

# Maxima d'ondelettes couleur

## Color wavelet Maxima

**Philippe Carré**

SIC Laboratory - FRE-CNRS 2731 University of Poitiers - UFR Sciences -SP2MI, Boulevard Marie et Pierre CurieTeleport 2  
BP 30179 86962 Futuroscope Chasseneuil CEDEX (France)  
carre@sic.sp2mi.univ-poitiers.fr

Manuscrit reçu le 15 juin 2004

### Résumé et mots clés

Dans cet article, nous proposons un schéma de représentation multiéchelle pour les images couleur utilisant les maxima d'ondelettes. Les maxima d'ondelettes constituent une décomposition en contours multiéchelle, qui peut être traitée par les techniques classiques d'études de contour, mais qui possède la propriété d'être empiriquement inversible. Nous proposons d'adapter cette représentation aux images couleur. Pour cela, nous calculons la décomposition en gradient multiéchelle couleur suivant une approche marginale. Ensuite, en utilisant les définitions classiques des contours couleur à partir du gradient, une représentation couleur multiéchelle est définie qui illustre l'évolution des contours couleur à travers les échelles. En appliquant l'algorithme itératif d'inversion de Mallat, nous proposons deux reconstructions possibles : une image en niveaux de gris qui caractérise les différents contours détectés et une image couleur qui peut constituer le résultat d'un débruitage si la représentation en maxima d'ondelettes a été au préalable seuillée. Enfin, nous proposons d'intégrer dans la représentation en maxima des algorithmes de segmentation région couleur, ceci afin de fournir une sélection des contours plus robustes. Cette dernière étape est illustrée dans le cadre de la restauration de données couleur bruitées.

**Ondelettes, Contour multiéchelle, Segmentation couleur.**

### Abstract and key words

In this article, we propose a representation scheme based on wavelet maxima for color images representation. Wavelet maxima constitute a multi-scale edge decomposition which can be processed using classic techniques of contour study but which have the property of being empirically inversable.

We propose to adapt this representation to color images. For this, we extend the multi-scale gradient decomposition. Then, by using classical definitions of the color edges, a color maxima wavelet representation is defined, which shows the edge evolution through the scales. By applying Mallat's iterative reconstruction algorithm, two reconstructions are presented: a grayscale image that gives information about the edge detected in the color space and a color image that can constitute the result of a denoising algorithm.

Finally, we propose to introduce segmentation based region to this new representation in order to obtain a more robust edge selection. This strategy is illustrated with denoising application.

Wavelet, Multiscale edge, Color segmentation.

# 1. Introduction

Les techniques Espace-Echelle-Fréquence ont pour objectif de représenter d'une façon optimale l'information initialement présente dans un signal 2D (scalaire ou vectoriel). C'est pourquoi, ces dernières années, de nombreux travaux sur la compression, la restauration, le tatouage, etc, d'images ont utilisées avec succès ces nouvelles techniques comme les décompositions en ondelettes. En effet, la transformée en ondelettes possède de nombreuses propriétés de localisation temporelle et fréquentielle, associées à une faible complexité algorithmique. De ce fait, elle semble souvent la plus adaptée pour les différentes problématiques présentes dans le traitement d'images. Toutefois l'extension à la dimension 2 de la transformée en ondelettes ouvre certaines interrogations en terme de description de l'information dans l'espace de la transformée. En effet, la décomposition en ondelettes «classique» 2D n'est qu'une simple extension de l'algorithme 1D et ne prend pas en compte les spécificités de l'image (notion de contour, textures, etc. ). Il faut donc s'interroger sur de nouvelles décompositions codant mieux les éléments structurants d'une image. De plus, l'intégration de la «dimension» couleur, notion inévitable à l'heure du multimédia, n'est pas du tout prise en compte dans les algorithmes modernes d'analyse Espace-Echelle (si ce n'est par une approche marginale).

L'une de ces décompositions Espace-Echelle, appelée représentation en maxima d'ondelettes et proposée par Zhong *et al.*, possède des particularités inhérentes à sa définition qui en font un outil d'analyse complexe mais efficace.

En effet, cette représentation, reposant sur la décomposition en ondelettes, permet d'étudier à différentes échelles, les points de discontinuités présents dans l'information analysée. Ces points particuliers vont se traduire en dimension 2 par la notion de contours. De ce fait, nous avons à notre disposition une représentation illustrant les bords de l'image à différentes échelles, c'est-à-dire analysés plus ou moins précisément. De plus, cette représentation a la particularité d'être empiriquement inversible. Ceci ouvre le champ des applications vers des problématiques de débruitage, de compression .... Toutefois, bien que la formalisation de cette représentation soit complète, elle n'est pas utilisée en collaboration avec des algorithmes traditionnels de segmentation. De plus, la dimension couleur est absente de la représentation en maxima d'ondelettes.

La démarche que nous proposons est d'adapter la représentation en maxima d'ondelettes aux images couleur. L'objectif de ce travail est ainsi de définir une méthode de généralisation à la couleur de la décomposition en ondelettes dépassant le simple calcul marginal. Plus précisément, nous cherchons à construire une représentation multiéchelle inversible prenant en compte réellement la dimension couleur des données.

Pour cela, nous indiquons tout d'abord la stratégie utilisée pour le calcul d'une décomposition en gradient multiéchelle couleur. Cet algorithme repose sur une simple extension marginale de la décomposition en ondelettes comme nous le présentons dans le paragraphe 3. Ceci nous permet d'étudier d'une manière plus ou

moins précise la courbure de la fonction image couleur  $f : R^2 \rightarrow R^3$  et donc de détecter les attributs couleur les plus importants associés aux discontinuités aux différentes échelles. Ensuite nous décrivons différentes méthodologies permettant d'extraire les maxima d'ondelettes, maxima qui doivent correspondre aux différentes ruptures présentes dans l'image couleur. C'est durant cette étape que nous utilisons la potentialité des maxima d'ondelettes et que nous intégrons réellement la dimension couleur des données dans la décomposition en ondelettes. La première stratégie, exposée dans le paragraphe 4, s'appuie sur une approche contour, à savoir sélection des maxima suivant le principe de Canny. Ce volet correspond à une extension à la couleur du travail d'origine de Zhong *et al.* Pour cela, nous précisons la notion de norme et de direction du gradient couleur. En appliquant tout d'abord l'algorithme itératif de reconstruction de Zhong *et al.* sur la représentation Norme/Direction couleur des maxima, nous obtenons une image particulière en niveaux de gris. Comme nous le verrons, cette image fournit des informations à propos des contours détectés dans l'espace couleur et illustre les propriétés de chaque définition de la norme et de la direction couleur. Ensuite, en couplant cette nouvelle représentation en maxima avec un simple seuillage basé sur la norme, nous illustrons les possibilités de cette représentation en terme de restauration de données.

La seconde stratégie, exposée dans le paragraphe 5, propose une méthodologie permettant de coupler la décomposition en maxima d'ondelettes et différents algorithmes de segmentation couleur basés sur une approche région. De nouveau l'utilisation d'algorithme de segmentation couleur permet d'intégrer réellement la dimension couleur dans notre décomposition en ondelettes. De plus, l'approche région nous permet d'extraire des contours d'une façon plus robuste dans un cadre bruité et est plus facile à manipuler pour une extension à un traitement multiéchelle. Afin de valider cette approche, nous l'illustrons simplement dans un cadre de débruitage d'images couleur.

## 2. Représentation en maxima d'ondelettes des images de niveaux de gris

Les maxima d'ondelettes pour le traitement du signal et des images en niveaux de gris sont présentés en détail dans la thèse de Zhong [1]. Nous en rappelons brièvement le principe. Pour définir la représentation en maxima d'ondelettes, il nous faut tout d'abord construire une décomposition en gradient multiéchelle. La décomposition en ondelettes discrète associée à une base particulière d'ondelettes va nous permettre de construire cette représentation. On choisit pour cela, comme le suggère Mallat, deux fonctions analysantes  $\psi^x \in L^2(R^2)$  et

$\psi^y \in L^2(\mathbb{R}^2)$  qui sont définies comme les dérivés premières d'une fonction de lissage  $\phi \in L^2(\mathbb{R}^2)$  (en imposant que  $\phi$  soit différentiable) telle que :

$$\psi^x(x, y) = \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} \text{ et } \psi^y(x, y) = \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y}. \quad (1)$$

Pour que les fonctions analysantes  $\psi^y$  et  $\psi^x$  soient des fonctions d'ondelettes admissibles, il faut qu'elles vérifient des conditions supplémentaires [2]. Si c'est le cas, la fonction de lissage  $\phi$  va être la fonction d'échelle et  $\psi^y$  et  $\psi^x$  les fonctions d'ondelette d'une analyse multirésolution telle que la représentation en ondelettes associée à un signal  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$  a comme composantes à l'échelle  $l$  :

$$d_l^x(x, y) = (f * \psi_l^x)(x, y) \text{ et } d_l^y(x, y) = (f * \psi_l^y)(x, y)$$

$$\text{avec } \psi_l^a(x, y) = 2^{-\frac{l}{2}} \psi^a\left(\frac{x}{2^l}, \frac{y}{2^l}\right).$$

De l'équation précédente, on peut vérifier que :

$$\begin{bmatrix} d_l^x(x, y) \\ d_l^y(x, y) \end{bmatrix} = 2^{-\frac{l}{2}} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} (\phi_l * f)(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial y} (\phi_l * f)(x, y) \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\text{avec } \phi_l(x, y) = 2^{-\frac{l}{2}} \phi\left(\frac{x}{2^l}, \frac{y}{2^l}\right).$$

L'équation (2) indique que la transformée en ondelettes (dans cette base particulière) de l'image à l'échelle  $l$  est équivalente à la dérivée de la fonction  $f$  lissée par la fonction  $\phi$  dilatée. Un extremum dans cette transformée en ondelettes correspond à un point d'inflexion de la courbe  $\phi_l * f$ .

Afin d'avoir une représentation invariante par translation (notion fondamentale lorsqu'une représentation des contours à différentes échelles est mise en place), la transformée discrète associée se calcule avec un banc de filtres non-décimé [3] suivant :

$$\begin{aligned} c_l[k_1, k_2] &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \underbrace{h^l}_x, \underbrace{h^l}_y \right] * c_{l-1} [k_1, k_2] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n_1} \sum_{n_2} h^l[n_1 - 2k_1] h^l[n_2 - 2k_2] c_{l-1}[k_1, k_2] \\ d_l^x[k_1, k_2] &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \underbrace{g^l}_x, \underbrace{1}_y \right] * c_{l-1} [k_1, k_2] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n_1} g^l[n_1 - 2k_1] c_{l-1}[k_1, k_2] \\ d_l^y[k_1, k_2] &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \underbrace{1}_x, \underbrace{g^l}_y \right] * c_{l-1} [k_1, k_2] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n_2} g^l[n_2 - 2k_2] c_{l-1}[k_1, k_2] \end{aligned}$$

avec  $h$  et  $g$ , filtres passe-bas et passe-haut associés aux fonctions  $\phi$  et  $\psi$ ,  $c_l$  approximation passe-bas non-décimée de l'image à la  $l^{\text{ème}}$  échelle ( $c_0 = f$ ) et  $d_l$  les coefficients d'ondelettes non-décimés de la  $l^{\text{ème}}$  échelle.

Les séquences discrètes  $h^l$  et  $g^l$  correspondent aux filtres d'analyse dilatés suivants :

$$H^{(l)}(z) = H(z^{2^{l-1}}), \quad G^{(l)}(z) = G(z^{2^{l-1}})$$

avec  $H, G, H^{(l)}, G^{(l)}$  les transformées en  $Z$  des suites discrètes  $h, g, h^{(l)}, g^{(l)}$  réponses impulsionnelles des filtres passe-bas et passe-haut.

Afin d'obtenir une reconstruction parfaite à partir des coefficients d'ondelettes et de la dernière approximation passe-bas, Zhong *et al.* ont proposé des conditions permettant de construire un groupe de filtres de synthèses à partir des filtres de décomposition [1].

Afin de définir la notion de maxima locaux 2D nous exprimons les coefficients d'ondelettes suivant une représentation polaire :

$$\begin{aligned} \rho_l[k_1, k_2] &= \sqrt{(d_l^x[k_1, k_2])^2 + (d_l^y[k_1, k_2])^2} \\ \text{et } \theta_l[k_1, k_2] &= \arctan\left(\frac{d_l^y[k_1, k_2]}{d_l^x[k_1, k_2]}\right) \end{aligned}$$

En reprenant le formalisme de Canny [4], les maxima, ou bords, à l'échelle  $l$ , vont être les points maxima locaux de la norme  $\rho_l$  dans la direction  $\theta_l$ . L'ensemble ainsi défini est noté  $(A_l)_{0 < l \leq L}$ . Pour une décomposition en ondelettes sur  $L$  échelles, l'ensemble  $\{c_L, [A_l]_{1 \leq l \leq L}\}$  est appelé « représentation d'une image en maxima d'ondelettes » [1].

Concrètement, la représentation en maxima d'ondelettes contient les positions et les valeurs de  $\{d_l^x[k_1, k_2], d_l^y[k_1, k_2]\}$  à chaque échelle quand  $\rho_l[k_1, k_2]$  atteint un maximum local dans la direction  $\theta_l[k_1, k_2]$ , plus la dernière trame.

## 2.1. Reconstruction du signal à partir des maxima d'ondelettes

Une image peut être reconstruite à partir de sa représentation en coefficients d'ondelettes par transformation inverse. La question est de savoir comment reconstruire l'image à partir simplement des maxima d'ondelettes (ou bord multiéchelles).

Divers algorithmes de reconstruction à partir des maxima d'ondelettes sont proposés dans la littérature [5], [6]. Nous utiliserons l'algorithme de Mallat et Zhong [7] qui a la propriété d'être numériquement stable et de reconstruire un signal proche de l'original. Cet algorithme est le plus couramment utilisé dans des applications utilisant les maxima d'ondelettes. Nous en présentons brièvement le principe pour les signaux 1D, l'algorithme 2D étant une simple extension.

Pour reconstruire le signal, deux sous-espaces sont définis :

1. L'espace  $\Gamma$  est composé des signaux  $\{f_l[k]\}_{l \in \mathbb{Z}}$  qui ont des maxima identiques à  $[A_l]_{l \in \mathbb{Z}}$ .

2. L'espace  $V$  est composé des signaux  $\{f_l[k]\}_{l \in \mathbb{Z}}$  éléments de l'espace des décompositions en ondelettes, c'est à dire que si l'on applique une décomposition en ondelettes sur  $\{f_l[k]\}_{l \in \mathbb{Z}}$  suivie d'une reconstruction nous obtenons exactement le même signal.

La solution de la reconstruction va être l'intersection de ces deux espaces  $\Gamma \cap V$ . Afin de calculer cette intersection, Mallat et Zhong ont proposé un algorithme utilisant des projections alternées développé à l'origine par Youla et Webb [8].

### 2.2. Choix de la base d'ondelettes

Pour effectuer la décomposition en gradient multiéchelle, Mallat et Zhong ont construit une ondelette appartenant à la famille des Splines. Cette ondelette est associée à une décomposition discrète qui vérifie la condition 1 et elle approxime la dérivée première d'une gaussienne, ce qui permet d'avoir certaines propriétés importantes pour une représentation multiéchelle des points d'inflexion. Comme pour la majorité des applications de maxima d'ondelettes ([9], [1], [10]) nous allons utiliser dans cet article une spline quadratique.

## S 3. Gradient multiéchelle couleur

Nous voulons maintenant définir une représentation en maxima d'ondelettes pour les images couleur  $\mathbf{f}$  définies par:

$$\mathbf{f}[k_1, k_2] = [f^{C_1}[k_1, k_2], f^{C_2}[k_1, k_2], f^{C_3}[k_1, k_2]]_{k_1 \in \{1..N\}, k_2 \in \{1..N\}}$$

avec  $\{C_1, C_2, C_3\}$  les trois composantes couleur.

Dans un premier temps nous devons construire une représentation en gradient couleur multiéchelle. Pour cela, nous appliquons tout simplement la stratégie utilisée actuellement dans le cadre des décompositions en ondelettes d'images couleur: les opérations de convolution associées au gradient sont appliquées sur les trois plans de l'image couleur (dans cet exemple nous utilisons le modèle RGB):

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_l[k_1, k_2] &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(h^l, h^l) * \mathbf{c}_{l-1}][k_1, k_2] \\ \mathbf{d}_l^x[k_1, k_2] &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(g^l, 1) * \mathbf{c}_{l-1}][k_1, k_2] \\ \mathbf{d}_l^y[k_1, k_2] &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(1, g^l) * \mathbf{c}_{l-1}][k_1, k_2] \end{aligned} \tag{4}$$

avec  $\mathbf{d}_l^a[k_1, k_2] = \begin{bmatrix} d_l^{R,a}[k_1, k_2] \\ d_l^{G,a}[k_1, k_2] \\ d_l^{B,a}[k_1, k_2] \end{bmatrix}$  dérivée calculée marginalement et  $\mathbf{c}_0 = \begin{bmatrix} f^{(R)} \\ f^{(G)} \\ f^{(B)} \end{bmatrix}$ .

Comme pour les images en niveaux de gris, si la fonction d'ondelette associée au filtre  $g$  est définie comme la dérivée première de la fonction de lissage associée au filtre  $h$ , alors la transformée à l'échelle  $l$  est équivalente au gradient couleur de

la fonction  $\mathbf{f}$  lissée sur chaque plan:  $\begin{pmatrix} \phi_l * f^{(R)} \\ \phi_l * f^{(G)} \\ \phi_l * f^{(B)} \end{pmatrix} (x, y)$ .

Nous avons donc a priori une décomposition en gradient couleur multiéchelle.

Cet algorithme est appliqué sur l'image de test «Maison» présentée sur la figure 1(a). Les dérivés partielles couleur multiéchelles sont indiquées sur les figures 1(b) et 1(c). Nous constatons que cette représentation nous permet d'évaluer les couleurs associées à chacune des ruptures. De plus, la dimension multiéchelle indique les contours les plus importants: à l'échelle la

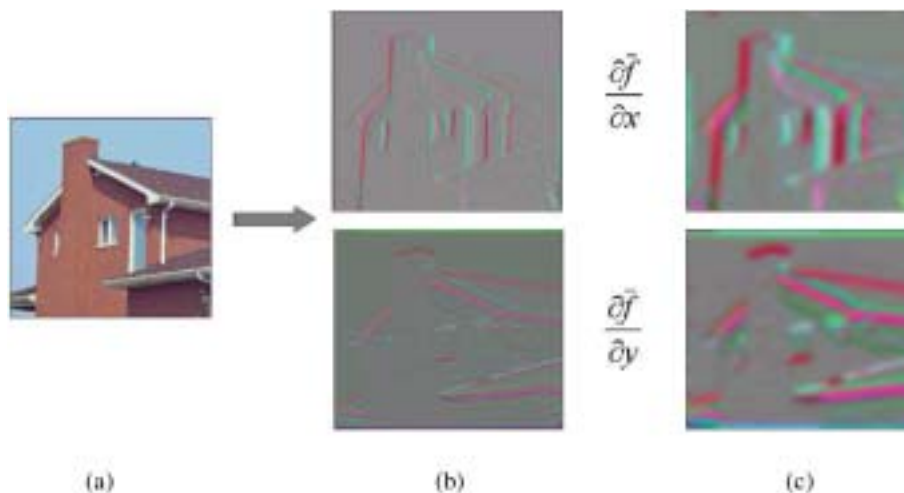


Figure 1. Décomposition en gradient multiéchelle de l'image « maison »: (a) Image, (b) Echelle 2, (c) Echelle 4.

plus grossière seules les ruptures couleur prépondérantes sont conservées.

Notons que pour la visualisation de ces images nous devons effectuer une opération de quantification des couleurs. En effet, les coefficients issus de la décomposition en ondelettes sont des réels (souvent de faibles valeurs) et n'ont pas de correspondance dans l'espace RGB. Donc, pour pouvoir représenter ces images gradient issues de la décomposition, nous effectuons l'opération classique suivante :

$$\tilde{d}_l^{R,a}[k_1,k_2] = \left[ d_l^{R,a}[k_1,k_2] \times \frac{255}{\max_{R,G,B,k_1,k_2} (d_l^{a}[..])} \right]$$

Comme pour les images en niveaux de gris, nous pouvons obtenir de la représentation en gradient multiéchelle, une reconstruction parfaite de l'image couleur. L'image reconstruite est calculée bien évidemment en appliquant les filtres de reconstruction sur les trois composantes de chaque coefficient d'ondelettes.

Nous voulons maintenant construire une représentation en contour « couleur » multiéchelle. Nous devons pour cela préciser la définition d'un contour dans un système couleur et ainsi sélectionner à chaque échelle les coefficients d'ondelettes associés à un bord. Nous illustrons cette problématique sur la figure 2. C'est cette étape qui nous permet d'introduire la dimension couleur dans la décomposition.

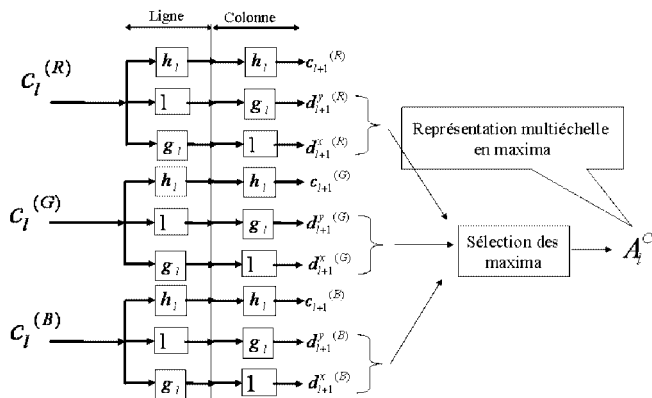


Figure 2. Définition d'une représentation en maxima d'ondelettes couleur.

## 4. Sélection des maxima d'ondelettes suivant une approche contour

La première stratégie que nous étudions consiste à généraliser l'approche utilisée dans le domaine des images en niveaux de

gris : les maxima vont être les points maxima locaux de la norme  $\rho_l$  dans la direction  $\theta_l$ . Pour cela, nous devons introduire la norme couleur  $\rho_l^C$  et la direction couleur  $\theta_l^C$  pour tous les points. Nous pouvons trouver dans la littérature différentes propositions pour le calcul des paramètres contour « couleur ». Nous illustrons ici deux concepts :

- Le gradient vectoriel défini par Di Zenzo [11]

$$E_l(\cdot) = \|\mathbf{d}_l^x(\cdot)\|^2, F_l(\cdot) = \mathbf{d}_l^x(\cdot) \cdot \mathbf{d}_l^y(\cdot), R_l(\cdot) = \|\mathbf{d}_l^y(\cdot)\|^2$$

$$\theta_l^C(\cdot) = 0.5 \arctan \frac{2F_l(\cdot)}{E_l(\cdot) - R_l(\cdot)}$$

$$\rho_l^C(\cdot) = 0.5 \left( \sqrt{(E_l(\cdot) - R_l(\cdot)) + 4F_l(\cdot)^2} \right)$$

- Fusion des trois dérivés partielles des composantes couleur suivant la norme  $L_\infty$  (sélection selon la valeur maximale).

Suivant l'une des deux approches, à partir des coefficients d'ondelettes et après le changement de repère en représentation polaire, nous obtenons une nouvelle représentation :

$$[\mathbf{d}_l^x(\cdot) \quad \mathbf{d}_l^y(\cdot)]_{0 < l \leq L} \mapsto [\rho_l^C(\cdot) \quad \theta_l^C(\cdot)]_{0 < l \leq L} \tag{5}$$

$$2 \times (N \times N \times 3) \times L \mapsto 2 \times (N \times N) \times L$$

Notons que la nouvelle représentation de taille  $2 \times (N \times N) \times L$  est équivalente à celle obtenue pour les images en niveaux de gris, à savoir pour chaque position spatiale nous avons une valeur de norme et de direction.

Puisque la norme et la direction couleur sont connues, nous pouvons alors extraire les maxima d'ondelettes à chaque échelle dans la décomposition de l'image couleur. Si nous collectons tous ces maxima, notre image couleur est alors transformée en une représentation en bord multiéchelle avec la particularité que les contours sont détectés directement dans l'espace couleur :

$$(N \times N) \times 3 \rightarrow Dim \text{ avec } Dim < 2 \times (N \times N) \times L$$

$$[f^{C_1}, f^{C_2}, f^{C_3}] \rightarrow (A_l^C)_{0 < l \leq L}$$

avec  $A_l^C = \{\theta_l^C[k_1,k_2], \rho_l^C[k_1,k_2]\}$  telle que  $\rho_l^C[k_1,k_2]$  est maximum dans la direction  $\theta_l^C[k_1,k_2]$ .

Nous obtenons alors une vraie représentation des contours couleur multiéchelle :

- L'intégration de l'information couleur se fait durant la sélection des maxima d'ondelettes.

- Les maxima suivent une évolution à travers les échelles fixée par différentes règles caractérisant la régularité locale du signal analysé.

À partir de cette nouvelle représentation, et grâce à l'algorithme itératif de Mallat, nous pouvons alors reconstruire deux images différentes :

1. Soit nous considérons la représentation  $\{\theta_l^C[k_1,k_2], \rho_l^C[k_1,k_2]\}$  et dans ce cas l'image reconstruite est une image en niveaux de gris. Nous illustrons ce point dans le paragraphe 4.2.



2. Soit nous collectons les coefficients d'ondelettes pour les trois plans couleur lorsque  $\rho_l^C[k_1, k_2]$  est maximum dans la direction  $\theta_l^C[k_1, k_2]$  et nous appliquons l'algorithme itératif indépendamment sur les trois plans. Dans ce cas, l'image reconstruite est une image couleur correspondant a priori à l'image initiale. Nous vérifions ce point dans le paragraphe 4.2.

#### 4.1. Analyse de l'information Angle-Norme multiéchelle

Puisque nous avons défini une représentation en maxima d'ondelettes, nous pouvons appliquer l'algorithme itératif de reconstruction. Pour cela, nous devons définir deux dérivés partielles « équivalentes » :

$$\begin{bmatrix} \tilde{d}_l^x[k_1, k_2] \\ \tilde{d}_l^y[k_1, k_2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_l^C[k_1, k_2] \cos(\theta_l^C[k_1, k_2]) \\ \rho_l^C[k_1, k_2] \sin(\theta_l^C[k_1, k_2]) \end{bmatrix} \quad (6)$$

avec  $[k_1, k_2]$  telle que  $\rho_l^C[k_1, k_2]$  est maximum dans la direction  $\theta_l^C[k_1, k_2]$

Etant donné que l'ensemble des bords multiéchelle couleur tel que nous venons le définir est une projection de taille  $2 \times (N \times N) \times L$ , la fonction reconstruite est une image en niveaux de gris (avec le changement de repère, l'information couleur est « réduite »). Cette image en niveaux de gris est particulière car elle est « estimée » à partir de la norme et de la direction des contours **couleur** et elle illustre les discontinuités couleur détectées **aux différentes échelles**.

La représentation en maxima d'ondelettes couleur de l'image « maison » est présentée dans la figure 4 pour le gradient DiZenko et dans la figure 3 pour la norme  $L_\infty$ . Nous pouvons constater que pour les deux définitions de la norme et de la direction, les maxima sont correctement détectés. Par exemple, à l'échelle la plus fine, toutes les composantes de l'image apparaissent. À l'inverse, à l'échelle grossière seuls les détails importants sont présents. Avec une stratégie « coarse-to-fine », cette nouvelle représentation peut être utilisée dans un processus de segmentation qui ne sélectionne que les éléments présents à l'échelle la plus grossière.

Toutefois, l'image reconstruite est différente pour les deux concepts de gradient. Avec la norme  $L_\infty$  (notons que le résultat est similaire avec une somme vectorielle), l'image reconstruite est équivalente à une transformation « couleur → niveaux de gris » de l'image originale. Nous en déduisons que le calcul de la norme et de la direction du gradient suivant une stratégie  $L_\infty$  est équivalent à l'application de la décomposition en maxima d'ondelettes sur la composante de luminance.

Avec le gradient de DiZenko, les régions couleur homogènes restent lisses alors que les ruptures couleur sont mises en valeur. L'image reconstruite semble équivalente à l'application d'un filtre Laplacien. Ce résultat surprenant est dû à la définition de la direction du gradient. Afin d'illustrer cette particularité, nous

décomposons une image synthétique (un cercle avec  $R = G = B$ ). La figure 5(a) illustre les variations des directions des gradients  $L_\infty$  et de DiZenko à une échelle. Nous constatons que la direction « niveaux de gris » varie bien entre  $-\pi$  et  $\pi$ , alors que la direction de DiZenko est incohérente pour les contours verticaux (elle est nulle à droite et à gauche du cercle). Donc lorsque nous calculons les plans de dérivés partielles équivalentes, définis par l'équation (6), les signes des coefficients sont différents de ceux obtenus par une approche niveaux de gris. Dans ce cas, les contours interpolés par l'algorithme de reconstruction ont des pentes opposés. La figure 5(b) illustre cette caractéristique.

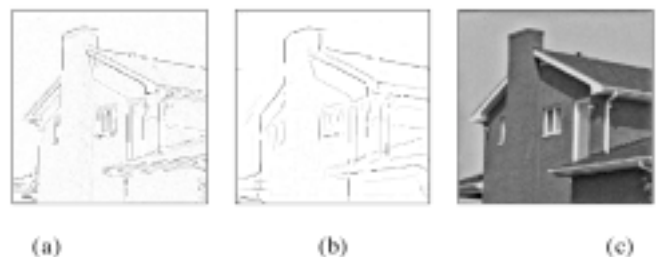


Figure 3. Représentation en maxima d'ondelettes couleur: définition de la norme et de la direction suivant une approche  $L_\infty$ : (a) Contours à l'échelle 2, (b) Contours à l'échelle 4, (c) Image reconstruite à partir de cette représentation en maxima.

#### 4.2. Illustration de l'approche contour pour une problématique de débruitage

À partir des propriétés de propagation des maxima, c'est tout naturellement que ces dernières années quelques algorithmes de débruitage basés sur la représentation en maxima sont apparus dans la littérature. Dans ce cadre, on tente de conserver les coefficients qui correspondent à l'information, et d'éliminer ceux qui correspondent à du bruit. Il existe principalement deux méthodes, qui utilisent des modes opératoires très proches.

Le premier algorithme proposé fut celui de Mallat et Zhang [12]. Il étudie l'évolution des maxima d'ondelettes à travers les échelles. Cette évolution permet de caractériser la régularité de la fonction dans un proche voisinage. L'algorithme de Mallat repose sur le principe que tout maximum lié au bruit ne va pas se diffuser dans toutes les échelles. En revanche, les principales discontinuités sont encore présentes à des échelles grossières. Mallat et Zhang suggèrent donc de suivre l'évolution des maxima dans les échelles et de supprimer ceux qui ne se diffusent pas au-delà d'une échelle « seuil ». Le second algorithme de débruitage a été proposé par Lu [9] et ne diffère de celui de Mallat que par la méthodologie d'association des maxima d'ondelettes à travers les échelles.

Dans l'extension de ces algorithmes du 1D vers le 2D scalaire (images en niveaux de gris) la principale modification réside

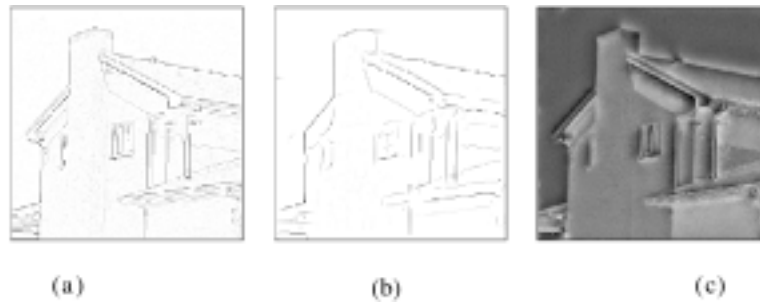


Figure 4. Représentation en maxima d'ondelettes couleur : définition de la norme et de la direction suivant une approche de DiZenzo : (a) Contours à l'échelle 2, (b) Contours à l'échelle 4, (c) Image reconstruite à partir de cette représentation en maxima.

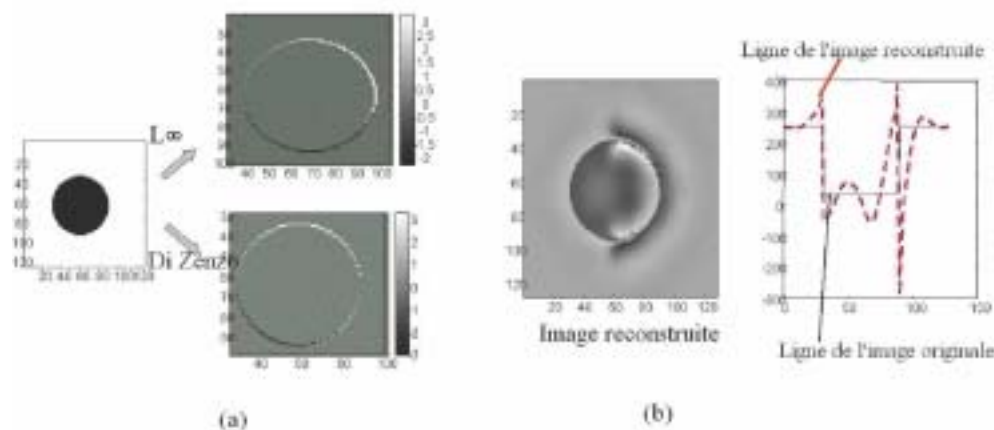


Figure 5. (a) Direction du gradient pour une image synthétique, (b) Image reconstruite à partir de la représentation en maxima d'ondelettes DiZenzo et vue en coupe de l'image originale et reconstruite.

dans le fait que l'on ne considère plus seulement la propagation à travers les échelles d'un maximum mais d'un contour. Ceci requiert donc un chaînage à chaque échelle des maxima en différents contours avant l'analyse inter-échelle.

Il est naturel d'adapter notre représentation des contours couleur pour une utilisation dans des problèmes de restauration de données couleur. Afin d'illustrer la potentialité des maxima d'ondelettes couleur dans ce domaine, nous proposons d'appliquer le simple algorithme de débruitage suivant (une version couleur simplifiée des algorithmes utilisant les maxima) :

- Décomposition de l'image bruitée couleur en gradient multi-échelle couleur.
- Sélection des maxima suivant l'approche Dizenzo ou  $L_\infty$ .
- Seuillage à chaque échelle des maxima afin de ne conserver que les contours les plus significatifs.
- Reconstruction à l'aide de l'algorithme itératif de Mallat de chaque composante couleur à partir des maxima sélectionnés à l'étape précédente.

Le seuillage des maxima doit permettre la sélection des contours prépondérants. Nous devons donc partitionner en deux classes l'ensemble des maxima à partir de leur valeur de norme (la norme est représentative de l'importance de la rupture associée). Pour cela, nous proposons d'appliquer l'algorithme de Llyods-Max qui est utilisé dans des problématiques de quantification ou de segmentation basées sur l'histogramme. Cet algo-

ritme fonctionne suivant le même principe que la méthode de coalescence. Dans notre cas, nous cherchons une partition/quantification suivant 2 classes, l'algorithme étant appliqué à chaque échelle  $l$  :

Soit  $\{M_i^l\}_{0 \leq i < l}$  l'ensemble des valeurs de normes des maxima sélectionnés à l'échelle  $l$

1. Initialisation d'un dictionnaire  $\{\tilde{M}_1^l, \tilde{M}_2^l\}$  par tirage aléatoire.
2. Connaissant ce dictionnaire, on étiquette chaque échantillon  $M_i^l$  par le numéro de son plus proche voisin dans le dictionnaire. On détermine ainsi implicitement la partition optimale.
3. À partir de tous les échantillons étiquetés par le même numéro, on en déduit un nouveau dictionnaire par un calcul de moyenne.
4. On calcule la distorsion moyenne associée à ce dictionnaire et on arrête l'algorithme si la distorsion ne décroît presque plus, sinon on reprend les deux étapes précédentes.

Bien sûr comme dans toutes méthodes de coalescence, on ne tend pas toujours vers le minimum global. Ensuite nous supprimons tous les maxima qui sont éléments de la classe associée à la plus faible valeur de norme.

Nous illustrons sur la figure 6 cette simple méthode de débruitage que nous venons de décrire, appliquée sur l'image « maison » bruitée par un bruit blanc Gaussien (pour un SNR = 2 dB). Nous avons utilisé la notion  $L_\infty$  pour définir la norme et la direction

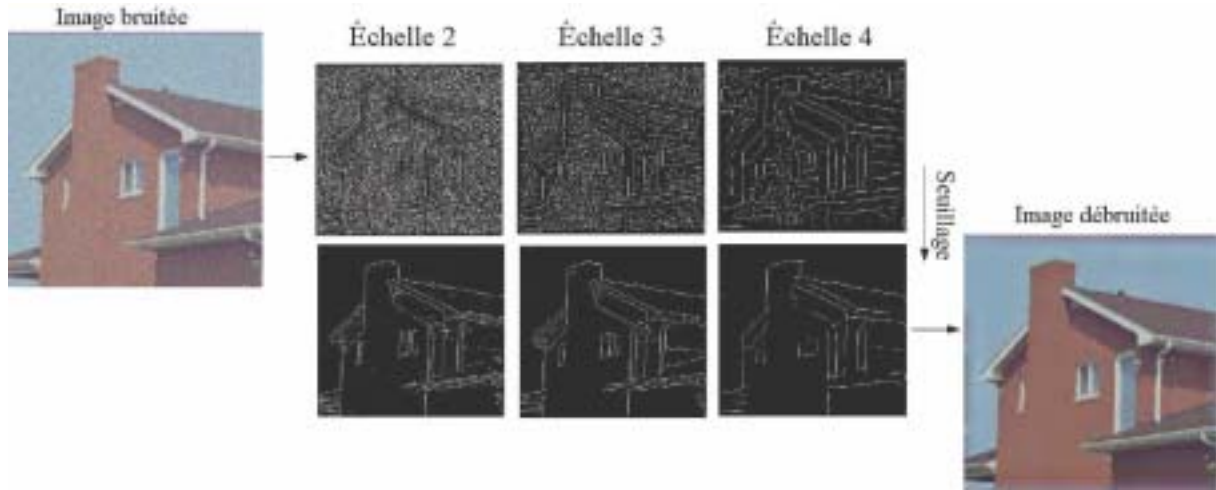


Figure 6. Débruitage d'image couleur par seuillage des maxima d'ondelettes couleur (SNR=15.44 dB).

couleur. L'approche de DiZenzo obtient un résultat équivalent. Nous constatons que le seuillage proposé permet de ne sélectionner à chaque échelle que les contours les plus prépondérants. L'image reconstruite est alors débruitée sans qu'un effet de flou n'apparaisse (ceci grâce à la représentation utilisant les contours).

Ce résultat n'a pour but que d'illustrer la validité de l'approche. Pour obtenir des résultats en restauration plus performants, nous devons incorporer dans l'algorithme la dimension interéchelle et ne pas faire un simple seuillage à chaque échelle comme le font les différents auteurs ayant travaillé avec les maxima d'ondelettes pour les images en niveaux de gris. Nous étudions actuellement la potentialité d'un suivi à travers les échelles des contours couleur.

## 5. Sélection des maxima d'ondelettes suivant une approche région

Comme nous l'avons vu, les approches contour permettent d'intégrer la dimension couleur dans la représentation en maxima d'ondelettes. Cependant, nous pouvons aussi utiliser les stratégies incluant une approche région. En effet, la représentation en maxima d'ondelettes correspond à un ensemble de coefficients d'ondelettes collectés à différentes échelles et qui doivent correspondre à des points de ruptures dans l'image. À l'origine cette sélection se fait suivant une approche contour (approche de Canny), mais nous pouvons proposer de détecter les ruptures, et donc les maxima d'ondelettes, à chaque résolution de l'image (à chaque approximation passe-bas) suivant une approche région. Nous nous écartons alors de la proposition initiale définissant

les maxima d'ondelettes suivant l'approche de Canny. La construction de cette nouvelle représentation est la suivante :

Initialisation de l'algorithme:  $\mathbf{c}_0 = \mathbf{f}$

Pour  $l$  variant de 1 à  $L$ ,

- Calcul du gradient multiéchelle suivant l'équation déjà citée :

$$\mathbf{d}_l^x[k_1, k_2] = \frac{1}{\sqrt{2}} [(g^l, 1) * \mathbf{c}_{l-1}][k_1, k_2]$$

$$\mathbf{d}_l^y[k_1, k_2] = \frac{1}{\sqrt{2}} [(1, g^l) * \mathbf{c}_{l-1}][k_1, k_2]$$

- Segmentation en région de la résolution étudiée :

$$\text{bin} = \text{segmente\_region}(\mathbf{c}_{l-1})$$

Les coefficients d'ondelettes considérés comme maxima vont être les points positionnés à la frontière entre deux régions sur le résultat de la segmentation bin.

- Définition à chaque échelle d'un ensemble  $A_l$  tel que

$$A_l = \{(\mathbf{d}_l^x[k_1, k_2], \mathbf{d}_l^y[k_1, k_2]) \text{ pour } \forall k_1, k_2 \text{ telle que } \text{bin}[k_1, k_2] \text{ soit une frontière entre deux régions}\}.$$

- Calcul de l'image à la résolution suivante :

$$\mathbf{c}_l(k_1, k_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [(h^l, h^l) * \mathbf{c}_{l-1}](k_1, k_2)$$

Nous illustrons la méthodologie complète sur la figure 7.

L'approche par région peut nous permettre, par exemple, dans le cadre d'images couleur bruitées, de sélectionner d'une façon plus robuste les contours principaux de l'image. En effet, les approches régions fournissent une représentation plus facile à manipuler. Nous citons ici quelques points principaux :

- Les contours associés sont fermés.

- La suppression de petites régions parasites est plus aisée.



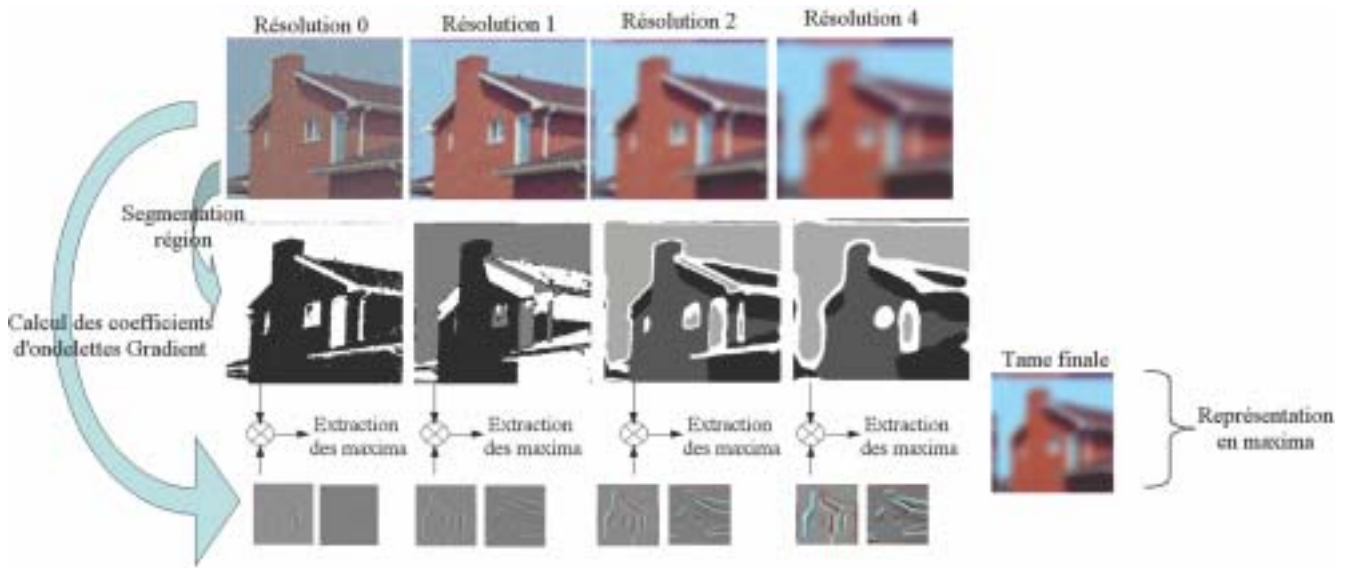


Figure 7. Construction d'une représentation en maxima d'ondelettes couleur à partir d'une approche région.

- L'intégration d'une information multiéchelle est plus robuste que lors de la manipulation de contours car il est plus simple de suivre une région à travers les échelles qu'un contour.

Comme pour l'approche contour, nous nous proposons d'illustrer dans cet article simplement la potentialité de la représentation: nous choisissons donc d'appliquer l'approche région sans post-traitement ou analyse inter-échelle. Nous présentons les résultats de la sélection des contours couleur multiéchelle par approche région dans le cadre du débruitage de l'image « maison » bruitée par un bruit blanc Gaussien (figure 6). Nous appliquons trois méthodes de segmentation région :

- Approche Split and Merge (figure 8)
- Approche Fuzzy C-mean (figure 9)
- Approche Réduction de couleur (figure 10)

Pour les trois approches, les paramètres des méthodes sont fixés afin de ne sélectionner que les régions les plus significatives à chaque échelle. Nous constatons sur les images reconstruites que le bruit a globalement disparu alors que les contours présent dans l'image sont conservés. Toutefois, les résultats exposés

sont inférieurs à celui présenté sur la figure 6 dans le cadre de l'approche contour. Ceci est naturel car les résultats de l'approche région sont obtenus sans aucun traitement annexe, alors que dans le cadre de l'approche contour, nous avons introduit un seuillage, ce qui constitue déjà un post-traitement. Un simple post-traitement peut être la suppression des petites régions. Ceci est implanté dans une méthode complète de débruitage à partir d'une approche région (segmentation basée histogramme) présentée dans [13]. Les résultats préliminaires présentés sur les figures 8, 9 et 10 montrent cependant que la décomposition en ondelettes peut être couplée avec une segmentation région couleur d'une manière efficace.

Notons que nous indiquons pour chaque image débruitée, la valeur de SNR associée. Suivant cette mesure, le meilleur résultat est obtenu pour le « débruitage » par réduction de couleur. En effet, c'est la méthode qui sélectionne le moins de contours, et donc l'image reconstruite contient « grossièrement » les structures d'une manière assez lissée. Mais l'impression visuelle va à l'encontre de cette conclusion: l'approche par seuillage direct des

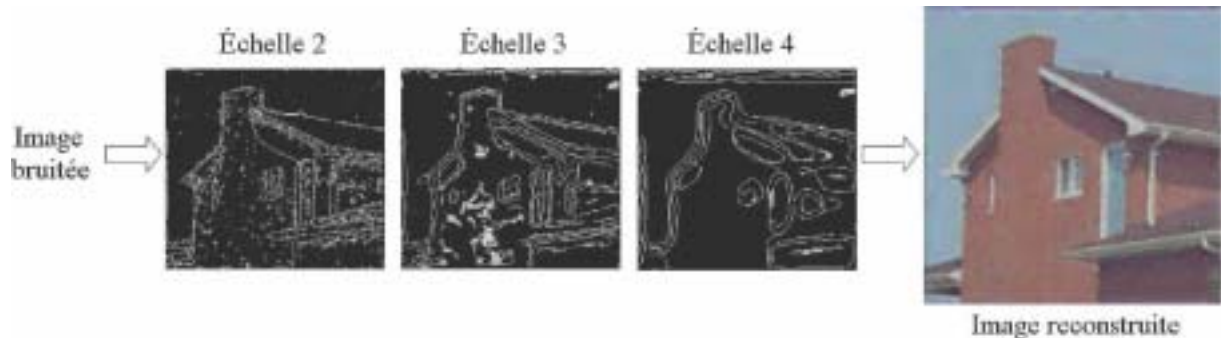


Figure 8. Construction d'une représentation en maxima d'ondelettes couleur et débruitage à partir d'une approche Split and Merge (SNR = 15.65 dB).

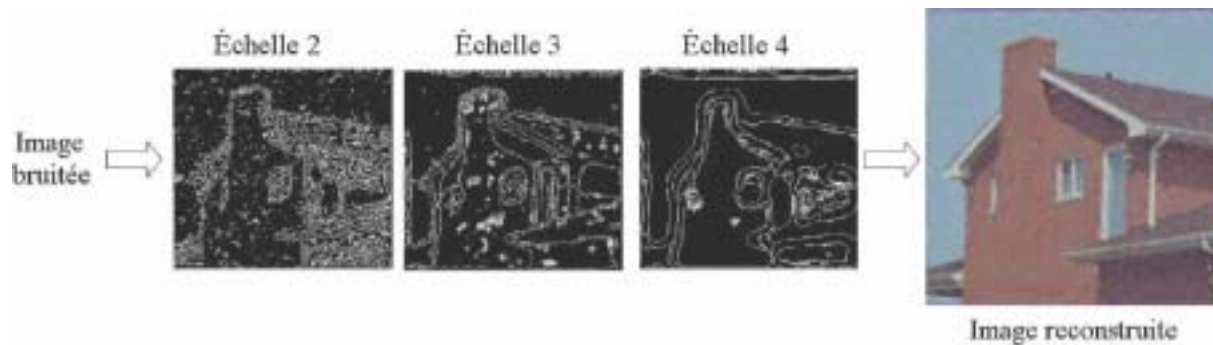


Figure 9. Construction d'une représentation en maxima d'ondelettes couleur et débruitage à partir d'une approche Fuzzy C-mean (SNR = 15.30 dB).

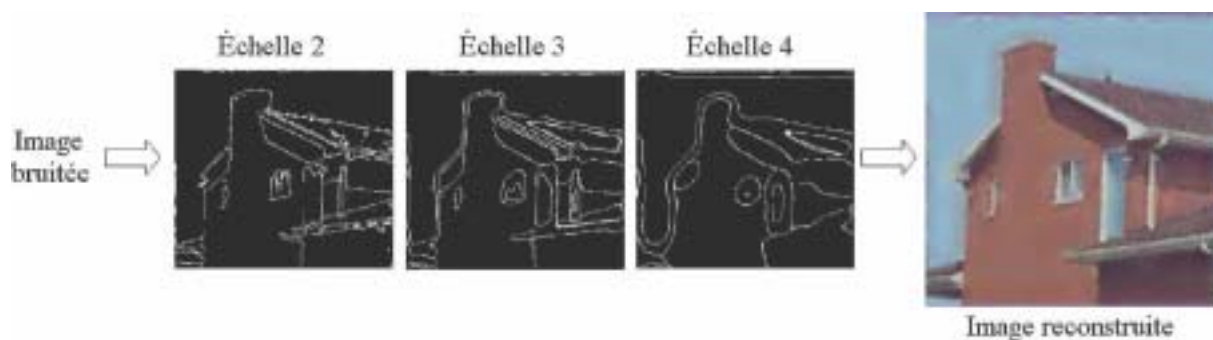


Figure 10. Construction d'une représentation en maxima d'ondelettes couleur et débruitage à partir d'une approche Réduction de couleur (SNR = 16.59 dB)

contours permet d'obtenir la meilleure image. Nous retrouvons ici toute la difficulté des mesures automatiques pour juger des résultats en terme de débruitage (encore plus en couleur). Cet aspect est par exemple discuté dans [14, 15].

## 6. Conclusion

La problématique traitée dans cet article était la mise en place d'une représentation multiéchelle prenant en compte la spécificité des images couleur. Nous avons proposé pour cela d'étendre la représentation en maxima d'ondelettes aux images couleur. Ceci a été mis en oeuvre tout d'abord par une simple extension marginale pour le calcul du gradient multiéchelle. La décomposition obtenue permet, comme nous l'avons vu, d'analyser les ruptures couleur à différentes résolutions de l'image.

Ensuite, un processus de sélection des maxima couleur a dû être défini. Nous avons proposé pour cela deux méthodes de sélection des maxima d'ondelettes : l'extension à la couleur de l'approche contour et une approche région. Cette étape est fondamentale car c'est elle qui permet réellement l'introduction de la dimension couleur dans notre décomposition en ondelettes.

À l'aide de l'approche contour et du calcul de plans de dérivés

équivalents nous obtenons, après reconstruction, une image en niveaux de gris qui illustre les contours détectés aux différentes échelles ainsi que les particularités de chaque définition de norme et de direction du gradient couleur. Nous avons dans ce cadre discuté de la direction du gradient suivant l'approche de Di Zenzo.

Ensuite, en utilisant un simple processus de seuillage des maxima d'ondelettes couleur basé sur un partitionnement suivant leurs valeurs de norme, nous avons illustré les possibilités offertes par cette représentation pour des problèmes de restauration de données couleur.

Le second volet avait pour souci de montrer que les maxima d'ondelettes peuvent aussi être utilisés en collaboration avec des approches de segmentation détectant des régions homogènes. Ceci permet d'obtenir une structure plus facilement manipulable en terme multiéchelle : il est par exemple plus facile « informatiquement » de suivre à travers les échelles une région qu'un contour. De plus, le nombre important d'approches de segmentation couleur de ce type nous ouvre de nombreuses perspectives de développement. Les résultats exposés dans un cadre de débruitage ont illustré la méthode.

Comme nous l'avons mentionné à plusieurs reprises, l'objectif de cette étude était de proposer une stratégie permettant d'intégrer pleinement la dimension couleur dans une représentation

par ondelettes, et de ne pas rester au traitement marginal de l'information. Les perspectives de ce travail se divisent suivant deux volets. Elles concernent tout d'abord la partie applicative : les algorithmes de débruitage présentés dans ce papier le sont à titre illustratif mais ils doivent être affinés. Ce prolongement doit se faire à la fois dans le traitement à chaque échelle (chaînage des contours dans l'approche contour, post-traitement sur les régions dans l'approche région) mais aussi dans l'utilisation de l'information multitéchelle comme c'est le cas pour les images en niveaux de gris. Ceci permettra de construire une méthode de débruitage supprimant les éléments parasites tout en conservant intacts les contours de l'image. Une autre application immédiate de la représentation proposée est bien sûr la segmentation puisque nous sommes déjà dans un schéma de segmentation multiéchelle. L'application d'une stratégie coarse-to-fine permettra une sélection précise des zones couleur principales de l'image.

Enfin, les perspectives concernent aussi la représentation en elle-même. Plusieurs questions restent ouvertes, en voici quelques-unes :

- L'algorithme de reconstruction de Mallat est-il le mieux adapté pour traiter les plans couleur ?
- Quel est le meilleur espace couleur pour utiliser cette représentation ?
- Quel est l'algorithme de segmentation couleur le mieux adapté à cette représentation ?



Philippe Carré

Maître de Conférences à l'Université de Poitiers et membre du laboratoire SIC, Activités de recherche : l'étude et la conception de méthodes de décomposition discrète Temps-échelle et Temps-fréquence. Ce domaine de recherche comprenant de nombreuses « branches », nous nous concentrons sur les décompositions atomiques discrètes reconstructibles. À travers ces méthodes nous abordons les problématiques de restauration de données, de segmentation ou de tatouage.

## Références

- [1] S. ZHONG, *Edge Representation from Wavelet Transform Maxima*. PhD thesis, New York University, September 1990.
- [2] Y. MEYER, *Ondelettes et opérateurs*, vol. I. Paris: Hermann, 1990.
- [3] M. SHENSA, « Wedding the à trous and Mallat algorithms, » *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 40, no. 10, pp. 2464-2482, 1992.
- [4] J. CANNY, « computational approach to edge detection », *IEEE Trans. on PAMI*, vol. 8, no. 6, pp. 679-698, 1986.
- [5] R. CARMONA, « Extrema reconstruction and spline smoothing: Variations on an algorithm of mallat and zhong », in *Wavelets and Statistics* (A. Antoniadis and G. Oppenheim, eds.), vol. 103 of *Lecture Notes in Statistics*, (New York), pp. 83-94, Springer-Verlag, 1995.
- [6] J. LU, « On consistent signal reconstruction from wavelet extrema representation », in *Wavelet Applications in Signal and Image Processing*, vol. 3169, (San Diego), SPIE, 1997.
- [7] S. MALLAT and S. ZHONG, « Characterization of signals from multiscale edges », *IEEE Trans. on PAMI*, vol. 14, pp. 710-732, July 1992.
- [8] D. YOULA and H. WEBB, « Image restoration by the method of convex projections », *IEEE Trans. on Medical Imaging*, no. 1, pp. 81-101, 1982.
- [9] J. LU, J. WEAVER, D. HEALY, and Y. XU, « Noise reduction with multiscale edge representation and perceptual criteria », in *International Symposium on Time-Frequency and Time-Scale Analysis*, IEEE, October 1992.
- [10] S. CHANG, « Image interpolation using wavelet-based edge enhancement and texture analysis », Master's thesis, Berkeley University, May 1995.
- [11] S. DIZENZO, « A note on the gradient of a multi-image », *CVGIP*, vol. 33, pp. 116-125, 1986.
- [12] S. MALLAT and W. HWANG, « Singularity detection and processing with wavelets », *IEEE Trans. Information Theory*, vol. 38, no. 2, pp. 617-643, 1992.
- [13] A. STOICA, P. CARRÉ and C. FERNANDEZ-MALOIGNE, « Color images de-noising by wavelet maxima representation and regions segmentation », in *CGIP'2002*, April 2002. Poitiers, France.
- [14] J.-L. STARCK, E. CANDÈS, and D. DONOHO, « The curvelet transform for image denoising », *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 11, pp. 670-684, November 2002.
- [15] P. CARRÉ and E. ANDRÈS, « Discrete Analytical Ridgelet Transform », *Signal Processing*, vol. 84, pp. 2165-2173, 2004.

