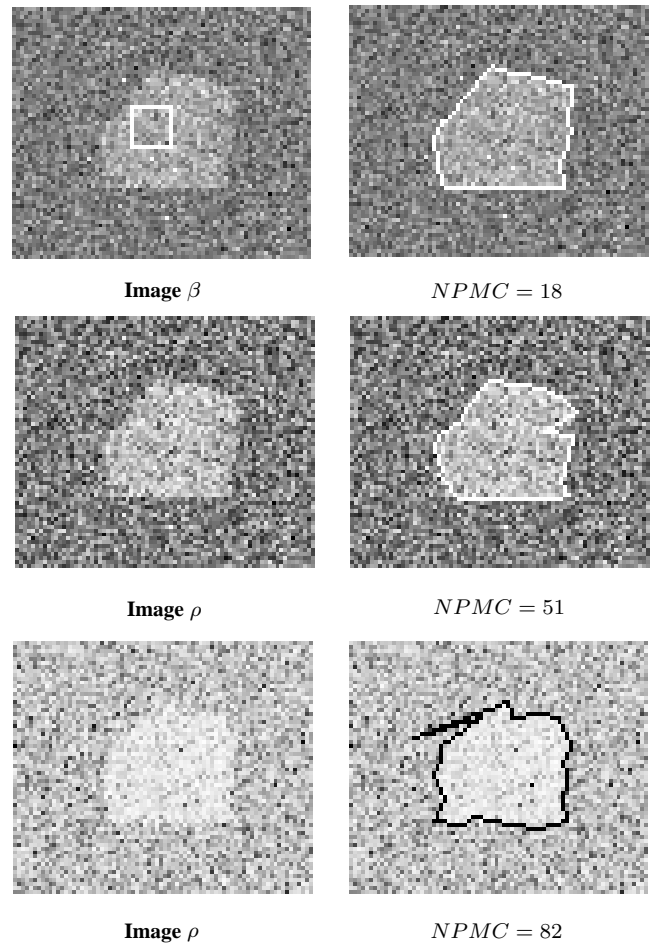


Figure 14. – Première ligne : Image  $\beta$ ,  $L = 5$ ,  $\chi_{dB} = 4dB$  (le carré blanc représente le contour initial), et résultat de la segmentation avec le nombre de pixels mal placés ( $NPMC$ ) estimé sur l'image segmentée. Deuxième ligne : Image  $\rho$ ,  $L = 5$ ,  $\chi_{dB} = 4dB$ ,  $u_a = 0.43$ ,  $u_b = 0$ , et résultat de la segmentation. Troisième ligne : Image  $\rho$ ,  $L = 5$ ,  $\chi_{dB} = 4dB$ ,  $u_a = 0.85$ ,  $u_b = 0.67$ , et résultat de la segmentation.

ceux du contour obtenu, et on fait converger le nouveau contour. On peut itérer ce processus un certain nombre de fois, ce qui permet d'obtenir une estimation de plus en plus fine du contour de l'objet. En pratique, nous nous limiterons à une approche en trois étapes. Des exemples d'application de cette technique apparaissent sur la figure 14.

L'un des avantages de cet algorithme est qu'il est très rapide : une segmentation telle que celles représentées sur la figure 14 est obtenue en quelques centaines de millisecondes sur un PC 750 MHz. Cependant, ces temps de calculs sont obtenus par une optimisation du calcul de la vraisemblance, qui n'est possible que lorsque les densités de probabilité utilisées pour modéliser l'image appartiennent à la famille exponentielle [13]. Plus encore que dans le cas de la détection, il est donc nécessaire de modéliser les densités de probabilité des niveaux de gris de l'image par des lois appartenant à cette famille, comme par exemple les lois gaussiennes.

Comme dans la section précédente, nous comparerons les performances de segmentation sur les représentations  $\rho$  et  $\beta$ . Pour l'image  $\beta$ , nous modélisons les niveaux de gris de l'image par des variables aléatoires gaussiennes de même variance sur la cible et sur le fond. Nous montrons dans l'annexe D.1 que maximiser la vraisemblance revient à maximiser la fonction suivante :

$$L_\beta(\mathbf{w}) = N_w \hat{m}_w^2 + N_{\bar{w}} \hat{m}_{\bar{w}}^2 \quad (36)$$

où  $\hat{m}_w$  et  $\hat{m}_{\bar{w}}$  sont définis dans l'équation 30. À l'inverse, pour la segmentation sur l'image  $\rho$ , nous modélisons ces niveaux de gris par des distributions gaussiennes de moyenne et de variance différentes sur la cible et sur le fond. Nous montrons dans l'annexe D.2 que maximiser la vraisemblance revient alors à maximiser la fonction suivante :

$$L_\rho(\mathbf{w}) = -N_w \ln[\hat{\sigma}_w] - N_{\bar{w}} \ln[\hat{\sigma}_{\bar{w}}] \quad (37)$$

où  $\hat{\sigma}_w^2$  et  $\hat{\sigma}_{\bar{w}}^2$  sont définis dans l'équation 34.

Notre objectif est de comparer les performances de segmentation obtenues en utilisant les contours actifs optimisant soit  $L_\beta$  sur l'image  $\beta$ , soit  $L_\rho$  sur l'image  $\rho$ . Pour cela, nous avons considéré différentes combinaisons de valeurs de  $u_a$  et  $u_b$  correspondant à une valeur de  $\chi_{dB}$  fixée. À partir de ces valeurs, nous avons généré des images avec comme cible la forme polygonale représentée sur la figure 14. Nous avons appliqué les contours actifs optimisant  $L_\rho$  sur la représentation  $\rho$  et  $L_\beta$  sur la représentation  $\beta$ . Afin d'estimer la qualité de la segmentation, nous avons calculé à l'issue de chaque segmentation le nombre de pixels mal classés (NPMC). Un pixel est considéré comme mal classé s'il se trouve à l'intérieur du contour final alors qu'il appartient au fond, ou s'il se trouve à l'extérieur alors qu'il appartient à la cible. En moyennant cette valeur sur un grand

nombre de réalisations des images (1000), on obtient le nombre moyen de pixels mal classés (NMPMC). Les valeurs de NMPMC en fonction des différentes valeurs de  $u_a$  et  $u_b$  apparaissent sur le tableau 1. On peut constater que les performances du contour actif  $L_\beta$  ne dépendent pas des valeurs relatives de  $u_a$  et  $u_b$  mais seulement de  $\chi_{dB}$ , contrairement au contour actif  $L_\rho$ . De plus, les performances du contour actif  $L_\beta$  sont, dans tous les cas considérés, au moins égales à celles du contour actif  $L_\rho$ .

**Tableau 1. – Nombres moyens de pixels mal classés (NMPMC) obtenu par segmentation avec les contours actifs optimisant  $L_\beta$  sur l'image  $\beta$  et  $L_\rho$  sur l'image  $\rho$ , pour  $\chi_{dB}$  fixé mais pour différentes valeurs de  $u_a$  et  $u_b$ . Tableau du bas :  $L = 5, \chi_{dB} = 4dB$ . Les images segmentées sont du type de celles représentées sur la figure 14. Le NMPMC a été estimé sur 1000 réalisations.**

$$L = 1, \chi_{dB} = 6dB$$

$u_a$	$u_b$	NMPMC – $\beta$	NMPMC – $\rho$
0.6	0	104	114
0.9	0.67	105	330
0	0.6	103	104
0.67	0.9	101	192

$$L = 5, \chi_{dB} = 4dB$$

$u_a$	$u_b$	NMPMC – $\beta$	NMPMC – $\rho$
0.43	0	36	37
0.85	0.67	35	56
0	0.43	35	38
0.67	0.85	35	59

Nous pouvons voir sur la figure 15 un exemple de segmentation sur une image polarimétrique réelle. Nous avons aussi fait figurer le résultat d'une segmentation menée sur le canal  $s_1(i, j)$ . On peut voir que le résultat n'est pas satisfaisant, à cause de la non-uniformité de l'éclairage qui crée des zones de contraste ne correspondant à aucune structure dans la scène. En revanche, la segmentation menée sur l'image  $\beta$  donne de meilleurs résultats. Cela montre l'intérêt de travailler sur l'image de degré de polarisation en imagerie active.

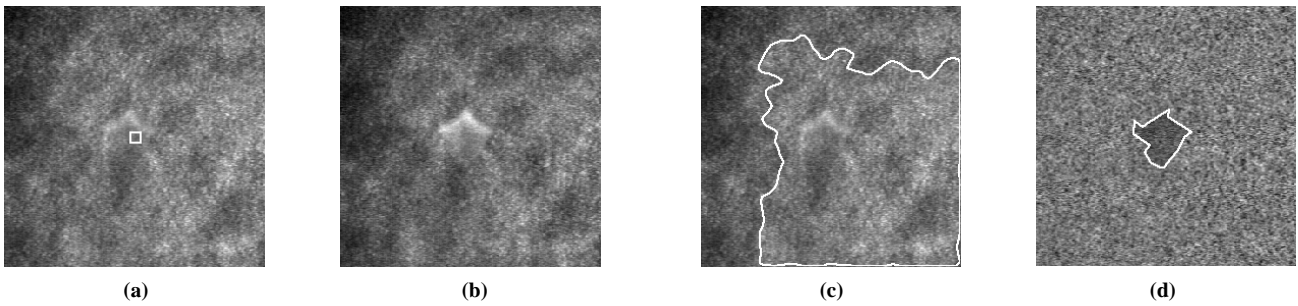


Figure 15. – Exemple de segmentation par contour actif d’une image polarimétrique réelle. (a) :  $s_1$  avec le contour initial. (b)  $s_2$  (c) : Résultat de l’application du contour actif optimisant  $L_\rho$  sur le canal  $s_1$ . (d) : Résultat de l’application du contour actif optimisant  $L_\beta$  sur l’image  $\beta$ .

## 6. conclusion

Nous avons étudié dans cet article l’Image de Contraste d’États Orthogonaux (ICEO), qui représente une estimation locale du degré de polarisation de la lumière réfléchiée par une scène lorsque celle-ci est composée de matériaux purement dépolariants et isotropes. Cette image présente en outre la propriété d’être invariante aux fluctuations d’intensité du faisceau d’illumination.

Nous avons analysé les propriétés statistiques de l’ICEO, dont les fluctuations sont dues au phénomène de speckle toujours présent en imagerie cohérente. Nous avons comparé les performances de différents estimateurs du degré de polarisation à partir d’un échantillon de valeurs de l’ICEO. En particulier, nous avons montré qu’il existe une représentation « naturelle » de l’ICEO pour laquelle la distribution des fluctuations est symétrique et additive. Cette représentation permet de déterminer un estimateur simple et performant du degré de polarisation. De plus, dans cette représentation, on peut utiliser de manière efficace des algorithmes rapides de traitement d’images. Ainsi, on peut réaliser une détection de bords à taux de fausse alarme constant sous la forme d’un simple filtrage linéaire. Enfin, les méthodes de contours actifs statistiques appliquées à cette représentation permettent d’obtenir une segmentation efficace et robuste de cibles de faible visibilité.

Un développement naturel de ce travail sera de considérer le cas où les quatre paramètres de Stokes de l’état de polarisation de la lumière réfléchiée peuvent varier sur les deux zones de l’image. Le problème de détection ou de segmentation, qui est alors défini *a priori* par 8 paramètres, est plus complexe. Des travaux sur ce point sont en cours dans notre équipe.

## Remerciements

Les auteurs remercient Sébastien Breugnot et Michel Papuchon de la société Thalès Optronique – SA ainsi que Daniel Dolfi de

Thalès R&T pour des discussions enrichissantes et pour avoir fourni les images polarimétriques. Ils souhaitent également remercier les rapporteurs anonymes dont les remarques les ont aidés à améliorer le manuscrit. Ce travail a été partiellement financé par la Direction Générale de l’Armement / Direction des Systèmes de Forces et de la Prospective / Service Technique des Technologies Communes.

## Annexes

### A Propriétés statistiques de l’ICEO

Dans cette annexe, nous démontrons les résultats utilisés dans la section 3.2.

#### A.1 expression de $\Psi(x)$ dans le cas général

Soit  $(s_1, s_2)$  un vecteur aléatoire bidimensionnel de densité de probabilité conjointe :

$$P_{s_1, s_2}(x, y) = \frac{1}{\mu_1 \mu_2} U\left(\frac{x}{\mu_1}, \frac{y}{\mu_2}\right) \quad (38)$$

Le vecteur  $(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2)$  est défini comme ayant pour densité de probabilité la fonction  $U(x, y)$ , ce qui correspond à des valeurs  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ . Définissons la variable aléatoire  $\eta = \frac{\tilde{s}_1 - \tilde{s}_2}{\tilde{s}_1 + \tilde{s}_2}$ . Notre objectif est de déterminer la densité de probabilité  $\Psi(x)$  de  $\eta$ . Nous utilisons pour cela une méthode classique définie dans [22], p. 124. Considérons le changement de variables suivant, ainsi que son inverse :

$$\begin{cases} \xi &= \tilde{s}_1 \\ \eta &= \frac{\tilde{s}_1 - \tilde{s}_2}{\tilde{s}_1 + \tilde{s}_2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \tilde{s}_1 &= \xi \\ \tilde{s}_2 &= \xi \frac{1 - \eta}{1 + \eta} \end{cases} \quad (39)$$

La densité de probabilité du vecteur  $(\xi, \eta)$  est égale à :

$$P_{\xi,\eta}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} U(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2)$$

où  $|J|$  est la valeur absolue du déterminant de la transformation définie dans l'équation 39. On montre que :

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial \tilde{s}_1} & \frac{\partial \xi}{\partial \tilde{s}_2} \\ \frac{\partial \eta}{\partial \tilde{s}_1} & \frac{\partial \eta}{\partial \tilde{s}_2} \end{vmatrix} = \frac{2\tilde{s}_1}{(\tilde{s}_1 + \tilde{s}_2)^2} = \frac{(1 + \eta)^2}{2\xi}$$

Notons que la variable  $\xi$  est strictement positive. On obtient

$$P_{\xi,\eta}(\xi, \eta) = \frac{2\xi}{(1 + \eta)^2} U\left(\xi, \xi \frac{1 - \eta}{1 + \eta}\right)$$

et

$$\begin{aligned} \Psi(\eta) &= P_\eta(\eta) = \int_0^{+\infty} P_{\xi,\eta}(\xi, \eta) d\xi \\ &= \frac{2}{(1 + \eta)^2} \int_0^{+\infty} \xi U\left(\xi, \xi \frac{1 - \eta}{1 + \eta}\right) d\xi \end{aligned}$$

Considérons le changement de variable  $\nu = \xi/(1 + \eta)$ . L'équation précédente devient :

$$\Psi(\eta) = \int_0^{+\infty} 2\nu U[(1 + \eta)\nu, (1 - \eta)\nu] d\nu \quad (40)$$

### A.2 propriétés de $\Psi(x)$

Dans la suite, nous supposons que  $U(x, y) = U(y, x)$ . Cela signifie que la lumière totalement dépolarisée est isotrope, ce qui est une hypothèse raisonnable. Dans ce cas, l'équation 40 montre que  $\Psi(x) = \Psi(-x)$  : la fonction  $\Psi(x)$  est donc paire. De plus, d'après l'équation 40, la dérivée de  $\Psi(x)$  en 0 est égale à :

$$\Psi'(0) = \int_0^{+\infty} 2\nu^2 \left[ \frac{\partial U}{\partial x}(\nu, \nu) - \frac{\partial U}{\partial y}(\nu, \nu) \right] d\nu = 0$$

$\Psi(x)$  présente donc un extremum en 0.

Supposons maintenant que  $U(0, y) = U(x, 0) = 0$ . C'est le cas par exemple lorsque les canaux sont de type Gamma, avec un ordre  $L > 1$ . Dans ce cas, l'équation 40 montre que  $\Psi(1) = \Psi(-1) = 0$ .

En utilisant ces propriétés, on peut remarquer que  $\Psi(x)$  à l'allure d'une courbe « en cloche », symétrique et tendant vers 0 lorsque  $x$  tend vers 1 ou  $-1$ . Cependant, ce n'est pas nécessairement le cas si  $U(0, y) \neq 0$  ou  $U(x, 0) \neq 0$ . Dans le cas où cette propriété n'est pas vérifiée, comme par exemple pour le speckle d'ordre 1, représenté par une loi exponentielle,  $\Psi(x)$  peut être constante, ou même avoir un minimum en 0.

### A.3. expression approchée de la moyenne de $P_u^{(\rho)}(x)$

L'équation 12 fournit une relation  $\rho = g(\eta)$  entre les variables aléatoires  $\rho$  et  $\eta$ . La moyenne de  $\rho$  a donc l'expression suivante :

$$\langle \rho \rangle = \langle g(\eta) \rangle = \int \frac{\eta + u}{1 + u\eta} \Psi(\eta) d\eta$$

On déduit facilement de l'équation précédente la relation suivante :

$$\langle \rho \rangle - u = (1 - u^2) \int \frac{\eta}{1 + u\eta} \Psi(\eta) d\eta$$

Comme  $u$  et  $\eta$  sont tels que  $|u| < 1$  et  $|\eta| < 1$ , on peut utiliser la relation

$$\frac{\eta}{1 + u\eta} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-u)^n \eta^{n+1}$$

On obtient alors :

$$\langle \rho \rangle - u = (1 - u^2) \sum_{n=0}^{+\infty} (-u)^n \mathcal{M}_{n+1}$$

avec  $\mathcal{M}_{n+1} = \int \eta^{n+1} \Psi(\eta) d\eta$ . Pour les faibles valeurs de  $u$ , on obtient donc :

$$\langle \rho \rangle = u + (u^3 - u) \sigma_\eta^2$$

où  $\sigma_\eta^2 = \int \eta^2 \Psi(\eta) d\eta$ .

### A.4 médiane de $\rho$

La médiane  $m$  de la variable aléatoire  $\rho$  est définie par :

$$\int_{-1}^m P_u^{(\rho)} d\rho = \frac{1}{2}$$

Considérons la transformation bijective  $\rho = g(\eta)$  définie par

l'équation 12. Puisque  $\Psi(x)$  est la densité de probabilité de  $\eta$ , on a :

$$\int_{-1}^m P_u^{(\rho)} d\rho = \int_{g^{-1}(-1)}^{g^{-1}(m)} \Psi(x) dx = \frac{1}{2}$$

or d'après l'équation 12,  $g^{-1}(x) = (x - u)/(1 - ux)$ . Comme  $g^{-1}(-1) = -1$  et  $\eta$  prend ses valeurs entre  $-1$  et  $1$ , l'équation 12 signifie que  $g^{-1}(m)$  est égal à la médiane de  $\Psi(x)$ , c'est-à-dire  $0$  puisque  $\Psi(x)$  est paire. Par conséquent,

$$m = g(0) = u$$

ce qui démontre que  $u$  est la médiane de  $\rho$ .

## B estimateur du degré de polarisation au sens du maximum de vraisemblance

Nous déterminons dans cette section l'expression de l'estimateur du maximum de vraisemblance du degré de polarisation (paramètre  $u$ ) pour un speckle de densité de probabilité Gamma. Dans ce cas, la densité de probabilité  $P_u^{(\rho)}(x)$  est donc donnée par l'équation 17. En utilisant cette équation, la logvraisemblance d'un échantillon de taille  $N = P \times Q$  a pour expression

$$\mathcal{L}(u) = \sum_{i=0}^{P-1} \sum_{j=0}^{Q-1} \left[ \ln P_u^{(\rho)}(\rho(i, j)) \right] \quad (42)$$

$$= A + NL \ln(1 - u^2) - 2L \sum_{i=0}^{P-1} \sum_{j=0}^{Q-1} \log(1 - u\rho(i, j)) \quad (43)$$

où  $A$  est un facteur qui ne dépend pas de  $u$ . En annulant la dérivée de  $\mathcal{L}(u)$  par rapport à  $u$ , on obtient :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0 \iff -\frac{2NLu}{1 - u^2} + 2L \sum_{i=0}^{P-1} \sum_{j=0}^{Q-1} \frac{\rho(i, j)}{1 - u\rho(i, j)} = 0 \quad (44)$$

Après quelques manipulations algébriques simples, on aboutit à l'équation 20.

## C calcul du biais de l'estimateur $\hat{u}_{dlog}$

L'estimateur  $\hat{u}_{dlog}$  (cf. équation 24) consiste à estimer la moyenne empirique  $\bar{\beta}$  de l'échantillon dans la représentation naturelle  $\beta$ , et à lui appliquer la fonction  $g(x) = \tanh(x/2)$ .

$\bar{\beta}$  est un estimateur non biaisé de la moyenne de l'échantillon  $\beta$ , mais comme  $\hat{u}_{dlog}$  est une fonction non-linéaire de cette valeur, il n'est pas un estimateur non-biaisé de  $u$ . On peut calculer la valeur de ce biais pour de faibles valeurs de  $u$  en utilisant une approche similaire à celle de l'annexe A.3. D'après l'équation 5.55 de la référence [22], si on suppose que la distribution de  $\bar{\beta}$  est concentrée autour de sa moyenne  $\langle \bar{\beta} \rangle$ , la moyenne de  $\hat{u}_{dlog}$  s'exprime, au premier ordre, par :

$$\langle \hat{u}_{dlog} \rangle = g(\langle \bar{\beta} \rangle) + g''(\langle \bar{\beta} \rangle) \frac{\sigma_{\bar{\beta}}^2}{2}$$

où  $\sigma_{\bar{\beta}}^2$  représente la variance de  $\bar{\beta}$ . Or on sait que  $\langle \bar{\beta} \rangle = \ln \gamma$  et donc  $g(\langle \bar{\beta} \rangle) = u$ . D'autre part,  $g''(x) = \frac{1}{2} (\tanh^3(x/2) - \tanh(x/2))$ , et par conséquent  $g''(\langle \bar{\beta} \rangle) = \frac{1}{2} (u^3 - u)$ .

Enfin, il est clair que  $\sigma_{\bar{\beta}}^2 = \frac{\sigma_{\Phi}^2}{N}$  où  $N$  est le nombre de valeurs dans l'échantillon et  $\sigma_{\Phi}^2$  est la variance associée à la fonction  $\Phi(x)$ , qui est la densité de probabilité de l'échantillon dans la représentation naturelle  $\beta$ .

Par conséquent, le biais de l'estimateur  $\hat{u}_{dlog}$  est :

$$\hat{u}_{dlog} - u = (u^3 - u) \frac{\sigma_{\Phi}^2}{4N}$$

On voit que contrairement au biais de  $\hat{u}_{iceo}$  (cf. équation 16), il diminue en  $\frac{1}{N}$  : l'estimateur  $\hat{u}_{dlog}$  est donc asymptotiquement non-biaisé.

## D expression du GLRT et du contour actif en présence de fluctuations gaussiennes

Nous déterminons l'expression du GLRT utilisé dans la section 5.1 et de la fonction de vraisemblance utilisée par le contour actif statistique (cf. section 5.2) en présence de fluctuations gaussiennes. Tout d'abord, considérons une zone homogène, par exemple  $w$ , contenant  $N_w$  pixels dont les niveaux de gris  $x_i$  sont distribués selon une loi gaussienne :

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[ -\frac{(x - m)^2}{2\sigma^2} \right]$$

La logvraisemblance associée à cette zone est :

$$L_w(m, \sigma) = -N_w \log \sqrt{2\pi} - N_w \log \sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i \in w} (x_i - m)^2 \quad (46)$$

Dans la suite, nous distinguons le cas où seule la moyenne diffère entre les deux zones de l'image, et le cas où la variance et la moyenne sont toutes deux différentes.

### D.1 moyennes différentes, variance commune

L'estimateur de la moyenne au sens du maximum de vraisemblance est  $\hat{m}_w = \frac{1}{N_w} \sum_{i \in w} x_i$ , et on a :

$$L_w(\sigma) = \arg \max_m L_w(m, \sigma) = -N_w \log \sqrt{2\pi} - N_w \log \sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \left[ \sum_{i \in w} x_i^2 - N_w \hat{m}_w^2 \right] \quad (47)$$

Considérons tout d'abord le GLRT. Il a pour expression  $\mathcal{R} = L_w(\sigma) + L_{\bar{w}}(\sigma) - L_F(\sigma)$ , où  $w$ ,  $\bar{w}$  et  $F$  sont les trois régions intervenant dans la définition du GLRT. En utilisant l'équation 48, on obtient :

$$\mathcal{R} = -\frac{1}{2\sigma^2} [N_w \hat{m}_w^2 + N_{\bar{w}} \hat{m}_{\bar{w}}^2 - N_F \hat{m}_F^2] \quad (48)$$

Cependant, comme  $F = w + \bar{w}$ , on a la relation :  $N_F \hat{m}_F = N_w \hat{m}_w + N_{\bar{w}} \hat{m}_{\bar{w}}$ . En remplaçant  $\hat{m}_F$  par cette expression dans l'équation 48, et après quelques manipulations algébriques simples, on obtient :

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2\sigma^2} \frac{N_w N_{\bar{w}}}{N_w + N_{\bar{w}}} [\hat{m}_w - \hat{m}_{\bar{w}}]^2 \quad (49)$$

Considérons maintenant le contour actif statistique. Dans ce cas,  $w$  et  $\bar{w}$  constituent une partition de l'image entière  $I$  : on a  $w + \bar{w} = I$ . Le principe du contour actif statistique consiste à déterminer la forme  $w$  qui maximise la vraisemblance  $L(w) = L_w(\sigma) + L_{\bar{w}}(\sigma)$ . D'après l'équation 46, on obtient :

$$L(w) = -N_I \log \sqrt{2\pi} - N_I \log \sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i \in I} x_i^2 + \frac{1}{2\sigma^2} [N_w \hat{m}_w^2 + N_{\bar{w}} \hat{m}_{\bar{w}}^2] \quad (50)$$

On peut noter que les trois premiers termes de membre de gauche de cette équation ne dépendent pas de  $w$ . Par conséquent, il suffit d'optimiser la fonction suivante :

$$L_\beta(w) = N_w \hat{m}_w^2 + N_{\bar{w}} \hat{m}_{\bar{w}}^2 \quad (51)$$

### D.2 moyennes et variances différentes

Dans le cas où la moyenne et la variance des distributions de niveaux de gris sont différentes dans les régions cible et fond, on

considère la maximisation de la vraisemblance par rapport aux deux paramètres  $m$  et  $\sigma$ . Si on considère une région homogène  $w$ , l'estimateur de  $\sigma^2$  au sens du maximum de vraisemblance est  $\hat{\sigma}_w^2 = \frac{1}{N_w} \sum_{i \in w} x_i^2 - \hat{m}_w^2$ . L'expression de la vraisemblance est alors :

$$L_w = \arg \max_{m, \sigma} L_w(m, \sigma) = -N_w \log \sqrt{2\pi} - \frac{N_w}{2} - \frac{N_w}{2} \log[\hat{\sigma}_w^2] \quad (52)$$

De cette expression, on déduit facilement l'expression du GLRT :

$$\mathcal{R} = -N_w \log[\hat{\sigma}_w] - N_{\bar{w}} \log[\hat{\sigma}_{\bar{w}}] + N_F \log[\hat{\sigma}_F] \quad (53)$$

et de la fonction à optimiser pour le contour actif statistique-:

$$L_\rho(w) = -N_w \log[\hat{\sigma}_w] - N_{\bar{w}} \log[\hat{\sigma}_{\bar{w}}] \quad (54)$$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. E. Solomon, « Polarization imaging », *Applied Optics*, 20, pp. 1537-1544, 1981.
- [2] W. G. Egan, W. R. Johnson, and V. S. Whitehead, « Terrestrial polarization imagery obtained from the space shuttle: characterization and interpretation », *Applied Optics*, 30, pp. 435-442, 1991.
- [3] L. B. Wolff, « Polarization camera for computer vision with a beam splitter », *J. Opt. Soc. Am. A*, 11, pp. 2935-2945, 1994.
- [4] L. B. Wolff and T. E. Boulton, « Constraining object features using a polarization reflectance model », *IEEE Trans. Patt. Anal. Machine Intell.* 13, pp. 635-657, 1991.
- [5] J. S. Tyo, M. P. Rowe, E. N. Pugh, N. Engheta, « Target detection in optical scattering media by polarization-difference imaging », *Applied Optics*, 35, pp. 1855-1870, 1996.
- [6] S. Breugnot and Ph. Clémenceau, « Modeling and performances of a polarization active imager at  $\lambda = 806 \text{ nm}$  », in *Laser Radar technology and applications IV*, Gary W. Kamerman ; Christian Werner, ed., Proc. SPIE, 3707, pp. 449-460, 1999.
- [7] J. W. Goodman, « Laser Speckle and Related Phenomena », in *Statistical Properties of Laser Speckle Patterns*, pp. 9-75. (Springer-Verlag (Topics in Applied Physics Vol. 9), Heidelberg, 1975).
- [8] R. Touzi, A. Lopès, and P. Bousquet, « A statistical and geometrical edge detector for {SAR} images », *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 26, pp. 764-773, 1988.
- [9] C. J. Oliver, I. Mc Connell, D. Blacknell, and R. G. White, « Optimum edge detection in SAR », in *Synthetic Aperture Radar and Passive Microwave Imaging*, G. Franceschetti, C. J. Oliver, J. C. Shiue, and S. Tajbakhsh, eds., SPIE Proceedings, 2584, pp. 152-163, 1995.
- [10] Ph. Réfrégier, O. Germain, and T. Gaidon, « Optimal snake segmentation of target and background with independent Gamma density probabilities, application to speckled and preprocessed images » *Optics Commun.* 137, pp. 382-388, 1997.

- [11] O. Germain and Ph. Réfrégier, « Snake-based method for the segmentation of objects in multichannel images degraded by speckle » *Optics Letters*, 24, pp. 814-816, 1999.
- [12] O. Germain and Ph. Réfrégier, « Optimal snake-based segmentation of a random luminance target on a spatially disjoint background » *Opt. Lett.*, 21, pp. 1845-1847, 1996.
- [13] C. Chesnaud, Ph. Refregier, and V. Boulet, « Statistical region snake-based segmentation adapted to different physical noise models » *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 21, pp. 1145-1157, 1999.
- [14] S. Huard, « Polarized optical wave » in *Polarization of light*, pp. 1-35 Wiley, Masson, Paris, 1997.
- [15] J. W. Goodman, « The speckle effect in coherent imaging » in *Statistical Optics*, pp. 347-356, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1985.
- [16] S. Huard, « Propagation of states of polarization in optical devices » in *Polarization of light*, pp. 86-130, Wiley, Masson, Paris, 1997.
- [17] R. K. Tyson and R. Q. Fugate, eds. *Adaptive optics systems and technology*, volume 3762. SPIE proceedings, Sept. 1999.
- [18] C. Oliver and S. Quegan, « Fundamental properties of SAR images » in *Understanding SAR images*, pp. 84-99, Artech House, London, 1998.
- [19] D. C. Schleher, « Radar detection in Weibull clutter », *IEEE Trans. on Aeros. and Elect. Syst.*, 12, pp. 736-743, 1976.
- [20] H. V. Poor, « Elements of hypothesis testing », in *An introduction to signal detection and estimation*, pp. 5-39 (Springer Verlag, New York, 1994.
- [21] A. K. Jain and C. R. Christensen, « Digital processing of images in speckle noise » in *Applications of speckle phenomena*, SPIE Proceedings, 243, pp. 46-50, 1980.
- [22] A. Papoulis, *Probability, random variables and stochastic processes* (Mc Graw-Hill, Boston, 1991.
- [23] J. Principe, A. Radislavljevic, J. Fisher, and L. Novak, « Target prescreening based on a quadratic gamma discriminator », *IEEE Trans. on Aeros. and Elect. Syst.*, 34, pp. 706-715, 1998.

Manuscrit reçu le 24 juillet 2001

## LES AUTEURS

François GOUDAIL



François GOUDAIL a obtenu le diplôme d'ingénieur de l'École Supérieure d'Optique en 1992, et un doctorat en traitement d'images de l'université d'Aix-Marseille III en 1997. Il est actuellement maître de conférences à l'École Nationale Supérieure de Physique de Marseille, et membre de l'équipe Physique et Traitement d'Image de l'Institut Fresnel. Ses activités de recherche portent sur le traitement d'images de diverses origines (optronique passive et active, radar, polarimétrie, etc.), pour des applications telles que l'estimation, la détection et la segmentation d'objets.

Philippe RÉFRÉGIER



Philippe RÉFRÉGIER est diplômé depuis 1984 de l'École Supérieure de Physique et Chimie Industrielles de la ville de Paris, et docteur de l'Université de Paris Orsay en physique des solides depuis 1987. De 1987 à 1994, il a été membre du Laboratoire Central de Recherches de Thomson-CSF à Orsay. Depuis, il est professeur en traitement du signal à l'École Nationale Supérieure de Physique de Marseille et anime l'équipe Physique et Traitement d'Image de l'Institut Fresnel. Ses activités de recherche portent principalement sur le traitement du signal et des images, la reconnaissance de formes et l'optique appliquée.