

# Contraintes géométriques de formes pour les contours actifs orientés région: une approche basée sur les moments de Legendre

## Geometric shape constraints for region-based active contours using Legendre moments

Alban Foulonneau<sup>1</sup>, Pierre Charbonnier<sup>1</sup> et Fabrice Heitz<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ERA 27 LCPC, Laboratoire des Ponts et Chaussées, 11 rue Jean Mentelin, B.P. 9, 67035 Strasbourg,  
Alban.Foulonneau,Pierre.Charbonnier@equipement.gouv.fr

<sup>2</sup>LSIIT UMR CNRS 7005, Université Louis Pasteur – ENSPS –Pôle API, Bd Sébastien Brant, 67400 Illkirch,  
heitz@lsiit.u-strasbg.fr

Manuscrit reçu le 4 décembre 2003

Résumé et mots clés

Dans cet article, nous présentons une approche originale permettant d'incorporer une contrainte géométrique de forme dans les contours actifs orientés région, de façon à améliorer leur robustesse au bruit non gaussien, aux fonds d'images texturés et aux occultations. Pour cela, nous définissons un *descripteur* de forme à partir des moments de Legendre de la fonction caractéristique de la forme. Cette représentation est invariante à certaines transformations géométriques et permet de gérer des objets à topologie complexe. L'*a priori* de forme est alors défini à partir de la distance entre les descripteurs associés au contour actif et à une *forme de référence*. Nous utilisons un cadre théorique permettant une dérivation rigoureuse de l'équation d'évolution du contour actif pour minimiser l'énergie *a priori*. Nous illustrons expérimentalement les capacités de ce nouvel *a priori* géométrique à contraindre l'évolution d'une courbe vers une forme cible. Enfin, nous introduisons cette nouvelle contrainte dans une fonctionnelle de segmentation à deux classes, mettant en évidence son apport en présence d'occultations et de fonds d'images texturés.

Segmentation, contours actifs, approches région, moments de Legendre, contrainte de forme, dérivée de forme.

Abstract and key words

In this paper, we present a novel approach to incorporate geometric shape priors in region-based active contours, in order to provide more robustness to noise and occlusions. We define as *shape descriptor* a set of Legendre moments computed from the characteristic function of the shape. Such a representation is invariant with respect to some geometric transformations and can handle topologically complex objects. The *shape prior* is then defined as a function of the distance, in terms of descriptors, between the active contour and a *reference shape*. We derive the evolution equation that minimizes the prior energy, using a rigorous mathematical framework. Experimental results show the ability of the geometric shape prior to constrain an evolving curve to resemble a target shape. We finally introduce the new shape prior into a two-class segmentation functional and show its benefits on segmentation results, in presence of occlusions and clutter.

Segmentation, active contours, region-based approach, Legendre moments, shape constraint, shape derivative.

# 1. Introduction

Depuis l'article fondateur de Kass *et al.* [25], les contours actifs ou *snakes* sont devenus un outil très populaire en segmentation d'images. Dans leur formalisme d'origine, ces méthodes réalisent un compromis entre fidélité aux données et contraintes sur la courbe, par minimisation d'une fonctionnelle d'énergie basée sur des informations de type frontière. Leur sensibilité au bruit, aux faibles contrastes et aux contours diffus ou manquants, est bien connue. L'introduction de termes de type région dans la partie d'attache aux données de la fonctionnelle permet déjà d'améliorer notablement leurs performances [4, 49]. Cependant, les contraintes imposées à la courbe en évolution demeurent le plus souvent liées à des mesures d'élasticité, de nature locale, qui ne permettent pas de traiter les cas difficiles comme la présence de bruits non gaussiens, de fonds texturés ou d'occultations. La force ballon [8], outil désormais classique dans le formalisme des contours actifs, peut être vue comme une façon d'imposer une contrainte de forme globale simple, portant sur le volume de l'objet reconstruit. Dans un contexte différent, des modèles globaux plus élaborés de forme, issus d'un apprentissage, ont montré leur robustesse [9] mais ont démontré de meilleures performances quand ils sont associés à un processus local de déformation [26]. Les contours actifs possèdent naturellement cette faculté d'adaptation locale. De plus, les développements récents leur confèrent une possibilité d'évolution vers des topologies complexes [16, 31, 32, 34, 37], que n'offrent pas les modèles paramétriques. Introduire des *a priori* globaux de forme dans les contours actifs région paraît donc prometteur et constitue un sujet de recherche d'actualité. Les applications potentielles sont nombreuses. Citons par exemple le suivi d'objets dans les séquences vidéo, la segmentation de structures anatomiques en imagerie médicale, ou encore la détection d'objets d'intérêt pour l'indexation de scènes complexes.

## 1.1 Contraintes de forme et contours actifs

Nous proposons ici une description des principaux articles traitant de l'introduction de contraintes de formes dans les contours actifs.

### 1.1.1 Représentations paramétriques des courbes

Les approches paramétriques décomposent la courbe sur des fonctions de base, à support local ou global. Dans les *diffusion snakes* de Cremers *et al.* [14], une implantation locale, de type B-splines, est considérée. L'*a priori* de forme est introduit à travers une distance de Mahalanobis à une forme moyenne, issue d'un apprentissage de la position des points de contrôle de la courbe. Une procédure analytique permet de calculer les paramètres d'alignement optimaux. L'équation d'évolution de la forme porte alors seulement sur les positions des points de contrôle. La distance de Mahalanobis est inefficace lorsque les

objets appris ont des silhouettes très différentes. Aussi, dans une extension plus récente [11], cette distance est-elle rendue non linéaire grâce à une méthode par noyaux. Cela permet de gérer des distributions complexes, non convexes. Il est ainsi possible d'apprendre plusieurs objets très différents. La méthode ne converge alors plus vers la forme moyenne, mais vers un minimum local qui correspond à l'une des formes apprises.

Dans [41, 43], une description elliptique globale de Fourier est utilisée pour représenter le contour. L'*a priori* est défini comme une densité de probabilité gaussienne sur les descripteurs de Fourier de la courbe. Les paramètres de celle-ci (moyenne et variances) sont appris à partir d'échantillons représentatifs. La contrainte est ajoutée à une fonctionnelle d'attache aux données de type frontière et l'optimisation est effectuée par rapport aux coefficients de Fourier [41].

Les approches paramétriques peuvent être qualifiées de lagrangiennes car le système de coordonnées change avec l'évolution de la courbe. Plus récemment, les techniques eulériennes, utilisant une représentation non paramétrique, implicite, de la courbe dans un repère fixe ont connu un essor important. La plupart des travaux actuels concernant les *a priori* de forme se situent naturellement dans ce cadre.

### 1.1.2 Représentations non paramétriques

Dans une première catégorie d'approches non paramétrique, le critère intègre le long du *snake* une distance (quadratique ou non) à une *forme de référence*. Une carte de distance à la forme de référence est calculée une fois pour toutes, ce qui évite le recours à une mise en correspondance de points. Idéalement, la fonctionnelle est nulle lorsque la courbe est confondue avec la courbe de niveau 0 de la carte de distance, qui n'est autre que la courbe de référence. Dans [19, 20, 24], la forme de référence est le résultat de la segmentation obtenue dans l'image précédente dans une application de suivi. L'évolution est implantée par une équation aux dérivées partielles (EDP) unique portant sur l'évolution de la courbe. Dans [6], la forme de référence est une forme prototype, moyenne d'un échantillon de formes d'apprentissage. Comme elle n'est pas définie dans le repère image, il est nécessaire de lui appliquer une transformation pour l'aligner avec la forme à segmenter (rotation, translation, échelle). L'optimisation se fait par EDP croisées portant sur les paramètres d'alignement et sur l'évolution de la courbe. Enfin, les travaux reportés dans [3] étendent ceux de [6] en les transposant dans un espace propre dont les paramètres sont issus d'une phase d'apprentissage sur les cartes de distance signée (CDS). La carte de distance intégrée le long du contour est « reconstruite » comme combinaison linéaire de vecteurs propres. L'optimisation met alors en œuvre une EDP supplémentaire portant sur les coefficients de représentation sur l'espace propre. Dans [48], la philosophie reste proche des méthodes décrites ci-dessus mais l'intégration est effectuée sur la région intérieure du *snake* et non sur le contour.

D'autres auteurs proposent une contrainte région intégrant, à l'intérieur du contour actif, la différence quadratique entre la

carte de distance associée au *snake* et celle associée à une forme de référence. Paragios et Rousson [33] introduisent une technique variationnelle originale pour calculer la carte de distance signée moyenne constituant la référence. Une transformation d'alignement est incorporée dans le critère et l'optimisation est effectuée par résolution d'EDP croisées. Cremers *et al.* ont proposé récemment deux variantes [12,13] de cette approche.

Une façon originale de gérer alignement, déformation selon un modèle de forme appris et déformation locale est proposée dans [29]. L'algorithme alterne deux étapes. Dans la première, un apprentissage des CDS est mis à profit pour calculer une estimation grossière de la position de la courbe. Pour cela, on effectue l'optimisation, sur les paramètres de forme et d'alignement, d'une fonctionnelle incluant une contrainte gaussienne portant sur les paramètres de forme. Dans une deuxième étape, cette courbe est utilisée comme référence pour définir une force de rappel, ajoutée à un contour actif géodésique, et permettant un ajustement local du *snake*.

Tsai *et al.* définissent dans [46], une technique proche de celle de Leventon, au sens où elle utilise également un apprentissage par ACP des cartes de distance associées aux échantillons de formes. L'ACP permet une représentation des CDS par un modèle linéaire. L'originalité de l'approche est que l'énergie minimisée est composée du seul terme d'attache aux données régions, et que l'optimisation porte sur les paramètres du modèle de forme et les paramètres d'alignement. Elle est également implantée par EDP croisées.

Dans un rapport récent, Charpiat *et al.* [5] définissent un cadre théorique pour plusieurs applications liées à l'analyse de formes : espace de formes et métriques associées, approximations différentiables de distances entre formes. Notons que les métriques proposées sont basées sur des normes des différences entre fonctions caractéristiques ou fonctions distances. Les résultats sont appliqués à l'évolution d'une forme vers une autre (ou *warping*), ainsi qu'au calcul de moyennes et covariances empiriques de formes.

## 1.2 Relation aux travaux existants et contributions originales

Les approches rencontrées dans la littérature utilisent pour la plupart la notion de forme de référence. Cette dernière peut être le résultat d'une étape de (pré-) segmentation [19, 20, 29]. Généralement, il s'agit d'une forme moyenne issue d'une phase d'apprentissage, souvent par ACP [3, 6, 11, 29, 33, 41, 46], à partir d'un échantillon représentatif de formes. Dans cet article, nous supposons connue la forme de référence et nous nous focaliserons sur la façon de contraindre l'évolution d'un contour actif vers celle-ci.

Deux façons de représenter les courbes nous semblent particulièrement intéressantes. Ainsi, les représentations par carte de distance signée ont l'avantage de ne pas contraindre la topologie de l'objet [11]. Cette propriété, évidemment très souhaitable, est partagée par la fonction caractéristique de la région intérieure à la courbe, qui permet également de représenter des formes à

topologie complexe. Notons que cette fonction est directement reliée à la carte de distance, dont elle peut se déduire à l'aide d'une fonction de Heaviside. D'autre part, une décomposition des formes sur une base globale, comme dans [41], permet de réduire la dimensionnalité du problème et de bâtir une description hiérarchique des objets.

La première idée que nous proposons est d'en « coder » la géométrie du contour actif, tout comme celle de la forme de référence, à l'aide d'un nombre restreint de paramètres, rassemblés dans des *descripteurs* de formes. D'une manière générale, ceux-ci sont définis en projetant la fonction caractéristique des formes sur une base de fonctions à support global. Cette représentation de type région permet de gérer des objets à topologie complexe et d'introduire facilement une invariance à certaines transformations géométriques.

En effet, la forme de référence est généralement définie dans un repère différent du repère image. Lors de la segmentation, il est donc nécessaire de résoudre la question de l'alignement du contour actif par rapport à la référence. L'inconvénient majeur de la modélisation explicite couramment utilisée est qu'elle augmente le nombre de degrés de liberté du problème et qu'elle oblige à résoudre simultanément plusieurs équations aux dérivées partielles. L'approche alternative que nous mettons en œuvre consiste à rechercher une invariance aux transformations géométriques au niveau de la description des formes. La distance définie à partir de cette description « hérite » alors naturellement de cette invariance. Nous développons dans cet article le cas particulier où les fonctions de base utilisées sont les polynômes orthogonaux de Legendre, calculés à partir de moments géométriques centrés et normés. Cette représentation est invariante par rapport à la translation et au changement d'échelle.

La seconde contribution de cet article est de définir la contrainte géométrique comme une distance entre descripteurs, plutôt qu'entre formes. Nous développons ici deux exemples de distances, basées sur la norme quadratique de la différence entre le descripteur de la courbe et celui de la forme de référence. Les descripteurs utilisés étant de type région, nous pouvons dériver dans un formalisme analytique unifié, à la fois le terme d'attache aux données et la contrainte *a priori*. Pour cela, nous utilisons un formalisme associant les règles classiques de dérivation et la notion de dérivée de forme [1, 15, 23, 40]. Nous obtenons l'équation d'évolution du contour de manière complètement indépendante de l'implantation.

La suite de l'article est organisée comme suit. La modélisation proposée est décrite dans le paragraphe 2. Nous dérivons ensuite l'équation d'évolution du contour actif (paragraphe 3). Enfin, nous illustrons dans le paragraphe 4 les capacités de notre nouvelle contrainte de forme et son apport dans des problèmes de segmentation à deux classes en présence de fond texturé et d'occlusions partielles.

## 2. Les moments de Legendre comme descripteur de forme

Dans ce paragraphe, nous considérons la représentation d'une forme par sa fonction caractéristique. Cette fonction assigne la valeur 1 aux points contenus dans la forme et la valeur 0 à ceux situés à l'extérieur de celle-ci. Nous noterons  $\Omega_{int}$  la région support de l'objet et  $\Omega_{ext}$  le reste du domaine image,  $\Omega$  (figure 1). Cette représentation est évidemment peu parcimonieuse et il est souhaitable de définir une caractérisation plus compacte de la forme. Cela revient à « encoder » la géométrie de l'objet en un nombre plus réduit de paramètres, formant un vecteur que nous appellerons descripteur de l'objet. Le principe général que nous adoptons consiste à projeter la fonction caractéristique de l'objet sur une base de fonctions analytiques, à support global sur le domaine image. Nous développons ici le cas des fonctions de bases polynomiales réelles, ce qui revient à décrire la forme par ses moments géométriques. En effet, cela permet de définir facilement une représentation invariante par translation et facteur d'échelle, propriété fortement souhaitable pour un descripteur. D'autre part, l'utilisation de fonctions de bases orthogonales limite la redondance d'information et offre donc une description « hiérarchique » de la forme, comme nous l'illustrerons à la fin de ce paragraphe. Nous utilisons les polynômes de Legendre, orthogonaux pour le produit scalaire associé à la fonction de poids unité. Notons que d'autres bases de polynômes, notamment complexes, sont envisageables. Citons par exemple les polynômes de Zernike [44] ou encore la base ART (*Angular Radial Transform*) introduite pour la norme de compression MPEG-7 [2, 39]. Ces bases, également orthogonales, présentent l'intérêt d'être naturellement invariantes par rotation, mais sont définies en coordonnées polaires dans le plan complexe, ce qui impose des traitements supplémentaires dans les schémas algorithmiques.

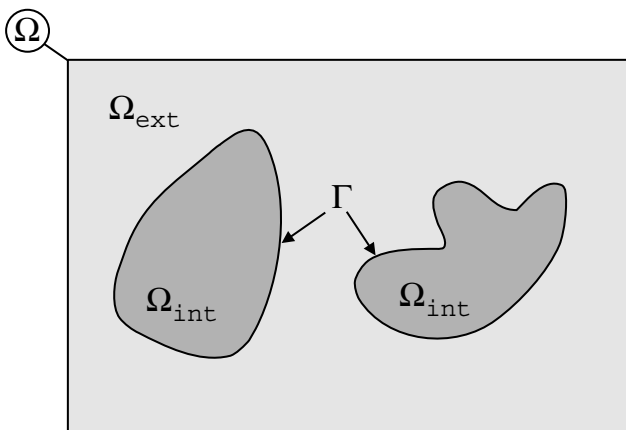


Figure 1. Partition de l'image.

### 2.1 Définition générale

En toute généralité une image peut être considérée comme une distribution bidimensionnelle  $f(x,y)$  dont les valeurs sont l'intensité des pixels aux positions  $(x,y)$ . L'ensemble des moments géométriques associés, noté  $\{M_{p,q}, (p,q) \in \mathbb{N}^2\}$ , est défini par :

$$M_{p,q} = \iint_{\Omega} x^p y^q f(x,y) dx dy. \quad (1)$$

Il s'agit de la projection de la fonction  $f$  sur les monômes,  $p + q$  représentant l'ordre d'un moment. La fonction étant bornée, continue par morceaux, à support fini et l'ensemble  $\{x^p y^q\}$  constituant une base complète de polynômes (théorème d'approximation de Weierstrass [10]), l'ensemble des moments géométriques décrit de manière unique l'image  $f$  et réciproquement. Ces moments ont donc naturellement été utilisés comme descripteurs d'image dans des applications diverses comme la reconnaissance, la classification, l'estimation de pose ou encore la reconstruction.

Nous nous intéressons à la description d'une forme et, dans ce cas, comme nous l'avons mentionné en introduction, l'image  $f(x,y)$  est la fonction caractéristique, binaire, de l'objet. La définition (1) s'écrit alors plus simplement :

$$M_{p,q} = \iint_{\Omega_{int}} x^p y^q dx dy. \quad (2)$$

### 2.2 Invariance par changement d'échelle et translation

Une propriété souhaitable pour un descripteur de forme est l'invariance lorsque celle-ci est soumise à des transformations géométriques. Nous nous intéressons ici à l'invariance par translation et changement d'échelle des moments géométriques. L'invariance par translation s'obtient simplement en effectuant un changement de repère. Le nouveau repère a son origine au centre de gravité  $(\bar{x}, \bar{y})$  de la forme. On obtient alors ce qu'on appelle des *moments centrés* qui s'écrivent :

$$\iint_{\Omega_{int}} (x - \bar{x})^p (y - \bar{y})^q dx dy. \quad (3)$$

Considérons maintenant le cas du changement d'échelle. Si l'on dispose d'un objet binaire  $f$  et du même objet dans un rapport de taille  $\gamma$ ,  $f'$ , alors on a la relation  $f'(x,y) = f(x/\gamma, y/\gamma)$ . En effectuant un changement de variable on a :

$$M'_{p,q} = \iint_{\Omega} x^p y^q f\left(\frac{x}{\gamma}, \frac{y}{\gamma}\right) dx dy = \gamma^{p+q+2} M_{p,q}. \quad (4)$$

À partir de cette équation on peut, par exemple, exprimer  $\gamma$  en fonction des moments  $M'_{0,0}$  et  $M_{0,0}$  (respectivement les aires des deux objets binaires  $f'$  et  $f$ ) :  $\gamma = (M'_{0,0}/M_{0,0})^{1/2}$ . En remplaçant  $\gamma$  par cette valeur dans (4) on obtient :

$$\frac{M'_{p,q}}{(M'_{0,0})^{\frac{p+q+2}{2}}} = \frac{M_{p,q}}{(M_{0,0})^{\frac{p+q+2}{2}}}. \quad (5)$$

Nous obtenons ainsi des moments invariants par changement d'échelle, que l'on appelle *moments normés* par rapport à l'aire de l'objet, notée  $|\Omega_{int}|$ . On peut maintenant définir les moments géométriques centrés et normés de la fonction caractéristique d'une forme :

$$\eta_{p,q} = \iint_{\Omega_{int}} \frac{(x - \bar{x})^p (y - \bar{y})^q}{|\Omega_{int}|^{(p+q+2)/2}} dx dy. \quad (6)$$

### 2.3 Les moments de Legendre

Nous disposons à ce stade d'un descripteur de forme constitué par l'ensemble des moments géométriques centrés et normés, calculés à partir de la projection de la fonction caractéristique sur la base des polynômes  $x^p y^q$ ,  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ . Les problèmes de redondance d'information dus à la non orthogonalité de cette base de projection sont bien connus [30, 44, 45]. Pour cette raison, nous utilisons la base des polynômes de Legendre, orthogonaux pour le produit scalaire associé à la fonction de poids la plus simple, la fonction unité. Ces polynômes, notés  $P_n(x)$ , définis sur l'intervalle  $[-1, 1]$ , sont donnés par la relation :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \times \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad (7)$$

et la condition d'orthogonalité est traduite par :

$$\langle P_n(x), P_m(x) \rangle = \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2m+1} \delta_{mn}. \quad (8)$$

Ceci permet de définir les moments de Legendre, en admettant en toute généralité que  $\Omega \subset [-1, 1] \times [-1, 1]$  :

$$\lambda_{p,q} = \frac{(2p+1)(2q+1)}{4} \iint_{\Omega_{int}} P_p(x) P_q(y) dx dy. \quad (9)$$

Dans la suite de cet article, nous noterons  $C_{pq}$  la constante de normalisation  $(2p+1)(2q+1)/4$ . Si l'on écrit  $P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_{ni} x^i$ , il existe une relation linéaire entre les moments classiques et ceux de Legendre. On souhaite, par ailleurs, former un descripteur invariant par translation et changement d'échelle. Il suffit pour cela de calculer les moments de Legendre à partir des moments géométriques centrés et normés. La relation avec ces derniers s'écrit alors :

$$\lambda_{p,q} = C_{pq} \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q a_{pi} a_{qj} \eta_{i,j}. \quad (10)$$

La propriété d'orthogonalité offre, d'une part, une représentation non redondante en information et moins sensible aux instabilités

numériques. D'autre part, elle permet une reconstruction analytique simple de la fonction image  $f$  :

$$f(x, y) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \lambda_{p,q} P_p(x) P_q(y). \quad (11)$$

### 2.4 Capacité de description des moments de Legendre

Nous nous intéressons aux moments en tant que descripteurs de forme. Pour juger de leur capacité de représentation, nous examinons maintenant le problème de la reconstruction. Nous avons vu précédemment qu'il était possible théoriquement de reconstruire de manière univoque une image à partir de ses moments (11). Comme on peut le constater, en théorie, l'image reconstruite s'écrit comme une combinaison linéaire infinie de moments. Dans la pratique, on doit évidemment effectuer une troncature. Le problème qui se pose alors est le suivant : quel est l'effet de cette troncature sur la qualité de reconstruction, autrement dit, sur la capacité de description des moments de Legendre ? Si l'on note  $N$  l'ordre jusqu'auquel sont calculés les moments de Legendre, l'image reconstruite  $\hat{f}_N$  s'écrit :

$$\hat{f}_N(x, y) = \sum_{p=0}^N \sum_{q=0}^P \lambda_{p,q} P_{p-q}(x) P_q(y). \quad (12)$$

La figure 2 montre des résultats de reconstruction pour 4 objets binaires de référence, à des ordres  $N$  de troncature de plus en plus grands. Comme prévu, on vérifie que, quelles que soient la position et la taille de l'objet de référence, l'objet reconstruit est centré et son aire représente la même proportion du domaine image. Par inspection visuelle, on constate que l'ordre 40 est suffisant pour identifier les objets de références. Cependant pour l'image « main », une reconstruction à un ordre plus élevé semble nécessaire pour bien distinguer certains détails, comme l'index et le majeur. L'erreur commise lors de la reconstruction peut s'écrire comme la somme de deux termes [30]. L'un provient de la troncature, l'autre de l'approximation discrète des moments continus. Les comportements asymptotiques de ces termes sont antagonistes : pour un ordre de reconstruction tendant vers l'infini, l'erreur due à la troncature tend vers zéro tandis que celle due aux approximations augmente. Sur la figure 2, les reconstructions des images « carré » et « lady » à l'ordre 50 mettent en évidence les instabilités numériques liées au cumul des erreurs de discrétisation et à la précision arithmétique du calculateur. Ceci est encore plus flagrant si l'on calcule l'erreur quadratique moyenne normalisée de reconstruction en fonction de l'ordre de troncature. L'expression de cette grandeur est donnée par :

$$e^2(N) = \frac{\iint (\hat{f}_N(x, y) - f(x, y))^2 dx dy}{\iint f(x, y)^2 dx dy}. \quad (13)$$

Naturellement, avant de calculer cette quantité, la forme de référence est centrée et son aire est normalisée de la même façon

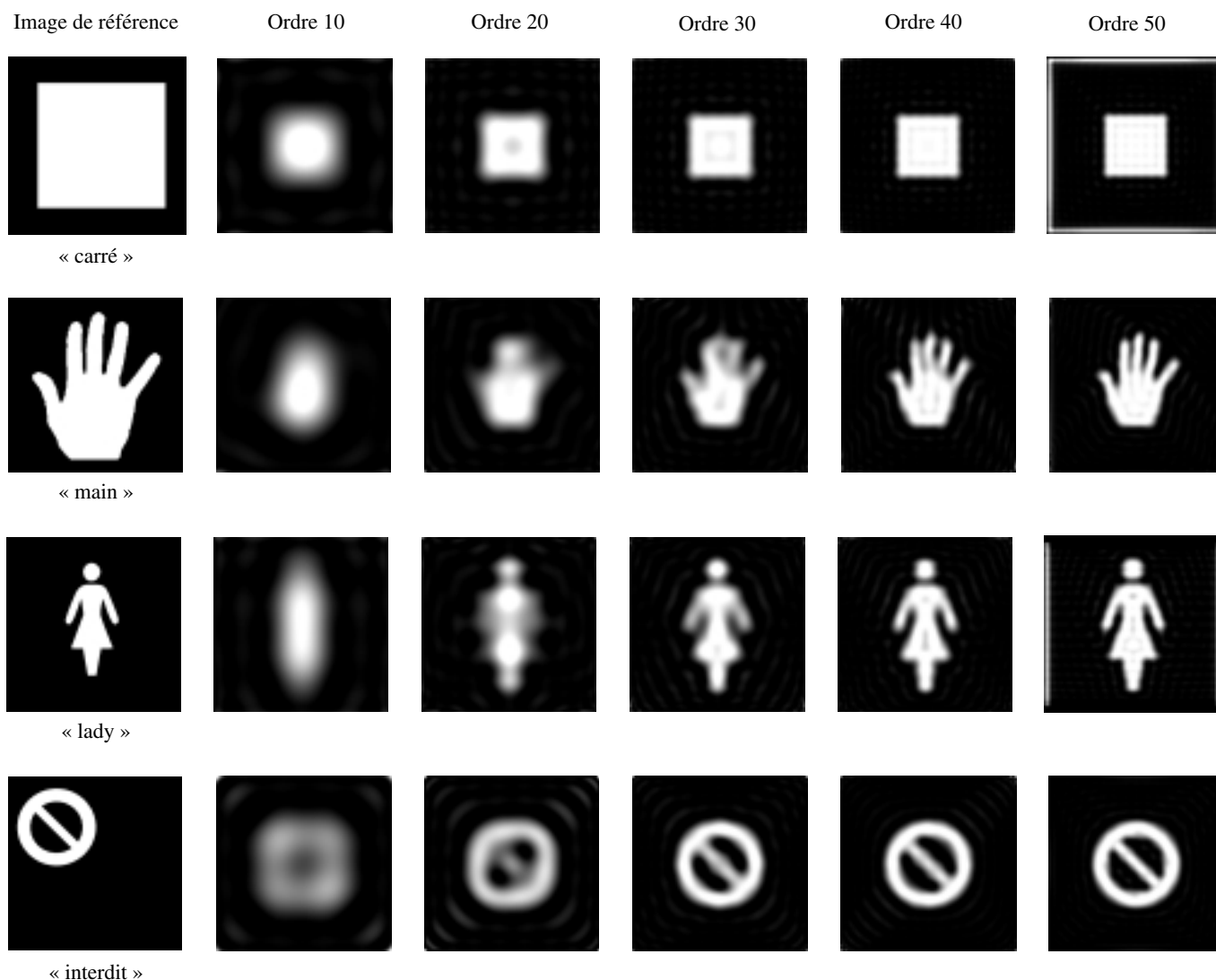


Figure 2. Reconstruction de formes à différents ordres. On peut constater l'invariance de la reconstruction à la position et à l'échelle de la forme de référence.

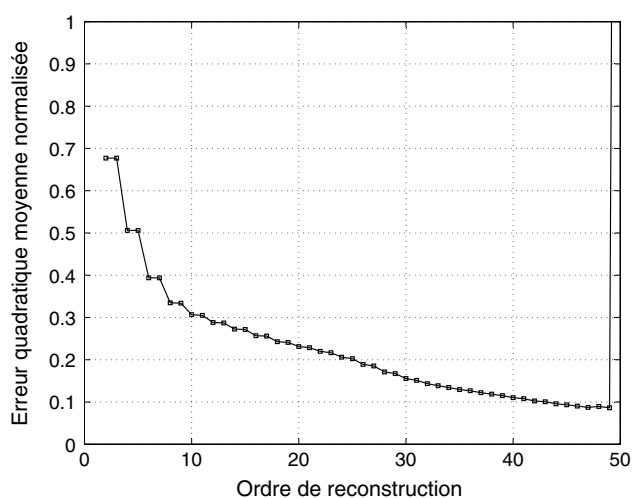


Figure 3. Erreur de reconstruction de l'image « lady ». À l'ordre 50, l'erreur (non visible sur le graphique avec cette échelle) vaut 5.13.

que l'image reconstruite. La figure 3 confirme pour l'objet « lady » l'amélioration constante de la qualité de la reconstruction avec l'augmentation du nombre de moments pris en compte, jusqu'à l'ordre 49. Au-delà de cet ordre, des instabilités apparaissent. Dans la pratique, nous nous servons de telles courbes pour déterminer l'ordre maximal pour la description d'un objet donné: pour tous ceux que nous avons étudiés, un ordre inférieur à 50 est suffisant. Des résultats similaires sont observés, par exemple, dans [30] pour des objets très complexes (caractères chinois).

### 2.5 Le descripteur de forme

Comme nous venons de le voir, on peut construire une description globale d'un objet à partir d'un nombre restreint de ses moments de Legendre. Nous « encodons » donc une forme par les  $((N + 1)(N + 2))/2$  premiers moments de sa fonction

caractéristique, calculables à partir des moments géométriques classiques centrés et normés à l'aide des relations (10) et (6). Nous les rangerons dans un vecteur appelé descripteur et noté  $\lambda_N$  ou plus simplement  $\lambda$ , l'ordre de troncature,  $N$ , n'apparaissant dans les calculs développés que si nécessaire.

### 3. Une contrainte géométrique globale pour les contours actifs orientés région

#### 3.1 Définition d'un *a priori* de forme à partir des moments de Legendre

Nous sommes capables « d'encoder » une forme, même à topologie complexe, à partir des moments de Legendre de sa fonction caractéristique. Notre objectif est d'imposer à un contour actif une contrainte de forme géométrique. Nous allons donc considérer le *snake* comme délimitant une forme (le domaine  $\Omega_{int}$ , cf. figure 1) et faire porter la contrainte sur celle-ci. Les moments de Legendre de la fonction caractéristique de la région intérieure au contour sont rangés dans le vecteur  $\lambda(\Omega_{int})$  que l'on notera plus simplement  $\lambda$ . Si l'on se donne une forme de référence dont le descripteur, noté  $\lambda^{ref}$ , est connu, on peut définir une énergie *d'a priori* de forme de la façon suivante :

$$J_{forme}(\Omega_{int}) = d(\lambda, \lambda^{ref}). \quad (14)$$

Dans cette définition, l'énergie associée à la région  $\Omega_{int}$ , donc au contour actif, est une distance  $d$  entre ses moments et ceux de la forme de référence. Minimiser cette énergie, c'est contraindre la forme définie par le *snake* à ressembler à la forme de référence. L'intérêt est que cette distance est basée sur un nombre réduit de paramètres, ne nécessite pas de mise en correspondance entre formes et bénéficie directement des invariances géométriques des descripteurs. Enfin, on en dérive relativement facilement une équation d'évolution pour le contour actif, comme nous allons le voir au paragraphe suivant.

#### 3.2 Dérivation de l'équation d'évolution du contour actif

Nous avons défini un *a priori* de forme pour un contour actif au moyen d'une fonctionnelle d'énergie. Classiquement, l'étape qui suit est le calcul des variations de cette fonctionnelle pour obtenir une équation d'évolution portant sur le contour. Nous nous sommes placés dans une approche région : l'énergie dépend de

la partition de l'image, en d'autres termes, on voit apparaître dans sa formulation des intégrales doubles au travers des moments  $\lambda_{p,q}(\Omega_{int})$ . Plusieurs techniques ont été développées pour résoudre ce problème de calcul variationnel. L'une des premières présentées fut celle de Zhu et Yuille [49] : les intégrales de surface sont transformées en intégrales portant sur le contour à l'aide du théorème de Stokes. Ensuite sont déduites les équations d'Euler Lagrange associées à cette énergie. Enfin, ces équations sont plongées dans un schéma dynamique du type *descente de gradient* et l'on obtient une équation d'évolution pour le contour. D'autres auteurs [4, 35] ont utilisé une approche basée sur les ensembles de niveaux. Dans ce cas, l'implantation algorithmique est fixée dès le départ.

##### 3.2.1 Définition et utilisation de la dérivée eulérienne

La méthode que nous nous proposons d'utiliser est équivalente à la première approche, comme démontré dans [1], mais plus simple à mettre en œuvre. Elle est basée sur la notion de dérivée de domaine, aussi appelée dérivée eulérienne, couramment utilisée en mécanique des milieux continus. L'introduction de ce formalisme est en grande partie liée aux travaux de Zolésio [15, 40]. En traitement d'images, il a été utilisé par Schnörr [36], pour le calcul du flot optique. Plus récemment, Jehan-Besson *et al.* [23] l'ont mis à profit pour définir un formalisme rigoureux de dérivation des équations d'évolution pour les contours actifs orientés région. Le principe général est simple : on cherche à dériver directement la fonctionnelle par rapport au domaine  $\Omega_{int}$ . Cette approche permet d'une part d'éviter les problèmes liés à la transformation des intégrales régions en intégrales frontières ; d'autre part, elle reste générique dans le sens où elle est indépendante du mode d'implantation choisi. Voici le théorème fondamental que nous allons utiliser :

**Théorème :** La dérivée eulérienne de la fonctionnelle  $F(\Omega(\tau)) = \iint_{\Omega(\tau)} k(\mathbf{x}, \Omega(\tau)) d\mathbf{x}$ , dans la direction  $\vec{V}$  est la suivante :

$$\delta_E(F(\Omega(\tau))) = \iint_{\Omega(\tau)} \frac{\partial k}{\partial \tau}(\mathbf{x}, \Omega(\tau)) d\mathbf{x} - \int_{\Gamma(\tau)} k(\mathbf{x}, \Omega(\tau)) \langle \vec{V}, \vec{N} \rangle ds, \quad (15)$$

où  $\mathbf{x}$  est la position dans le plan,  $\Omega(\tau)$  le domaine du plan qui évolue,  $\Gamma(\tau)$  la frontière de ce domaine,  $\vec{V}$  le champ de vecteur vitesse dans lequel  $\Omega(\tau)$  évolue et  $\vec{N}$  la normale unitaire à  $\Gamma(\tau)$  dirigée vers l'intérieur du domaine.

Le théorème traduit le principe de conservation pour un domaine matériel (que l'on suit dans son mouvement). Le domaine d'intégration variant avec le temps  $\tau$ , la dérivée de l'intégrale prend en compte le mouvement du domaine matériel, ce qui est exprimé par l'intégrale sur le contour qui apparaît dans le second membre de l'égalité, en plus de la variation de  $k$  sur le domaine.

3.2.2 Application à la dérivation de notre *a priori* où  $d$  est la distance quadratique

Nous allons maintenant dériver l'expression (14) à l'aide du théorème présenté ci-dessus. Nous choisissons de prendre la distance quadratique pour  $d$ , mais les développements peuvent se généraliser à des fonctions non quadratiques comme les fonctions  $\varphi$  utilisées dans [23]. La fonctionnelle à dériver est dans notre cas :

$$J_{forme}(\Omega_{int}(\tau)) = \|\lambda(\Omega_{int}(\tau)) - \lambda^{ref}\|^2. \quad (16)$$

Nous présentons ci-dessous (17) la première étape de dérivation de la fonctionnelle  $J_{forme}$ . *In fine*, nous dérivons par rapport aux moments géométriques centrés normés (équation (10)). Nous n'utilisons ici que les propriétés de dérivation des fonctions composées.

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{forme}}{\partial \tau} &= \sum_{p,q}^{p+q \leq N} \frac{\partial(\lambda_{p,q} - \lambda_{p,q}^{ref})^2}{\partial \lambda_{p,q}} \cdot \left( \sum_{u,v}^{u,v \leq N} \frac{\partial \lambda_{p,q}}{\partial \eta_{u,v}} \cdot \delta_E(\eta_{u,v}) \right) \\ &= 2 \sum_{p,q}^{p+q \leq N} (\lambda_{p,q} - \lambda_{p,q}^{ref}) \cdot C_{pq} \sum_{u,v}^{u \leq p, v \leq q} a_{pu} a_{qv} \cdot \delta_E(\eta_{u,v}). \end{aligned} \quad (17)$$

Les coefficient  $a_{ij}$  sont définis pour  $j \leq i$  (équation (10)), mais on peut étendre leur définition en posant  $a_{ij} = 0$  si  $j > i$ , ce qui permet d'étendre la somme sur  $u, v$  à  $u + v \leq N$ , d'échanger les sommes et finalement, d'écrire :

$$\frac{\partial J_{forme}}{\partial \tau} = \sum_{u,v}^{u+v \leq N} A_{uv} \cdot \delta_E(\eta_{u,v}), \quad (18)$$

avec :

$$A_{uv} = 2 \sum_{p,q}^{p+q \leq N} (\lambda_{p,q} - \lambda_{p,q}^{ref}) \cdot C_{pq} a_{pu} a_{qv}. \quad (19)$$

Nous calculons maintenant la dérivée eulérienne des moments  $\eta_{u,v}$  que nous avons définis avec l'équation (6). Pour cela, introduisons la fonction :

$$H_{uv}(x, y, \Omega_{int}) = \frac{(x - \bar{x})^u (y - \bar{y})^v}{|\Omega_{int}|^{(u+v+2)/2}}. \quad (20)$$

Une première application du théorème nous permet alors d'écrire :

$$\begin{aligned} \delta_E(\eta_{u,v}) &= \iint_{\Omega_{int}} \frac{\partial}{\partial \tau} H_{uv}(x, y, \Omega_{int}) dx dy \\ &\quad - \int_{\Gamma} H_{uv}(x, y, \Omega_{int}) \langle \vec{V}, \vec{N} \rangle ds. \end{aligned} \quad (21)$$

Dans cette expression,  $H_{uv}$  dépend encore de  $\Omega_{int}$ , donc de  $\tau$ . Pour faire apparaître cette dépendance nous écrivons :

$$H_{uv}(x, y, \Omega_{int}) = \frac{(x - K_1/K_3)^u (y - K_2/K_3)^v}{K_3^{(u+v+2)/2}}, \quad (22)$$

où :

$$\begin{aligned} K_1(\Omega_{int}) &= \iint_{\Omega_{int}} L_1 dx dy & K_2(\Omega_{int}) &= \iint_{\Omega_{int}} L_2 dx dy \\ K_3(\Omega_{int}) &= \iint_{\Omega_{int}} L_3 dx dy, \end{aligned}$$

avec :

$$L_1 = x \quad L_2 = y \quad L_3 = 1. \quad (24)$$

Avec ces notations, nous pouvons écrire, en utilisant de nouveau les règles de composition :

$$\frac{\partial H_{uv}}{\partial \tau} = \frac{\partial H_{uv}}{\partial K_1} \cdot \delta_E(K_1) + \frac{\partial H_{uv}}{\partial K_2} \cdot \delta_E(K_2) + \frac{\partial H_{uv}}{\partial K_3} \cdot \delta_E(K_3). \quad (25)$$

Le calcul des  $\partial H_{uv}/K_{1,2,3}$  est direct. Il est détaillé en annexe. Nous utilisons une seconde fois le théorème pour le calcul des dérivées eulérienne des fonction  $K_{1,2,3}$ . Les intégrandes  $L_{1,2,3}$  ne dépendant plus de  $\Omega_{int}$ , nous obtenons simplement :

$$\delta_E(K_i) = - \int_{\Gamma} L_i \langle \vec{V}, \vec{N} \rangle ds \quad i = 1, \dots, 3. \quad (26)$$

Il nous faut maintenant « remonter la chaîne » pour obtenir l'expression de  $\delta_E(\eta_{u,v})$ . En intégrant l'équation (25) nous avons :

$$\iint_{\Omega_{int}} \frac{\partial H_{uv}}{\partial \tau} dx dy = \iint_{\Omega_{int}} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial H_{uv}}{\partial K_i} \cdot \delta_E(K_i) dx dy, \quad (27)$$

et en y reportant l'équation (26), on obtient :

$$\iint_{\Omega_{int}} \frac{\partial H_{uv}}{\partial \tau} dx dy = - \int_{\Gamma} \left\{ \sum_{i=1}^3 B_{uvi} \cdot L_i \right\} \langle \vec{V}, \vec{N} \rangle ds, \quad (28)$$

avec :

$$B_{uvi} = \iint_{\Omega_{int}} \frac{\partial H_{uv}}{\partial K_i} dx dy \quad i = 1, \dots, 3. \quad (29)$$

L'expression des coefficients  $B_{uvi}$  est donnée en annexe. Si l'on reporte (28) dans (21), nous avons :

$$\delta_E(\eta_{uv}) = - \int_{\Gamma} \left( H_{uv} + \sum_{i=1}^3 B_{uvi} \cdot L_i \right) \langle \vec{V}, \vec{N} \rangle ds. \quad (30)$$

Enfin, nous exprimons la dérivée de notre *a priori* à partir de (30) et (18) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{forme}}{\partial \tau} &= \\ &= - \int_{\Gamma} \left\{ \sum_{u,v}^{u+v \leq N} A_{uv} \cdot \left( H_{uv} + \sum_{i=1}^3 B_{uvi} \cdot L_i \right) \right\} \langle \vec{V}, \vec{N} \rangle ds. \end{aligned} \quad (31)$$



Ainsi, en utilisant les propriétés élémentaires de dérivation de fonctions composées et en appliquant à deux reprises le théorème fondamental donné par (15), nous sommes parvenus à exprimer les variations de la fonctionnelle *a priori*, par l'équation (31). La plus grande décroissance du critère  $J_{forme}$  est donc obtenue en choisissant comme champ vectoriel d'évolution :

$$\begin{aligned} \vec{V}_{forme}(x,y,\Omega_{int}) & \\ = \underbrace{\sum_{u,v}^{u+v \leq N} A_{uv} \cdot \left( H_{uv}(x,y,\Omega_{int}) + \sum_{i=1}^3 B_{uvi} \cdot L_i(x,y) \right)}_{V_{forme}} \cdot \vec{N}, & (32) \end{aligned}$$

où  $H_{uv}$  est donné par (20),  $L_{1,2,3}$  sont donnés par (24),  $A_{uv}$  est donné par (19) et  $B_{uv1}$ ,  $B_{uv2}$  et  $B_{uv3}$  sont donnés respectivement en annexes par (50), (51) et (52). L'équation d'évolution du contour actif qui fait décroître  $J_{forme}$  s'écrit enfin :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \tau} = V_{forme}(x,y,\Omega_{int}) \cdot \vec{N}. \quad (33)$$

Notons que l'on a convergence vers un point stationnaire, la fonctionnelle n'étant pas convexe en général.

### 3.3 Une autre proposition d'*a priori*

À partir des moments Legendre, il est possible de construire d'autres exemples d'*a priori* et de les dériver grâce au formalisme général de dérivation eulérienne expliqué précédemment. Notamment, nous avons proposé dans [17, 18] l'énergie suivante :

$$\tilde{J}_{forme}(\Omega_{int}(\tau)) = \iint_{\Omega_{int}} \|\lambda(\Omega_{int}(\tau)) - \lambda^{ref}\|^2 dx dy. \quad (34)$$

Cette énergie  $\tilde{J}_{forme}$  est construite en intégrant  $J_{forme}$  définie par (16) sur le domaine  $\Omega_{int}$ . Remarquant que  $J_{forme}$  ne dépend pas des coordonnées  $(x,y)$ , nous pouvons aussi écrire :

$$\tilde{J}_{forme}(\Omega_{int}(\tau)) = |\Omega_{int}| \cdot J_{forme}(\Omega_{int}(\tau)). \quad (35)$$

Notons qu'on retrouve cette technique d'intégration d'un descripteur global (*i.e.* qui ne dépend pas de la position dans l'espace) dans [23], dans le cas de fonctions de la variance. Calculons maintenant la vitesse qui fait évoluer le contour vers le minimum de ce nouveau critère :

$$\delta_E(\tilde{J}_{forme}) = \frac{\partial J_{forme}}{\partial \tau} \cdot |\Omega_{int}| + J_{forme} \cdot \delta_E(|\Omega_{int}|). \quad (36)$$

Le calcul de la dérivée eulérienne de  $|\Omega_{int}|$  est immédiat :

$$\delta_E(|\Omega_{int}|) = \delta_E \left( \iint_{\Omega_{int}} 1 \cdot dx dy \right) = - \int_{\Gamma} \langle \vec{V} \cdot \vec{N} \rangle ds. \quad (37)$$

Nous obtenons donc finalement :

$$\tilde{V}_{forme} = V_{forme} \cdot |\Omega_{int}| + J_{forme}. \quad (38)$$

Ce résultat aurait également pu être obtenu en reprenant directement l'algorithme de dérivation proposé dans [23]. La nouvelle vitesse obtenue pour le contour actif est constituée de deux termes : le premier peut être considéré comme une « renormalisation » de la vitesse  $V_{forme}$  obtenue précédemment, le second comme une force ballon « adaptative ». La force ballon, introduite par Cohen [8], est classiquement utilisée pour améliorer les propriétés de convergence de contours actifs. Siddiqi [38] montre notamment que cette force permet à une courbe de développer des singularités et assure, dans certains cas, une meilleure adéquation du contour à la forme de l'objet à segmenter. Il s'agit classiquement d'une force constante associée à la minimisation de l'aire intérieur au contour. Ici, nous qualifions cette force ballon d'« adaptative » car  $J_{forme} = \|\lambda(\Omega_{int}(\tau)) - \lambda^{ref}\|^2$  est constante le long du contour à chaque instant mais décroît à mesure que le contour prend la forme de l'objet de référence. Une discussion sur les avantages et inconvénients présentés par cet *a priori* sera faite dans la partie expérimentale.

## 4. Résultats expérimentaux

### 4.1 Mise en œuvre informatique

Tout le formalisme présenté jusqu'à présent a été développé indépendamment du mode d'implantation algorithmique, ce qui rend notre modèle très général. Des approches paramétriques, rapides, basées sur des discrétisations par des splines ou des approximations polygonales et incluant des procédures particulières de gestion de la topologie, pourraient être utilisées [16, 31, 34]. Nous avons pour notre part mis en œuvre l'équation d'évolution par la méthode des courbes de niveaux [32, 37] qui permet de gérer naturellement les changements de topologie. Nous avons ainsi la possibilité d'introduire des contraintes sur des formes complexes (d'un point de vue topologique) comme celles présentées sur la figure 2. Cette représentation du contour actif est par ailleurs très utilisée pour les approches régions car elle permet de repérer automatiquement les régions  $\Omega_{int}$  et  $\Omega_{ext}$  en considérant simplement le signe de la fonction hôte.

D'un point de vue pratique, nous avons développé une grande partie de notre code en Matlab®. Pour les parties difficilement vectorisables nous avons écrit des bibliothèques dynamiques en C standard. La technique de la bande étroite a été retenue pour améliorer les performances du système en termes de rapidité d'exécution. Enfin la réinitialisation périodique de la fonction hôte a été effectuée selon l'équation proposée par Sussman *et al.* dans [42]. Pour toutes les expériences présentées dans cet article,

les moments des formes de référence ont été calculés sur des images de taille  $512 \times 512$ . Le repérage du contour, *i.e.* de la courbe de niveau zéro, est effectué à la résolution de l'image. La convergence du contour est détectée quand celui-ci n'évolue plus où lorsque qu'il oscille de manière périodique. Les simulations ont été effectuées sur une plate-forme de type PC équipé d'un microprocesseur Pentium® III cadencé à 864 MHz. Comme on pourra le constater, les temps de simulations sont relativement importants. Cependant précisons ici que le calcul des moments n'a pas été optimisé, puisque les intégrales sont calculées par sommation sur tout le domaine considéré. Des performances supérieures pourraient être obtenues en utilisant le théorème de Green comme cela a été proposé, par exemple, dans [47].

## 4.2 Évolution de contours actifs contraints géométriquement

Pour illustrer la capacité de notre *a priori*  $J_{forme}$  à contraindre géométriquement un contour actif, nous présentons figure 4 un exemple d'évolutions successives entre plusieurs formes de topologies différentes. Nous avons choisi pour courbe initiale  $\Gamma$  un carré. Puis nous avons fait évoluer cette courbe selon l'équation (33) en prenant tout d'abord comme forme de référence la « main » présentée figure 2 et en faisant porter la contrainte sur les moments jusqu'à l'ordre 40. Une étape intermédiaire de cette évolution est présentée dans la première colonne et la courbe finale (lorsqu'on a atteint la convergence) est présentée dans la deuxième colonne. À partir de ce résultat, nous avons rajouté les moments jusqu'à l'ordre 48 et à convergence, on obtient l'image de la troisième colonne. Cette dernière configuration du contour a servi de nouveau contour initial pour refaire l'expérience en prenant cette fois l'objet « lady » comme référence, puis enfin de la même manière l'objet « interdit ». On remarque que pour l'objet « main » une description à l'ordre 40 suffit, tandis que dans les deux autres cas l'ajout de moments d'ordre supérieur améliore la qualité de la régularisation géométrique, autrement dit de l'adéquation à la forme de référence. La dimension de l'image dans laquelle nous avons fait évoluer le contour est de  $256 \times 256$ . Les temps de calculs d'une image initiale jusqu'à la convergence à l'ordre 40 sont de 31, 25 et 34 minutes et lors de la seconde étape (jusqu'à l'ordre 48) de 7, 10 et 7 minutes. Cette simulation montre que l'*a priori* que nous avons défini plus haut permet bien de contraindre un contour actif à prendre une forme donnée (connue comme référence). On peut également constater que nous sommes capables de gérer des formes à géométrie non triviale et notamment des concavités, de fortes courbures locales ou encore des topologies complexes : objet non contractile comme « interdit », ou non connexe comme « lady ».

## 4.3 Application au problème de segmentation

### 4.3.1 Critère utilisé

L'expérience précédente montre la capacité de notre *a priori* géométrique à contraindre une courbe en évolution à ressembler

à une forme de référence. Nous nous intéressons maintenant au problème plus général de la segmentation. Pour définir le terme d'attache aux données, nous utilisons l'approche région, qui a montré son efficacité dans ce type d'application [4, 49]. De plus, cela nous permet de conserver un formalisme unifié dans la définition de l'énergie et, par conséquent, d'utiliser les mêmes résultats théoriques pour la dérivation de l'équation d'évolution. Plusieurs formes d'énergies ont été proposées dans la littérature. Elles sont généralement basées sur des attributs tels que la moyenne ou la variance des régions, ou encore sur une modélisation, paramétrique ou non (fenêtres de Parzen), de leur distribution de probabilité. Pour plus de précision sur ces approches, le lecteur est invité à se référer à [7, 22, 27, 28, 46]. Notre propos étant d'illustrer les capacités de la nouvelle contrainte de forme, nous choisissons une énergie d'attache aux données « classique » :

$$J_{donnees}(\Omega_{int}, \Omega_{ext}) = \int \int_{\Omega_{int}} (I(x, y) - \mu_{int})^2 dx dy + \int \int_{\Omega_{ext}} (I(x, y) - \mu_{ext})^2 dx dy, \quad (39)$$

où  $\mu_{int}$  (resp.  $\mu_{ext}$ ) est la moyenne du domaine  $\Omega_{int}$  (resp.  $\Omega_{ext}$ ) et  $I(x, y)$  est la valeur de l'intensité du pixel. Ce critère introduit par Chan *et al.* dans [4] a été étudié par de nombreux auteurs. On suppose ici que l'image à segmenter est bimodale et consiste en deux régions d'intensités approximativement constantes. Pour dériver ce critère, Chan *et al.* se sont placés dans le formalisme courbes de niveaux en utilisant la fonction de Heaviside pour réécrire les intégrales régions, puis ils ont classiquement dérivé les équations d'Euler Lagrange. Jehan-Besson *et al.* dans [23] ont retrouvé ces résultats à partir du théorème de la dérivée eulérienne. L'équation d'évolution qui minimise ce critère est la suivante :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \tau} = \underbrace{((I(x, y) - \mu_{in})^2 - (I(x, y) - \mu_{out})^2)}_{V_{donnees}} \cdot \vec{\mathcal{N}}. \quad (40)$$

L'énergie globale est alors définie comme la somme pondérée :

$$J(\Omega_{int}, \Omega_{ext}) = J_{donnees}(\Omega_{int}, \Omega_{ext}) + \alpha J_{forme}(\Omega_{int}), \quad (41)$$

qui conduit finalement à l'équation d'évolution :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \tau} = (V_{donnees}(x, y, \Omega_{int}, \Omega_{ext}) + \alpha V_{forme}(x, y, \Omega_{int})) \vec{\mathcal{N}}, \quad (42)$$

où  $V_{forme}$  est donnée par (32) et  $V_{donnees}$  est donnée par (40). Le coefficient  $\alpha$  est un scalaire réel positif qu'il faudra choisir pour pondérer les influences relatives du critère d'attache aux données et du critère *d'a priori*. Dans la pratique, il sera appliqué après normalisation des vitesses  $V_{forme}$  et  $V_{donnees}$  entre  $-1$  et  $1$ .

### 4.3.2 Segmentation d'une image synthétique

Nous expérimentons dans un premier temps (figure 5) notre algorithme de segmentation sur une image synthétique, compo-

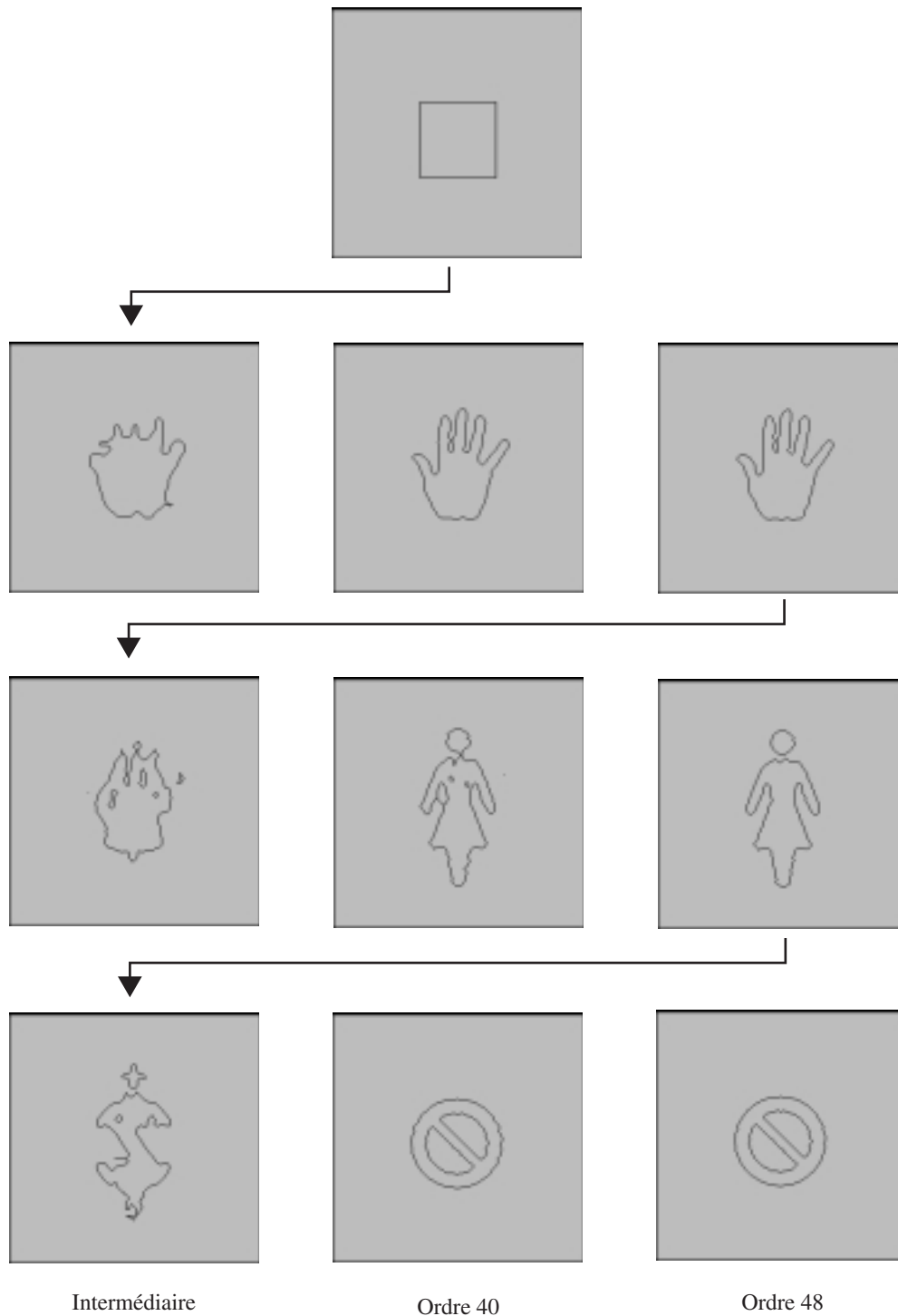


Figure 4. Évolution d'un contour actif contraint géométriquement en trois étapes successives (voir texte)  
L'a priori utilisé ici est  $J_{forme}$ .

sée d'un objet en forme de croix partiellement recouvert par un disque. Nous faisons d'abord évoluer la courbe sans *a priori*, jusqu'à convergence. Partant de ce résultat, nous utilisons le modèle complet (42) en incorporant une contrainte sur les moments jusqu'à l'ordre 20, puis 40 lorsque la convergence est obtenue à l'ordre 20. Le coefficient  $\alpha$  (voir équation (42)) vaut ici 5. Comme on peut le constater, le critère complet permet de retrouver la croix recherchée, malgré l'occultation. Ce schéma

de minimisation de l'énergie en deux étapes est également utilisé dans [11]. On peut considérer que le premier résultat obtenu sans *a priori* fournit une bonne initialisation pour la minimisation de l'énergie totale. Cela présente deux intérêts. D'une part, le système est moins sensible au réglage des paramètres, à savoir l'influence relative du terme d'attache aux données par rapport à celui de régularisation géométrique; d'autre part, on diminue les temps de traitement de l'image car ce sont les cal-

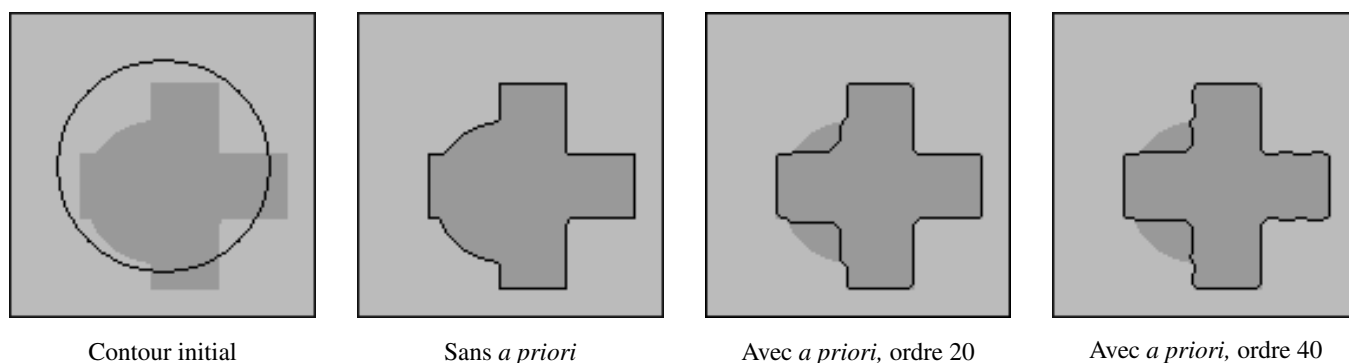


Figure 5. Segmentation d'un objet synthétique présentant une occultation.

culs des moments et des forces qui en dérivent qui sont les plus coûteux. L'image réelle présentée ci-dessus ( $128 \times 128$  pixels) a été traitée en 14 minutes au total, se décomposant comme suit : 1 minute pour l'évolution sans *a priori*, 3 minutes pour contraindre le contour jusqu'à l'ordre 20 et enfin 11 minutes pour affiner le résultat à l'ordre 40.

#### 4.3.3 Segmentation d'un objet topologiquement simple sur image réelle

Nous considérons maintenant le cas d'une image réelle de taille  $250 \times 250$ . Dans cette image, nous avons en premier plan un objet clair (« lapin ») sur un fond texturé plus sombre. Cet objet présente de plus une occultation partielle engendrée artificiellement par un rectangle dont le niveau de gris est intermédiaire entre celui du fond et celui de l'objet. Les résultats des segmentations sont présentées sur la figure 6. À partir de l'initialisation du contour (en haut et à gauche), nous commençons par minimiser l'énergie d'attache aux données (39) à laquelle nous ajoutons un terme élastique de courbure. Cela revient à minimiser un critère qui correspond à la fonctionnelle de Mumford-Shah dans sa *cartoon limit* comme dans [11, 14]. Le résultat de cette première étape de segmentation sans *a priori* est donné en haut et à droite sur la figure. Il est obtenu en 121 itérations et 6 minutes de calculs. Nous notons une grande sensibilité au fond texturé, notamment les livres présents au niveau des oreilles du lapin, ainsi qu'aux occultations dues aux doigts et au rectangle artificiel. À partir de ce résultat nous menons deux simulations en parallèle. Nous prenons pour initialisation l'image partiellement segmentée sans aucun *a priori*. Puis nous remplaçons le terme de courbure dans un cas par  $\tilde{J}_{forme}$  et dans l'autre par  $J_{forme}$ . Nous faisons donc évoluer le contour selon (42) en prenant respectivement  $\tilde{V}_{forme}$  pour la première simulation et  $V_{forme}$  pour la seconde. Nous commençons par introduire une contrainte à l'ordre 20 avec  $\alpha = 1$ , puis, à convergence nous passons à l'ordre à 30, toujours avec  $\alpha = 1$ . Enfin, nous affinons le résultats à l'ordre 40 avec cette fois  $\alpha = 2$ . Les temps de calculs associés à ces deux simulations sont présentés dans le tableau 1. Comme on peut le constater pour les 3 étapes successives, la convergence est obtenue plus rapidement avec  $\tilde{J}_{forme}$ . Le résultat

final de la segmentation pour chacune des deux simulations est présenté dans la colonne de droite, ligne du milieu et ligne du bas, de la figure 6. Dans les deux cas, le lapin est bien détecté. Dans la colonne de gauche nous montrons une image intermédiaire de l'étape 1, il s'agit de la vingtième itération après introduction de l'*a priori* à l'ordre 20. En observant attentivement ces deux images, nous pouvons remarquer qu'au niveau des doigts, le contour est plus éloigné de la position désirée avec  $J_{forme}$ . Cette perturbation est moins importante avec  $\tilde{J}_{forme}$  du fait de la présence dans le critère d'une force ballon « adaptative » (cf. paragraphe 3.3) qui tend à minimiser l'aire à l'intérieur du contour. Le critère  $\tilde{J}_{forme}$  est donc intéressant pour augmenter la vitesse de convergence dans le cas d'une évolution en contraction. À l'inverse dans le cas d'une expansion du contour, la force ballon s'opposant naturellement à ce type d'évolution, le choix du coefficient  $\alpha$  sera plus difficile et le système moins stable. Par ailleurs, l'influence de cette force ballon n'est pas gérée indépendamment mais elle est pondérée, comme l'*a priori*, par  $\alpha$ . Aussi, en fonction du type d'application, on choisira l'un ou l'autre des *a priori*. Notons cependant que  $\tilde{J}_{forme}$  introduit un biais vers une solution dégénérée qui est le domaine d'aire nulle. Dans la suite des expérimentations, nous utiliserons  $J_{forme}$ .

Tableau 1. Temps de calculs pour l'expérience de segmentation du lapin (implantation sous Matlab®, PC 864MHz).

	<i>a priori</i> $\tilde{J}_{forme}$	<i>a priori</i> $J_{forme}$
étape 1 : ordre 20, $\alpha = 1$	64 itérations (9 minutes)	71 itérations (10 minutes)
étape 2 : ordre 30, $\alpha = 1$	17 itérations (5 minutes)	54 itérations (13 minutes)
étape 3 : ordre 40, $\alpha = 2$	17 itérations (7 minutes)	23 itérations (10 minutes)

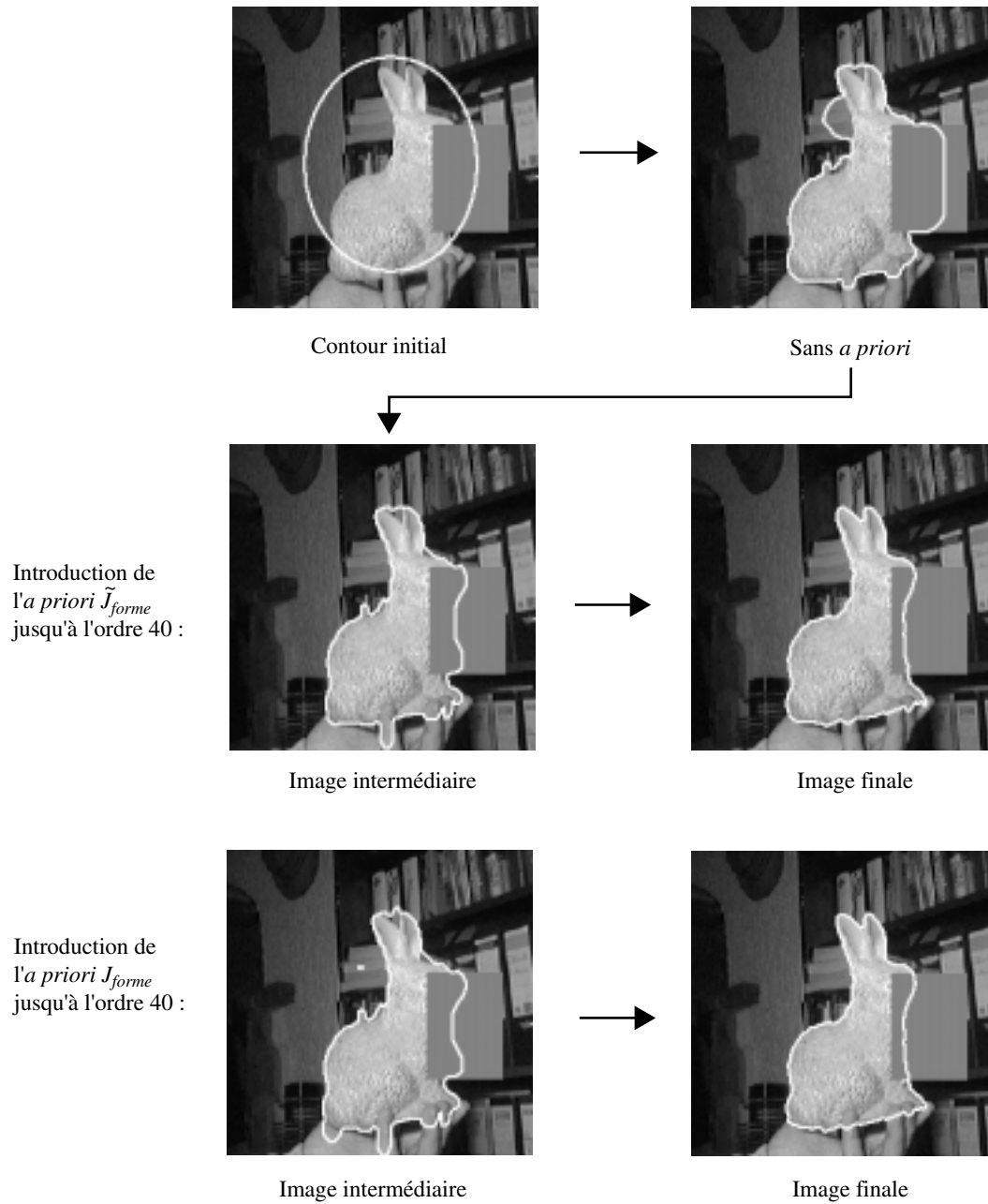
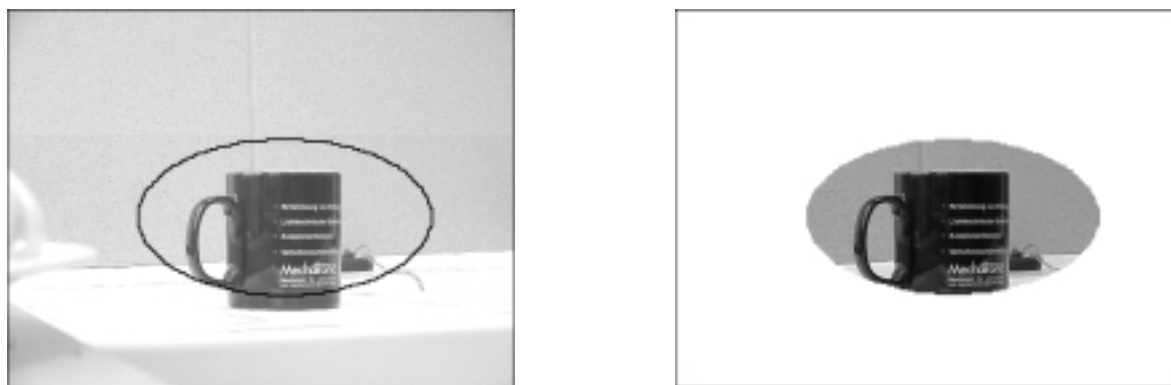


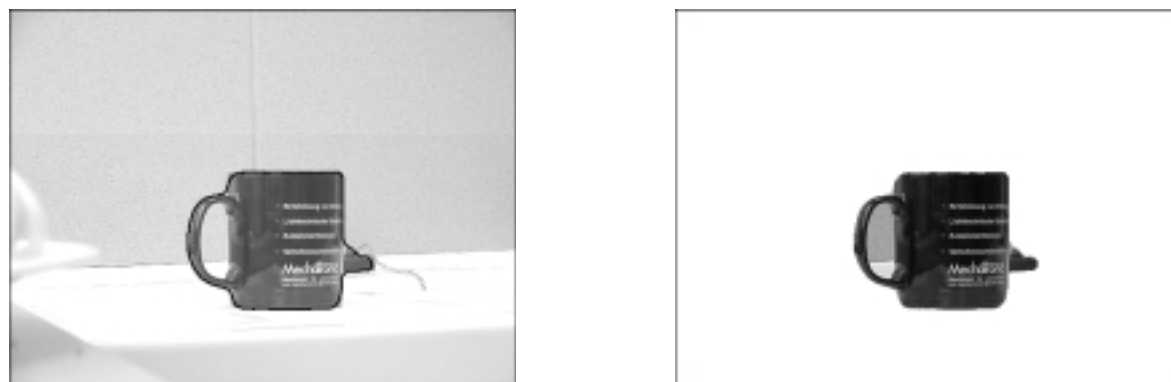
Figure 6. Segmentation sur une image réelle (image test : avec l'aimable autorisation de D. Cremers). Les contours sont doublés pour faciliter la visualisation.



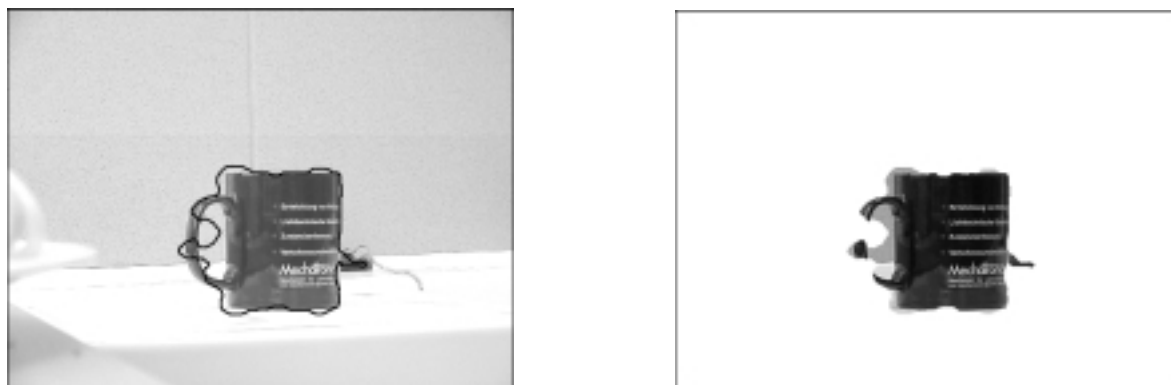
Figure 7. Forme « tasse » de référence (à gauche) et image réelle à segmenter (à droite).



(a) Position du contour initial



(b) Résultat de segmentation sans *a priori*, 138 itérations, 18 minutes



(c) Introduction de l'*a priori* à l'ordre 20 ( $\alpha = 4$ ), image intermédiaire après 15 itérations

Figure 8. Segmentation d'un objet à topologie complexe (1). Les contours sont doublés pour faciliter la visualisation.

#### 4.3.4 Segmentation d'un objet à topologie complexe

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à la segmentation d'un objet dont la topologie n'est pas triviale. Il s'agit d'une tasse, dont la forme de référence est donnée figure 7. L'image à segmenter d'une taille  $512 \times 384$  est également présentée sur la figure 7. Nous choisissons d'initialiser le contour autour de la tasse (voir figure 8 (a)) ceci afin de mettre en évidence un problème classique des contours actifs qui est leur sensibilité à l'initialisation. Pour des raisons de lisibilité, nous présentons

(à gauche) la courbe en superposition sur une version éclaircie de l'image et (à droite) le contenu de la région  $\Omega_{int}$  associée. Nous faisons évoluer le contour sans *a priori* avec seulement un terme d'élasticité pour régulariser et nous obtenons le résultat montré figure 8 (b). Nous remarquons d'une part que le contour englobe le bouchon d'évier situé à droite de la tasse, ce qui est normal puisque son intensité moyenne est proche de celle de la tasse. D'autre part, l'anse de la tasse n'a pas été correctement segmentée, bien que le fond clair apparaisse à l'intérieur de cette dernière. Ceci est dû à la position choisie initialement pour le



(d) Image intermédiaire après 25 itérations



(e) Segmentation finale obtenue avec l'*a priori* à l'ordre 20, 72 itérations, 19 minutes



(f) Segmentation finale après affinement à l'ordre 45,  $\alpha = 20$ , 7 itérations, 6 minutes

Figure 9. Segmentation d'un objet à topologie complexe (2). Les contours sont doublés pour faciliter la visualisation.

contour. À l'évidence, la partition de l'image réalisée ne correspond pas au minimum global de l'énergie  $J_{donnees}$ . L'introduction de l'*a priori*  $J_{forme}$  à l'ordre 20 permet, comme on peut le constater sur les figures 8 (c), 9 (d) et 9 (e), de s'affranchir du leurre constitué par le bouchon et surtout, il permet de retrouver la forme exacte de la tasse en modifiant la topologie du contour. L'utilisation de  $J_{forme}$  permet donc, outre de gérer les problèmes d'occultation ou de fond texturé, de rendre

le processus de segmentation moins sensible aux conditions d'initialisation. Un dernier exemple de segmentation est donné figure 10. Il s'agit encore une ici de retrouver la tasse dans l'image mais cette fois elle est partiellement occultée par un objet (une autre tasse). Nous obtenons un résultat de segmentation satisfaisant en choisissant exactement les mêmes paramètres que dans l'expérience précédente (sans occultation).



(a) Position du contour initial



(b) Résultat de segmentation sans *a priori*



(c) Segmentation finale obtenue avec l'*a priori* à l'ordre 20 ( $\alpha = 4$ )



(d) Segmentation finale après affinement à l'ordre 45 ( $\alpha = 20$ )

Figure 10. Segmentation d'un objet à topologie complexe occulté. Les contours sont doublés pour faciliter la visualisation.



## Conclusion

Dans cet article, nous avons présenté une nouvelle approche permettant de contraindre l'évolution d'un contour actif vers une forme de référence. Cette approche utilise une représentation paramétrique globale de la courbe et de la forme de référence. Les descripteurs sont obtenus par projection de la fonction caractéristique binaire des formes sur des bases de fonctions orthogonales, à support global sur le domaine image. Nous obtenons ainsi une représentation hiérarchique de formes éventuellement complexes, par un nombre restreint de paramètres. Ces descripteurs peuvent être facilement rendus invariants à certaines transformations géométriques. Nous avons développé ici le cas particulier des moments de Legendre, calculés à partir de moments géométriques centrés et normés, invariants par translation et mise à l'échelle. L'invariance par rotation pourrait s'envisager en utilisant soit d'autres bases de polynômes, soit des invariants définis à partir des moments, comme ceux de Hu, par exemple [21]. L'approche proposée consiste ensuite à définir *a priori* de forme comme une distance entre les descripteurs respectifs du contour actif et de la forme de référence. Cette dis-

tance hérite naturellement des capacités d'invariance du modèle, ne nécessite pas de mise en correspondance et permet, grâce à un formalisme rigoureux [1, 23] de dériver simplement l'équation d'évolution du contour actif. Celle-ci est indépendante de l'implantation choisie. Cependant, pour peu que l'algorithme le gère, notre approche permet au contour actif de changer de topologie en cours d'évolution. Les expériences proposées ont montré sa capacité à améliorer les résultats de segmentation en présence de fonds texturés et d'occultation partielle de l'objet d'intérêt. La distance entre descripteurs utilisée ici est quadratique, mais des extensions à d'autres distances (robustes) sont envisageables. Nos travaux actuels portent sur la prise en compte de variabilités complexes à l'aide de ce type de modèle.

## Remerciements

Ce travail est soutenu par une bourse de thèse du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées.

Les auteurs remercient D. Cremers pour la fourniture de l'image originale contenant l'objet « lapin » utilisée pour les tests.

## Annexe : Calcul des coefficients $B_{uv1}$ , $B_{uv2}$ et $B_{uv3}$

Rappel, on a :

$$H_{u,v}(K_1, K_2, K_3) = \frac{(x - K_1/K_3)^u (y - K_2/K_3)^v}{K_3^{(u+v+2)/2}}$$

Nous calculons pour commencer les dérivées partielles de  $H$  par rapport à  $K_1$ ,  $K_2$  et  $K_3$  :

$$\frac{\partial H_{uv}}{\partial K_1} = \frac{\partial}{\partial K_1} \left( \frac{(x - \frac{K_1}{K_3})^u (y - \frac{K_2}{K_3})^v}{K_3^{\frac{(u+v+2)}{2}}} \right) = -\frac{1}{K_3} \cdot u \cdot \frac{(x - \frac{K_1}{K_3})^{u-1} (y - \frac{K_2}{K_3})^v}{K_3^{\frac{(u+v+2)}{2}}} \quad (43)$$

$$\frac{\partial H_{uv}}{\partial K_1} = -\frac{u}{K_3^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{(x - \bar{x})^{u-1} (y - \bar{y})^v}{K_3^{\frac{((u-1)+v+2)}{2}}} \quad (43)$$

Le calcul de  $\partial H_{uv}/\partial K_2$  est identique (permutation sur  $x$  et  $y$ ,  $u$  et  $v$ ). Nous obtenons :

$$\frac{\partial H_{uv}}{\partial K_2} = -\frac{v}{K_3^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{(x - \bar{x})^u (y - \bar{y})^{v-1}}{K_3^{\frac{((u-1)+v+2)}{2}}} \quad (45)$$

Le calcul de  $\partial H_{uv}/\partial K_3$  est, quant à lui, un peu plus fastidieux. Nous le développons ici :

$$\frac{\partial H_{uv}}{\partial K_3} = \frac{\partial}{\partial K_3} \left( \frac{(x - \frac{K_1}{K_3})^u (y - \frac{K_2}{K_3})^v}{K_3^{\frac{(u+v+2)}{2}}} \right) \quad (46)$$

$$= \frac{\left(u \cdot \frac{K_1}{K_3} \left(x - \frac{K_1}{K_3}\right)^{u-1} \left(y - \frac{K_2}{K_3}\right)^v + v \cdot \frac{K_2}{K_3} \left(x - \frac{K_1}{K_3}\right)^u \left(y - \frac{K_2}{K_3}\right)^{v-1}\right) K_3^{\frac{(u+v+2)}{2}} - \left(\left(x - \frac{K_1}{K_3}\right)^u \left(y - \frac{K_2}{K_3}\right)^v\right) K_3^{\frac{(u+v)}{2}} \cdot \left(\frac{u+v+2}{2}\right)}{K_3^{(u+v+2)}} \quad (47)$$

$$= \frac{u \cdot \frac{\bar{x}}{K_3} \left(x - \bar{x}\right)^{u-1} \left(y - \bar{y}\right)^v + v \cdot \frac{\bar{y}}{K_3} \left(x - \bar{x}\right)^u \left(y - \bar{y}\right)^{v-1}}{K_3^{\frac{(u+v+2)}{2}}} - \frac{\left(x - \bar{x}\right)^u \left(y - \bar{y}\right)^v}{K_3^{\frac{(u+v+4)}{2}}} \cdot \left(\frac{u+v+2}{2}\right) \quad (48)$$

$$\frac{\partial H_{uv}}{\partial K_3} = \frac{u \cdot \bar{x} \left(x - \bar{x}\right)^{u-1} \left(y - \bar{y}\right)^v}{K_3^{\frac{3}{2}} \cdot K_3^{\frac{(u-1)+v+2}{2}}} + \frac{v \cdot \bar{y} \left(x - \bar{x}\right)^u \left(y - \bar{y}\right)^{v-1}}{K_3^{\frac{3}{2}} \cdot K_3^{\frac{(u+(v-1)+2)}{2}}} - \frac{\left(x - \bar{x}\right)^u \left(y - \bar{y}\right)^v}{K_3 \cdot K_3^{\frac{(u+v+2)}{2}}} \cdot \left(\frac{u+v+2}{2}\right) \quad (49)$$

Enfin, nous pouvons exprimer les coefficients  $B_{uv1}$ ,  $B_{uv2}$  et  $B_{uv3}$  en intégrant les équations (44), (45) et (49) sur le domaine  $\Omega_{int}$ . Nous rappelons ici que  $K_3 = |\Omega_{int}|$  représente l'aire du domaine.

$$B_{uv1} = -\frac{u}{|\Omega_{int}|^{\frac{3}{2}}} \cdot \eta_{u-1,v} \quad (50)$$

$$B_{uv2} = -\frac{v}{|\Omega_{int}|^{\frac{3}{2}}} \cdot \eta_{u,v-1} \quad (51)$$

$$B_{uv3} = \frac{u \cdot \bar{x}}{|\Omega_{int}|^{\frac{3}{2}}} \eta_{u-1,v} + \frac{v \cdot \bar{y}}{|\Omega_{int}|^{\frac{3}{2}}} \eta_{u,v-1} - \frac{(u+v+2)}{2 \cdot |\Omega_{int}|} \eta_{u,v} \quad (52)$$

## Références

- [1] G. Aubert, M. Barlaud, O. Faugeras et S. Jehan-Besson, Image segmentation using active contours : calculus of variations or shape gradients? *SIAM, Journal on Applied Mathematics*, 63(6):2128–2154, septembre 2003.
- [2] M. Bober. MPEG-7 visual shape descriptor, *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, 11(6):716–719, juin 2001.
- [3] X. Bresson, P. Vanderghenst et J.P. Thiran, *A priori* information in image segmentation: energy functional based on shape statistical model and image information. Dans *Proc. of IEEE Conference on Image Processing*, volume 3, pp. 425–428, Barcelone, Espagne, 14-17 septembre, 2003.
- [4] T. Chan et L. Vese, Active contours without edges. *IEEE Transactions on Image processing*, 10(2):266–277, février 2001.
- [5] G. Charpiat, O. Faugeras et R. Keriven, Approximations of shape metrics and application to shape warping and empirical shape statistics. Rapport technique RR-4820, INRIA, Sophia Antipolis, mai 2003.
- [6] Y. Chen, H.D. Tagare, S. Thiruvankadam, F. Huang, D. Wilson, K.S. Gopinath, R.W. Briggs et E.A. Geiser, Using prior shapes in geometric active contours in a variational framework. *International Journal of Computer Vision*, 50(3):315–328, décembre 2002.
- [7] C. Chesnaud, P. Réfrégier et V. Boulet, Statistical region snake-based segmentation adapted to different physical noise models. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 21(11):1145–1157, novembre 1999.
- [8] L. Cohen, On active contour models and balloons. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing: Image Understanding*, 53(2): 211–218, mars 1991.
- [9] T.F. Cootes et J.C. Taylor, A mixture model for representing shape variation. *Image and Vision Computing*, 17(8):567–574, juin 1999.
- [10] R. Courant et D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*. Interscience Publishers, Inc., New York, 1953.
- [11] D. Cremers, T. Kohlberger et C. Schnörr, Shape statistics in kernel space for variational image segmentation. *Pattern Recognition: Special Issue on Kernel and Subspace Methods in Computer Vision*, 36(9): 1929–1943, septembre 2003.
- [12] D. Cremers et S. Soatto, A pseudo-distance for shape priors in level set segmentation. Dans O. Faugeras et N. Paragios, éditeurs, *2<sup>nd</sup> IEEE International Workshop on Variational, Geometric and Level Set Methods in Computer Vision*, pp. 169–176, Nice, France, octobre 2003.
- [13] D. Cremers, N. Sochen et C. Schnörr, Towards recognition-based variational segmentation using shape priors and dynamic labeling. Dans L. Griffin, éditeur, *International Conference on Scale-Space Theories in Computer Vision*, volume 2695, pp. 388–400. Springer LNCS, juin 2003.
- [14] D. Cremers, F. Tischhäuser, J. Weickert et C. Schnörr, Diffusion snakes: Introducing statistical shape knowledge into the Mumford-Shah functional. *International Journal of Computer Vision*, 50(3):295–313, décembre 2002.
- [15] M.C. Delfour et J.P. Zolesio, *Shape and geometries: analysis, differential calculus and optimization*. Advances in design and control. SIAM, 2001.
- [16] H. Delingette et J. Montagnat, Topology and shape constraints on parametric active contours. Rapport technique RR-3880, INRIA, Sophia Antipolis, janvier 2000.
- [17] A. Foulonneau, P. Charbonnier et F. Heitz, Contraintes de forme géométriques pour les contours actifs orientés région. Dans *19<sup>e</sup> Colloque GRETSI sur le Traitement du Signal et des Images*, volume 2, pp. 64–67, Paris, France, 8-11 septembre 2003.
- [18] A. Foulonneau, P. Charbonnier et F. Heitz, Geometric shape priors for region-based active contours. Dans *Proc. of IEEE Conference on Image Processing*, volume 3, pp. 413–416, Barcelone, Espagne, 14-17 septembre, 2003.

- [19] M. Gastaud, G. Aubert et M. Barlaud, Tracking video objects using active contours and geometric priors. Rapport technique RR-2003-07-FR, I3S, Nice-Sophia Antipolis, France, avril 2003.
- [20] M. Gastaud, G. Aubert et M. Barlaud, Combining shape prior and statistical features for active contour segmentation. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, 14(5): 726–734, mai 2004.
- [21] M.K. Hu, Visual pattern recognition by moments invariants. *IRE Transaction on Information Theory*, 8(1):179–187, février 1962.
- [22] S. Jehan-Besson, *Modèles de contours actifs basés région pour la segmentation d'images et de vidéos*. Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, France, janvier 2003.
- [23] S. Jehan-Besson, M. Barlaud et G. Aubert, DREAM2S: Deformable Regions driven by an Eulerian Accurate Minimization Method for image and video Segmentation. *International Journal of Computer Vision*, 53(1): 45–70, juin 2003.
- [24] S. Jehan-Besson, M. Gastaud, M. Barlaud et G. Aubert, Region-based active contours using geometrical and statistical features for image segmentation. Dans *Proc. of IEEE Conference on Image Processing*, volume 2, Barcelone, Espagne, 14-17 septembre, 2003.
- [25] M. Kass, A. Witkin et D. Terzopoulos. Snakes: active contours models. *International Journal of Computer Vision*, 1(4):321–331, janvier 1988.
- [26] C. Kervrann et F. Heitz, A hierarchical Markov modeling approach for the segmentation and tracking of deformable shapes. *Graphical Models and Image Processing*, 60(3):173–195, mai 1998.
- [27] C. Kervrann et F. Heitz, Statistical deformable model-based segmentation of image motion. *IEEE Transactions on Image processing*, 8(4): 583–588, avril 1999.
- [28] J. Kim, J.W. Fisher III, M. Cetin, A. Yezzi Jr et A.S. Willsky, Incorporating complex statistical information in active contour-based image segmentation. Dans *Proc. of IEEE Conference on Image Processing*, volume 2, pp. 655–658, Barcelone, Espagne, 14-17 septembre, 2003.
- [29] M.E. Leventon, W.E. Grimson et O. Faugeras, Statistical shape influence in geodesic active contours. Dans *Proc. of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pp. 1316–1323, Hilton Head Island, Caroline du Sud, USA, 13-15 juin, 2000.
- [30] S.X. Liao et M. Pawlak, On image analysis by moments. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 18(3): 254–266, mars 1996.
- [31] T. McInerney et D. Terzopoulos, Topologically adaptable snakes. Dans *Proc. of International Conference on Computer Vision*, pp. 840–845, Cambridge, Massachusetts, USA, 20-23 juin, 1995.
- [32] S. Osher et J.A. Sethian, Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, 79(1):12–49, novembre 1988.
- [33] N. Paragios et M. Rousson, Shape priors for level set representations. Dans *Proc. of European Conference on Computer Vision*, volume 2, pp. 78–92, Copenhague, Danemark, 28-31, mai 2002.
- [34] F. Precioso et M. Barlaud, B-spline active contours with handling of topology changes for fast video segmentation. *Eurasip Special issue: Image analysis for multimedia interactive services – PART II*, 2002(6): 555–560, juin 2002.
- [35] C. Samson, L. Blanc-Féraud, G. Aubert et J. Zerubia, A level set model for image classification. *International Journal of Computer Vision*, 40(3):187–197, décembre 2000.
- [36] C. Schnörr, Computation of discontinuous optical flow by domain decomposition and shape optimization. *International Journal of Computer Vision*, 8(2):153–165, août 1992.
- [37] J.A. Sethian, *Level set methods and fast marching methods: evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision and material sciences*. Cambridge Monograph on Applied and Computational Mathematics. Cambridge University Press, 1999.
- [38] K. Siddiqi, Y.B. Lauzière, A. Tannenbaum et S.W. Zucker, Area and length minimizing flows for shape segmentation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 7(3): 433–443, mars 1998.
- [39] T. Sikora, The MPEG-7 visual standard for content description – an overview. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, 11(6):696–702, juin 2001.
- [40] J. Sokolowski et J.P. Zolesio, *Introduction to shape optimization: shape sensitivity analysis*, volume 16 de *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer Verlag, 1992.
- [41] L.H. Staib et J.S. Duncan, Boundary finding with parametrically deformable models. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14(11):1061–1075, novembre 1992.
- [42] M. Sussman, P. Smereka et S. Osher, A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow. *Journal of Computational Physics*, 114:146–159, 1994.
- [43] G. Székely, A. Kelemen, C. Brechbüler et G. Gerig, Segmentation of 3D objects from MRI volume data using constrained elastic deformations of flexible Fourier surface models. *Medical Image Analysis*, 1(1): 19–34, mars 1996.
- [44] M.R. Teague, Image analysis via the general theory of moments. *Journal of the Optical Society of America*, 70(8):920–930, août 1980.
- [45] C.H. Teh et R.T. Chin, On image analysis by the method of moments. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 10(4):496–513, juillet 1988.
- [46] A. Tsai, A. Yezzi, W. Wells, C. Tempany, D. Tucker, A. Fan, W.E. Grimson et A. Willsky, A shape-based approach to the segmentation of medical imagery using level sets. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 22(2):137–154, février 2003.
- [47] L. Yang et F. Albrecht, Fast and exact computation of cartesian geometric moments using discrete Green's theorem. *Pattern Recognition*, 29(7):1061–1073, 1996.
- [48] T. Zhang et D. Freedman, Tracking objects using density matching and shape priors. Dans *Proc. of IEEE International Conference on Computer Vision*, pp. 1056–1062, Nice, France, octobre 2003.
- [49] S. Zhu et A. Yuille, Region competition: unifying snakes, region growing, and Bayes/MDL for multiband image segmentation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 18(9): 884–900, septembre 1996.



Alban **Foulonneau**

Ingénieur de l'ENSPS (2001), Alban Foulonneau prépare, au Laboratoire Régional des Ponts et Chaussées de Strasbourg, une thèse portant sur l'analyse de scènes routières par modèles déformables contraints géométriquement. Ses domaines d'intérêt portent sur la reconnaissance des formes, les approches variationnelles et les modèles déformables.



Pierre **Charbonnier**

Ingénieur ESSI (1991), Docteur de l'Université de Nice - Sophia Antipolis (1994), Pierre Charbonnier est actuellement Chargé de Recherches au Laboratoire Régional des Ponts et Chaussées de Strasbourg (ERA 27 du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées). Ses domaines d'intérêt incluent les modèles statistiques et les modèles déformables appliqués à l'analyse multi-images.



Fabrice **Heitz**

Ingénieur ENST Bretagne (1984), Docteur Télécom Paris (1988), Fabrice Heitz a été de 1988 à 1994 Chargé de Recherches INRIA à l'IRISA (Rennes). Il est actuellement Professeur de Traitement du Signal et des Images à l'École Nationale Supérieure de Physique de Strasbourg (ENSPS). Il anime un groupe de recherche en analyse multi-images au sein du LSIIT (Laboratoire des Sciences de l'Image, de l'Informatique et de la Télédétection, UMR CNRS 7005). Ses domaines d'intérêt incluent la modélisation statistique et les modèles déformables appliqués à l'analyse multi-images et à l'imagerie médicale.