

Problème inverse en télédétection par imagerie à synthèse d'ouverture

Inverse problem in remote sensing by aperture synthesis imaging

E. Anterrieu, S. Gratton, B. Picard

Centre Européen de Recherche et de Formation Avancée en Calcul Scientifique (CERFACS) 42, Avenue Gaspard Coriolis
31057 Toulouse cedex 01 – France

Manuscrit reçu le 1^{er} septembre 2003

Résumé et mots clés

Les radiomètres imageurs à synthèse d'ouverture sont des instruments particulièrement bien adaptés à l'observation à haute résolution des surfaces planétaires dans le domaine des micro-ondes. Le sujet traité dans cet article est celui de la reconstruction de cartes de température de brillance à partir de mesures interférométriques fournies par ce type d'instrument. Il est montré que le problème inverse correspondant est mal posé et doit être régularisé afin d'obtenir une solution unique et stable. Une méthode de régularisation est présentée en se référant au concept de résolution angulaire de l'instrument. Pour l'illustrer, des simulations sont conduites dans le cadre de la mission spatiale SMOS de l'Agence Spatiale Européenne.



Interférométrie, synthèse d'ouverture, problèmes inverses, régularisation.

Abstract and key words

Synthetic aperture imaging radiometers (SAIR) are potential powerful instruments for high-resolution observation of planetary surfaces at low microwave frequencies. This article deals with the reconstruction of radiometric brightness temperature maps from SAIR interferometric measurements. It is demonstrated that the corresponding inverse problem is not well-posed, unless a regularizing constraint is introduced in order to provide a unique and stable solution. A regularizing approach is presented by referring to the angular resolution of the instrument. To illustrate the theory, numerical simulations are carried out for the SMOS space mission, a project led by the European Space Agency.

Interferometry, aperture synthesis, inverse problems, regularization.

1. Introduction

La mission spatiale SMOS (Soil Moisture and Ocean Salinity) est actuellement dans la phase B de son développement sous le contrôle de l'Agence Spatiale Européenne [1]. Ce projet constitue la première application, à la télédétection spatiale, du concept de radiomètre imageur à synthèse d'ouverture initialement développé en radio-astronomie [2]. Sur le plan technologique, la synthèse d'ouverture apporte une réponse aux problèmes liés au déploiement dans l'espace d'antennes de grandes dimensions. Cet interféromètre bi-dimensionnel opérant dans le domaine des micro-ondes est dédié à la télédétection de l'humidité superficielle des sols et de la salinité de surface des océans à partir d'une plate-forme placée en orbite basse.

Cet article présente une nouvelle approche pour reconstruire, à partir de mesures interférométriques, la distribution de température de brillance d'un champ synthétisé. En ce qui concerne le projet SMOS, ces visibilitées complexes sont obtenues sur une grille d'échantillonnage hexagonale et sont confinées dans une couverture fréquentielle en forme d'étoile. Dans ce cas précis, l'approche traitement d'images sur des grilles hexagonales est la manière la plus naturelle d'aborder le problème de la synthèse d'ouverture. Cependant, la méthode présentée ici est tout à fait générale et peut être adaptée sans aucune difficulté à d'autres configurations conduisant à des couvertures fréquentielles différentes sur des grilles d'échantillonnage régulières.

La première partie de cet article rappelle le principe observationnel et décrit la modélisation de l'instrument. Le cadre de travail est introduit dans la seconde partie. Une attention particulière est accordée aux grilles d'échantillonnage hexagonales puisqu'elles sont nécessaires à l'illustration du traitement des données interférométriques de SMOS. Les espaces et les opérateurs clés impliqués dans le processus de reconstruction sont ensuite introduits. La troisième partie est consacrée à la reconstruction des températures de brillance à partir des visibilitées complexes. Il est montré que ce problème inverse est mal posé et qu'il doit être régularisé afin de fournir une solution unique et stable. Puisque les radiomètres imageurs à synthèse d'ouverture sont des instruments à bande passante limitée, la régularisation proposée tient compte de cette spécificité. Elle est comparée à une autre régularisation, plus mathématique, et le lien est fait entre les deux méthodes. Finalement, des simulations numériques sont menées pour illustrer ces deux approches dans le cadre de la mission SMOS et la stabilité des processus de reconstruction est analysée.

2. Principe observationnel

Un radiomètre traditionnel établit une carte des températures de brillance en pointant une antenne hautement directive vers dif-

férents points de la scène observée et en mesurant la puissance collectée dans la direction du lobe principal de l'antenne en chacun de ces points [3]. Le principe observationnel d'un radiomètre imageur à synthèse d'ouverture, illustré sur la Figure 1, est basé sur le théorème de Van-Cittert Zernike [4]. En mesurant la corrélation des signaux reçus par deux antennes A_k et A_l distantes l'une de l'autre et observant le même champ de vue, on accède à un échantillonnage de la fonction de cohérence spatiale $V(\mathbf{u}_{kl})$ pour une certaine fréquence spatiale angulaire $\mathbf{u}_{kl} = \mathbf{d}_{kl}/\lambda_o$ où \mathbf{d}_{kl} est le vecteur de la ligne de base associée au couple d'antennes (A_k, A_l) et λ_o est la longueur d'onde d'observation. Cette fonction, qui peut se comprendre comme une mesure de la capacité d'un rayonnement à produire des interférences, est définie dans le contexte de l'expérience des trous d'Young par la corrélation normalisée entre les ondes ré-émises au niveau des fentes [4]. Dans la situation présente, ces mesures interférométriques correspondent à la notion de visibilitées complexes [2]: le module est donné par le facteur de visibilité des franges de la figure d'interférence tandis que la phase est donnée par la position de la frange centrale par rapport à la différence de marche nulle. Le principe de la synthèse d'ouverture est d'utiliser des visibilitées complexes mesurées à plusieurs fréquences spatiales pour reconstruire la distribution spatiale d'intensité de la source observée.

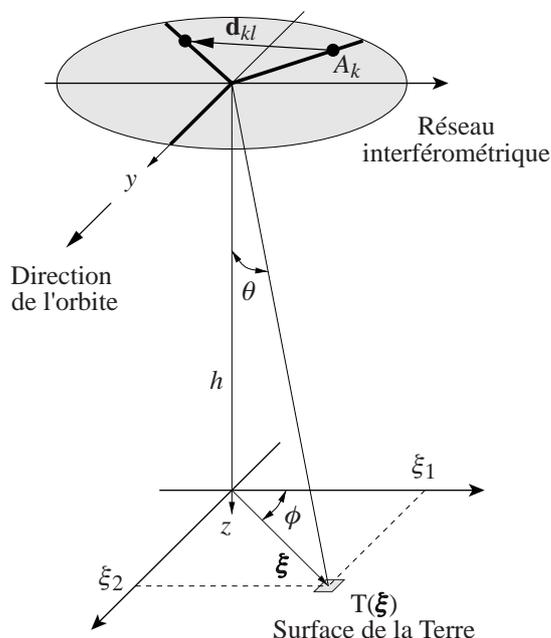


Figure 1. Système de coordonnées utilisé pour l'observation de la Terre, depuis une altitude h , à l'aide d'un interféromètre imageur à synthèse d'ouverture. Le vecteur \mathbf{d}_{kl} est le vecteur ligne de base entre les deux antennes A_k et A_l . Les composantes ξ_1 et ξ_2 de la variable de position angulaire ξ sont les cosinus directeurs de la direction d'observation, θ et ϕ sont les coordonnées sphériques traditionnelles

Pour un interféromètre idéal dont les récepteurs et les antennes sont tous identiques, et pour lequel les effets de décorrélation sont négligés, les visibilité complexes $V(\mathbf{u}_{kl})$ et la distribution de température de brillance $T(\xi)$ de la scène observée sont reliées par une intégrale de type transformée de Fourier :

$$V(\mathbf{u}_{kl}) \propto \frac{1}{\Omega} \iint_{\|\xi\| \leq 1} |F(\xi)|^2 T(\xi) e^{-2j\pi \mathbf{u}_{kl} \xi} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \|\xi\|^2}}, \quad (1)$$

où $|F(\xi)|^2$ est le diagramme de rayonnement en puissance des antennes élémentaires, supposées ici toutes identiques avec un angle solide équivalent Ω .

Cependant, dans un système réel, les imperfections des composants de l'interféromètre affectent les mesures du degré de cohérence spatiale. La relation entre les visibilité complexes et la température de brillance diffère donc de la simple intégrale (1) et est donnée par [2][5] :

$$V(\mathbf{u}_{kl}) \propto \frac{1}{\sqrt{\Omega_k \Omega_l}} \iint_{\|\xi\| \leq 1} F_k(\xi) \bar{F}_l(\xi) T(\xi) \tilde{r}_{kl} \left(\frac{-\mathbf{u}_{kl} \xi}{f_o} \right) e^{-2j\pi \mathbf{u}_{kl} \xi} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \|\xi\|^2}}. \quad (2)$$

Ici, $F_k(\xi)$ et $F_l(\xi)$ sont les diagrammes de rayonnement en intensité des deux antennes A_k et A_l , Ω_k et Ω_l sont les angles solides équivalents de ces antennes, $\tilde{r}_{kl}(t)$ tient compte des effets de décorrélation, $t = \mathbf{u}_{kl} \xi / f_o$ est le retard géométrique et f_o est la fréquence centrale d'observation.

Les modèles d'antennes et de récepteurs utilisés pour les simulations dans la dernière partie de cet article sont ceux retenus pour le démonstrateur de SMOS construit par Astrium [6].

2.1. Diagrammes des antennes

Suivant les notations introduites dans la figure 1, les diagrammes de rayonnement des antennes sont caractérisés par leur directivité $D(\theta, \phi)$ et leur phase $\Delta\varphi(\theta, \phi)$ dans la direction d'observation (θ, ϕ) [2] :

$$F(\theta, \phi) = D(\theta, \phi) e^{j\Delta\varphi(\theta, \phi)}. \quad (3)$$

Dans les simulations présentées dans le paragraphe 5, la directivité obéit à une loi en puissance :

$$D(\theta, \phi) = D(0) \left(\cos^{n_1} \theta \cos^2 \phi + \cos^{n_2} \theta \sin^2 \phi \right), \quad (4)$$

avec

$$D(0) = \sqrt{\frac{2(n_1 + 1)(n_2 + 1)}{n_1 + n_2 + 1}} \quad (5)$$

$$n_1 = -0.15 / \log \cos \frac{\theta_1}{2}$$

$$n_2 = -0.15 / \log \cos \frac{\theta_2}{2}$$

où θ_1 et θ_2 sont les largeurs à mi-hauteur du lobe principal dans les directions ξ_1 et ξ_2 . De même, la phase varie en fonction de (θ, ϕ) :

$$\Delta\varphi(\theta, \phi) = \frac{2\pi}{\lambda_o} \left((D_1'' \sin \theta + D_1^\perp (1 - \cos \theta)) \cos^2 \phi + (D_2'' \sin \theta + D_2^\perp (1 - \cos \theta)) \sin^2 \phi \right), \quad (6)$$

où D_1'' , D_1^\perp et D_2'' , D_2^\perp sont des distances de défocalisation transverse et longitudinale dans les directions ξ_1 et ξ_2 qui traduisent des défauts de la surface de l'antenne.

Ainsi, chaque diagramme dépend de six paramètres qui diffèrent d'une antenne à l'autre. Leurs valeurs numériques sont données dans la Table 1.

Tableau 1. Diagrammes de rayonnement des antennes

	θ_1 (deg)	θ_2 (deg)	D_1'' (mm)	D_1^\perp (mm)	D_2'' (mm)	D_2^\perp (mm)
1	64.57	59.34	0.0	19.0	2.8	-30.0
2	56.00	64.00	-3.0	1.0	1.0	-25.0
3	66.47	60.77	0.0	20.0	0.0	-16.0
4	62.28	72.57	-4.0	20.0	0.5	-7.0
5	67.89	57.44	4.0	15.0	2.0	-25.0
6	62.28	67.43	0.0	22.0	1.0	-16.0
7	66.28	68.00	4.0	25.0	2.0	-9.0
8	64.57	64.57	-1.0	25.0	1.0	-12.0
9	67.43	68.57	0.0	25.0	2.0	-6.0
10	59.43	62.28	1.0	11.0	-3.0	-25.0

Tableau 2. Filtrage passe-bande des récepteurs

	\bar{f} (MHz)	B (MHz)	τ (nsec)	φ (deg)
1	1414.41	20.83	83	0.8
2	1414.93	19.61	79	-0.5
3	1415.54	20.25	81	-0.2
4	1414.58	19.08	80	0.3
5	1414.35	20.44	77	0.4
6	1415.29	20.62	79	-0.1
7	1415.18	19.22	82	0.2
8	1415.39	20.11	78	0.6
9	1414.27	19.84	80	-0.7
10	1415.78	19.37	77	-0.3

2.2. Filtrage des récepteurs

La fonction $\tilde{r}_{kl}(t)$ rend compte des effets de décorrélation spatiale dus à la largeur non-nulle des filtres des récepteurs placés à la sortie des antennes A_k et A_l [2] :

$$\tilde{r}_{kl}(t) = \frac{1}{\sqrt{B_k B_l}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_k(f - f_o) \bar{H}_l(f - f_o) e^{+2j\pi f t} df. \quad (7)$$

$H_k(f)$ et $H_l(f)$ sont ici les fonctions de transfert des filtres passe-bande des récepteurs, B_k et B_l sont leurs bandes passantes équivalentes. Ces effets sont d'autant plus importants que la ligne de base \mathbf{d}_{kl} est grande et que le signal provient de points ξ du champ de vue éloignés de la direction de visée des antennes. Les filtres utilisés dans les simulations présentées dans le paragraphe 5 sont des filtres rectangulaires à variation de phase linéaire :

$$H(f) = \text{rect}\left(\frac{f - \bar{f}}{B}\right) e^{-j(2\pi\tau(f - \bar{f}) + \varphi)}, \quad (8)$$

où \bar{f} et B sont la fréquence centrale et la bande passante du filtre, τ est le retard de groupe et φ est le déphasage à la fréquence centrale.

Ainsi, chaque filtre dépend de quatre paramètres qui diffèrent d'un récepteur à l'autre. Leurs valeurs numériques sont données dans la Table 2.

3. Cadre théorique

En raison des dimensions limitées d'un dispositif interférométrique et du nombre fini d'antennes élémentaires utilisées, les fréquences spatiales échantillonnées à l'aide d'un interféromètre imageur sont bien évidemment limitées à une région du domaine de Fourier: la couverture fréquentielle expérimentale H . Dans le cas de SMOS, le dispositif en forme de Y avec des antennes élémentaires régulièrement disposées le long de chaque bras, conduit à des fréquences spatiales \mathbf{u}_{kl} situées aux nœuds d'un maillage hexagonal et confinées dans une couverture fréquentielle en forme d'étoile [7]. L'approche traitement d'image sur des grilles d'échantillonnage hexagonales est donc ici la manière naturelle d'aborder le problème de la synthèse d'ouverture [8]. Cependant, d'autres géométries peuvent conduire à des formes de H différentes, sur des grilles cartésiennes, par exemple.

3.1. Grilles d'échantillonnage

Soit \mathcal{H} le réseau périodique qui étend la couverture fréquentielle expérimentale H ,

$$\mathcal{H} = \left\{ \mathbf{u}_{\mathbf{q}} = q_1 \mathbf{u}^{(1)} + q_2 \mathbf{u}^{(2)}, \mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{Z}^2 \right\}. \quad (9)$$

Les deux vecteurs de translation $\mathbf{u}^{(1)}$ et $\mathbf{u}^{(2)}$ sont tels que $\|\mathbf{u}^{(1)}\| = \|\mathbf{u}^{(2)}\| = \delta u = d/\lambda_o$, où d est l'espacement élémentaire entre les antennes et λ_o est la longueur d'onde d'observation. Dans la suite de cet article, n sera un entier, plus exactement une puissance de 2, tel que H sera entièrement contenu dans la cellule élémentaire du réseau périodique :

$$n\mathcal{H} = \left\{ \mathbf{U}_{\mathbf{Q}} = Q_1 \mathbf{U}^{(1)} + Q_2 \mathbf{U}^{(2)}, \mathbf{Q} = (Q_1, Q_2) \in \mathbb{Z}^2 \right\}. \quad (10)$$

Les deux vecteurs de base de ce réseau périodique, $\mathbf{U}^{(1)} = n\mathbf{u}^{(1)}$ et $\mathbf{U}^{(2)} = n\mathbf{u}^{(2)}$, sont ici tels que

$$\|\mathbf{U}^{(1)}\| = \|\mathbf{U}^{(2)}\| = \Delta u = n \delta u.$$

Les équations (9) et (10) sont illustrées sur la Figure 2 dans le cas de SMOS où une cellule élémentaire de $n\mathcal{H}$ est échantillonnée aux nœuds de \mathcal{H} . Les aires $\sigma_{\mathbf{u}}$ et $\sigma_{\mathbf{U}}$ des cellules élémentaires $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ et $\mathcal{C}(n\mathcal{H})$ sont respectivement égales à $(\delta u)^2 \sqrt{3}/2$ et $(\Delta u)^2 \sqrt{3}/2$.

Soit maintenant \mathcal{H}^* le réseau réciproque de \mathcal{H} :

$$\mathcal{H}^* = \left\{ \mathbf{\Xi}_{\mathbf{P}} = P_1 \mathbf{\Xi}^{(1)} + P_2 \mathbf{\Xi}^{(2)}, \mathbf{P} = (P_1, P_2) \in \mathbb{Z}^2 \right\}. \quad (11)$$

Les deux vecteurs de translation $\mathbf{\Xi}^{(1)}$ et $\mathbf{\Xi}^{(2)}$ satisfont les relations d'orthogonalité suivantes : $\mathbf{\Xi}^{(1)} \cdot \mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{\Xi}^{(2)} \cdot \mathbf{u}^{(2)} = 1$ et $\mathbf{\Xi}^{(1)} \cdot \mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{\Xi}^{(2)} \cdot \mathbf{u}^{(1)} = 0$. Ils sont tels que $\|\mathbf{\Xi}^{(1)}\| = \|\mathbf{\Xi}^{(2)}\| = \Delta \xi$, où $\Delta \xi$ joue le rôle dual de celui de δu . Comme précédemment, la cellule élémentaire de \mathcal{H}^* est échantillonnée aux nœuds de \mathcal{H}^*/n , le réseau réciproque de $n\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H}^*/n = \left\{ \mathbf{\xi}_{\mathbf{p}} = p_1 \mathbf{\xi}^{(1)} + p_2 \mathbf{\xi}^{(2)}, \mathbf{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{Z}^2 \right\}. \quad (12)$$

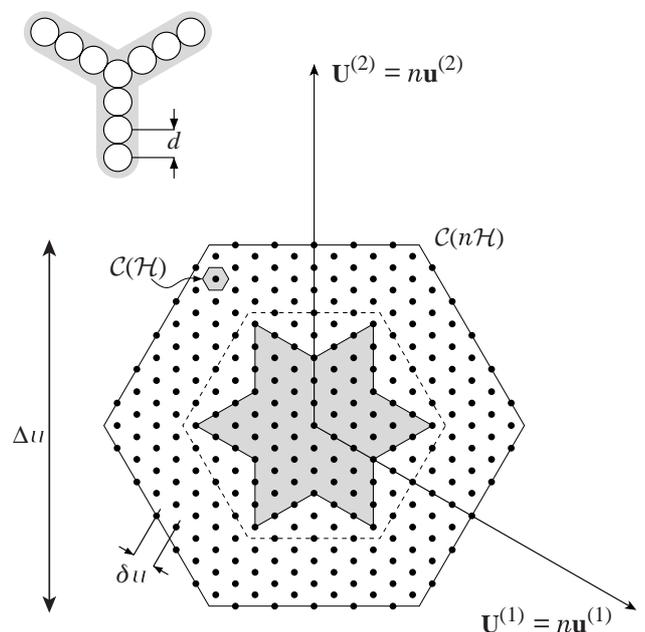


Figure 2. Cellule élémentaire de $n\mathcal{H}$ échantillonnée aux nœuds de \mathcal{H} , et couverture fréquentielle H d'un dispositif interférométrique en forme de Y avec 3 antennes équidistantes par bras. Ici n est égal à 16 de sorte que H est entièrement contenu dans la cellule élémentaire de $n\mathcal{H}$: $\delta u = d/\lambda_o$ est le pas d'échantillonnage dans le domaine de Fourier et $\Delta u = n \delta u$ est l'étendue spectrale. L'hexagone en trait pointillé est le plus petit hexagone contenant H : la plus petite valeur de n est donc ici égale à 10

Les vecteurs $\xi^{(1)} = \Xi^{(1)}/n$ et $\xi^{(2)} = \Xi^{(2)}/n$ satisfont ici les relations d'orthogonalité: $\xi^{(1)} \cdot \mathbf{U}^{(1)} = \xi^{(2)} \cdot \mathbf{U}^{(2)} = 1$ et $\xi^{(1)} \cdot \mathbf{U}^{(2)} = \xi^{(2)} \cdot \mathbf{U}^{(1)} = 0$. Ils sont tels que $\|\xi^{(1)}\| = \|\xi^{(2)}\| = \delta\xi = \Delta\xi/n$, où $\delta\xi$ joue le rôle dual de Δu .

Les équations (11) et (12) sont illustrées sur la figure 3 à nouveau dans le cas de SMOS où une cellule élémentaire de \mathcal{H}^* est échantillonnée aux nœuds de \mathcal{H}^*/n . Les aires σ_ξ et σ_Ξ des cellules élémentaires $\mathcal{C}(\mathcal{H}^*/n)$ et $\mathcal{C}(\mathcal{H}^*)$ sont respectivement égales à $(\delta\xi)^2\sqrt{3}/2$ et $(\Delta\xi)^2\sqrt{3}/2$.

Signalons enfin qu'une propriété générale des réseaux réciproques (le produit des aires des cellules élémentaires de deux réseaux réciproques est égal à 1) montre dans ce contexte de la synthèse d'ouverture sur des maillages hexagonaux que les pas d'échantillonnage δu et $\delta\xi$, ainsi que les étendues spectrales Δu et spatiale $\Delta\xi$, sont reliés par la relation:

$$\Delta\xi \delta u = \Delta u \delta\xi = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ avec } \begin{cases} \Delta\xi = n \delta\xi, \\ \Delta u = n \delta u. \end{cases} \quad (13)$$

Cette remarque est vraie pour tous les types de réseaux réciproques. Dans le cas bien connu de maillages cartésiens, (13) se réduit à $\Delta\xi \delta u = \Delta u \delta\xi = 1$ avec $\Delta u = n\delta u$ et $\Delta\xi = n\delta\xi$.

Soient enfin les deux ensembles de n^2 entiers

$$\mathbb{G}(n\mathcal{H}) = \{\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^2 : \mathbf{u}_q \in \mathcal{C}(n\mathcal{H})\}, \quad (14)$$

et

$$\mathbb{G}(\mathcal{H}^*) = \{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^2 : \xi_p \in \mathcal{C}(\mathcal{H}^*)\}. \quad (15)$$

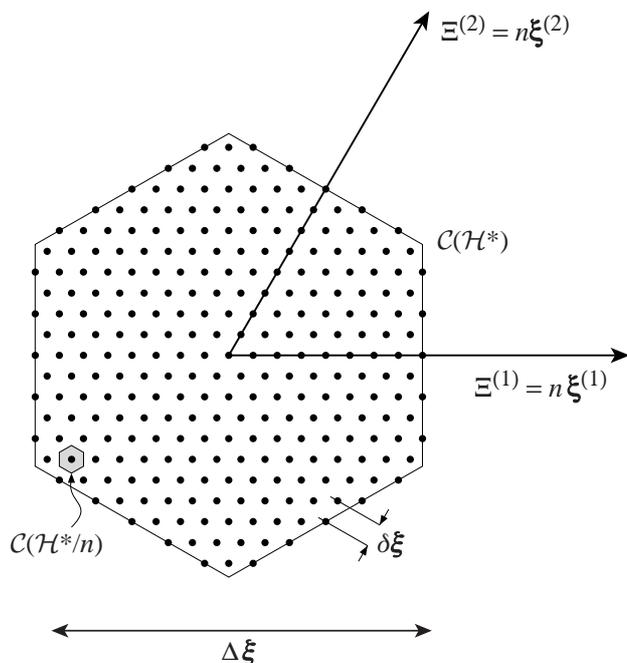


Figure 3. Cellule élémentaire de \mathcal{H}^* échantillonnée aux nœuds de \mathcal{H}^*/n . Ici encore n est égal à 16, $\delta\xi$ est le pas d'échantillonnage dans le domaine spatial et $\Delta\xi = n\delta\xi$ est l'étendue du champ synthétisé

Puisque $\mathcal{C}(\mathcal{H}^*)$ est échantillonné aux nœuds de $\mathcal{C}(\mathcal{H}^*/n)$, $\mathbb{G}(\mathcal{H}^*)\delta\xi$ n'est rien d'autre que la grille représentée sur la Figure 3 dans le cas de SMOS. De même, $\mathbb{G}(n\mathcal{H})\delta u$ est la grille duale représentée sur la Figure 2. Ici l'entier n a été choisi comme une puissance de 2 pour des raisons de commodité numérique, mais cette condition n'est pas obligatoire pourvu que les conditions d'échantillonnage de Shannon soient toujours respectées.

3.2. Espaces de travail

L'espace de travail objet E est l'espace de dimension finie dans lequel l'opération de synthèse de Fourier est numériquement effectuée [9][10]. Il s'agit plus précisément ici de l'espace des fonctions T qui prennent leurs valeurs $T_p \equiv T(\xi_p)$ aux nœuds ξ_p de la grille $\mathbb{G}(\mathcal{H}^*)\delta\xi$. L'espace de travail dual \hat{E} est l'image de E par l'opérateur de transformation de Fourier discrète. En clair, c'est l'espace des transformées de Fourier \hat{T} qui prennent leurs valeurs $\hat{T}_q \equiv \hat{T}(\mathbf{u}_q)$ aux nœuds \mathbf{u}_q de la grille $\mathbb{G}(n\mathcal{H})\delta u$. Les fonctions \hat{T} à bande passante limitée dans H jouent un rôle bien particulier en synthèse de Fourier [10]. Elles appartiennent à un sous-espace \mathcal{E} de E , dont l'image de Fourier est un sous-espace $\hat{\mathcal{E}}$ de \hat{E} . Les fonctions \hat{T} prennent leurs valeurs $\hat{T}_q \equiv \hat{T}(\mathbf{u}_q)$ aux seuls nœuds \mathbf{u}_q inclus dans H .

Les fréquences spatiales \mathbf{u}_{kl} associées aux couples d'antennes A_k et A_l dans les relations (1) et (2) appartiennent à une liste finie \mathcal{L} dans le domaine de Fourier: $\mathcal{L} = \{\mathbf{u}_{kl} : 1 \leq k, l \leq \ell\}$, où ℓ est le nombre d'antennes élémentaires du dispositif interférométrique. Cette liste peut comporter des éléments redondants dans la mesure où deux couples d'antennes différents peuvent engendrer la même fréquence spatiale. En accord avec le caractère hermitien des relations (1) et (2), l'espace des données est ici l'espace des fonctions à valeurs complexes V qui prennent leurs valeurs $V_{kl} \equiv V(\mathbf{u}_{kl})$ aux fréquences (redondantes) de la liste \mathcal{L} .

3.3. Opérateurs clefs

Soit \mathbf{U} l'opérateur de transformation de Fourier discrète sur les grilles duales $\mathbb{G}(\mathcal{H}^*)\delta\xi$ et $\mathbb{G}(n\mathcal{H})\delta u$:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} : E &\longrightarrow \hat{E} \\ T &\longmapsto \mathbf{U}T = \hat{T} \end{aligned}$$

avec:

$$\forall \mathbf{q} \in \mathbb{G}(n\mathcal{H}), \hat{T}_q = \sigma_\xi \sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{G}(\mathcal{H}^*)} T_p e^{-2j\pi \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}}{n}}. \quad (16)$$

Dans le cas de grilles d'échantillonnage hexagonales, il est possible d'effectuer ces calculs à l'aide des algorithmes standards de transformées de Fourier rapides, développés et optimisés pour des grilles cartésiennes [8], ce qui n'impose pas de mettre en œuvre un algorithme spécifique à ces grilles [11].

Soit maintenant \mathbf{Z} l'opérateur de « zero-padding » au-delà de la couverture fréquentielle H :

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} : \hat{\mathcal{E}} &\longrightarrow \hat{\mathcal{E}} \\ \hat{\mathcal{T}} &\longmapsto \mathbf{Z}\hat{\mathcal{T}} = \hat{\mathcal{T}} \end{aligned}$$

avec :

$$\forall \mathbf{q} \in \mathbb{G}(n\mathcal{H}), \hat{\mathcal{T}}_{\mathbf{q}} = \begin{cases} \hat{\mathcal{T}}_{\mathbf{q}} & \text{si } \mathbf{u}_{\mathbf{q}} \in H, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (17)$$

L'action de l'opérateur adjoint \mathbf{Z}^* , qui consiste à ne conserver que les composantes $\hat{\mathcal{T}}_{\mathbf{q}}$ de $\hat{\mathcal{T}}$ à l'intérieur de H , est donc telle que $\mathbf{Z}^*\mathbf{Z} = \mathbf{I}_{\mathcal{E}}$. En conséquence, l'opérateur

$$\mathbf{P}_H = \mathbf{U}^*\mathbf{Z}\mathbf{Z}^*\mathbf{U} \quad (18)$$

est le projecteur de E dans \mathcal{E} puisqu'il est facile de démontrer que $\mathbf{P}_H^* = \mathbf{P}_H$ et $\mathbf{P}_H^2 = \mathbf{P}_H$.

Enfin, l'opérateur de modélisation de l'instrument est l'opérateur \mathbf{G} de l'espace de travail objet dans l'espace des données qui traduit la relation de base (2) entre les visibilitées complexes et la distribution de la température de brillance de la scène observée :

$$\begin{aligned} \mathbf{G} : E &\longrightarrow F \\ T &\longmapsto \mathbf{G}T = V \end{aligned}$$

avec, $\forall \mathbf{u}_{kl} \in \mathcal{L}$:

$$V_{kl} = \sigma_{\xi} \sum_{\mathbf{p} \in (\mathcal{H}^*)} \frac{F_{k,\mathbf{p}} \bar{F}_{l,\mathbf{p}}}{\sqrt{1 - \|\xi_{\mathbf{p}}\|^2}} T_{\mathbf{p}} \tilde{r}_{kl} \left(\frac{-\mathbf{u}_{kl} \xi_{\mathbf{p}}}{f_o} \right) e^{-2j\pi \mathbf{u}_{kl} \xi_{\mathbf{p}}}. \quad (19)$$

L'action de l'adjoint de \mathbf{G} est établie dans l'Annexe A.

Pour des raisons de mise en œuvre numérique, l'intégrale (2) est ici remplacée par une somme discrète sur les n^2 cellules élémentaires $\mathcal{C}(\mathcal{H}^*/n)$ de la grille $\mathbb{G}(\mathcal{H}^*) \delta\xi$. Ici encore, n est choisi de sorte que les conditions d'échantillonnage de Shannon soient respectées, mais aussi de manière à évaluer numérique-

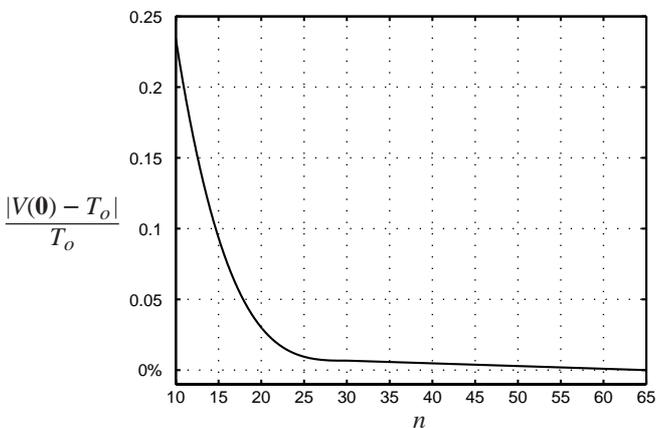


Figure 4. Variations de l'erreur relative sur le calcul de $V(\mathbf{0})$ avec n

ment l'intégrale avec une précision suffisante. À ce sujet, la Figure 4 montre les variations de l'erreur relative sur le calcul de $V(\mathbf{0})$ en fonction de n . Comme la température de brillance de la scène observée est ici constante et égale à $T_o/4\pi$ dans tout l'espace, la valeur théorique de $V(\mathbf{0})$ est parfaitement connue et égale à T_o [5]. On observe qu'au niveau d'échantillonnage le plus faible, $n = 10$, cette erreur est de l'ordre de 0.25 %, mais qu'elle décroît fortement lorsque n augmente pour atteindre des valeurs beaucoup plus faibles compatibles avec la précision requise. Ce comportement n'est pas surprenant puisque l'intégration numérique est ici obtenue avec la méthode des trapèzes. Tout ceci ne doit pas être ignoré puisqu'il faut garder présent à l'esprit que la relation (19) est la relation que l'on cherche à inverser pour retrouver la distribution de température de brillance d'une scène à partir des visibilitées complexes expérimentales.

4. Problème inverse

Le problème auquel on s'intéresse est celui de retrouver la distribution de température de brillance d'une scène observée à partir d'un nombre fini de visibilitées complexes plus ou moins bruitées. Comme le *problème direct* est modélisé par l'intégrale (2), le *problème inverse* associé ne présente pas de solution évidente.

4.1. Apodisation

Comme cela a été souligné précédemment, les radiomètres imageurs à synthèse d'ouverture sont des instruments à bande passante limitée dans la couverture fréquentielle H . Ainsi, même dans le cas d'un instrument idéal, la version discrète de (1) n'est pas une transformation de Fourier discrète entre les visibilitées complexes $V(\mathbf{u}_{kl})$ et la température de brillance « modifiée » $\tilde{T}(\xi) = |F(\xi)|^2 T(\xi) / \sqrt{1 - \|\xi\|^2}$. Dans une telle situation, l'action de \mathbf{G} sur T est celle de $\mathbf{Z}^*\mathbf{U}$ sur \tilde{T} , pas celle de \mathbf{U} . Il n'est donc pas possible de restaurer à l'aide d'une simple transformée de Fourier inverse discrète la distribution de température \tilde{T} à son plus haut niveau de résolution puisque ses composantes de Fourier au-delà de H sont définitivement perdues. En conséquence, seule une version lissée de \tilde{T} , et donc de T , peut être restaurée à l'aide de l'opérateur $\mathbf{U}^*\mathbf{Z}$ qui n'est pas l'inverse de $\mathbf{Z}^*\mathbf{U}$. En effet, $\mathbf{U}^*\mathbf{Z}\mathbf{Z}^*\mathbf{U}$ n'est pas l'opérateur identité de E mais le projecteur \mathbf{P}_H de E sur \mathcal{E} . Enfin, lorsque l'instrument est modélisé par la relation (2), \tilde{T} n'est pas défini puisque les gains des antennes sont tous différents. De plus, dans ce cas l'action de l'opérateur $\mathbf{U}^*\mathbf{Z}$ sur des visibilitées complexes demande au préalable de moyennner les mesures redondantes, ou d'en choisir une parmi elles. Quelque soit la manière de faire, une telle approche ne peut bien évidemment pas prendre en compte correctement les imperfections des composants de l'instrument, pas plus que les effets de décorrélation.

Le but poursuivi est donc de restaurer la température de brillance T au niveau de résolution évoqué précédemment à partir des

visibilités complexes mesurées à l'aide d'un instrument modélisé par la relation (2), c'est-à-dire avec des antennes et des récepteurs différents et en présence d'effets de décorrélation. Bien évidemment, cela doit être fait en tenant compte de toutes les informations disponibles, sans moyennner les mesures redondantes. En raison de la coupure fréquentielle abrupte imposée par la couverture fréquentielle H de l'instrument, il est nécessaire d'amortir les composantes de Fourier de la température de brillance restaurée avec une fenêtre d'apodisation W afin de diminuer les phénomènes de Gibbs [8]. Cette distribution de température ne sera donc pas comparée à la température de brillance T à son plus haut niveau de résolution, mais à une version lissée au niveau de résolution de l'instrument et apodisée par la même fenêtre W . L'objectif est donc de restaurer la distribution de température \mathcal{T}_w définie par la relation de convolution $\mathcal{T}_w = W \star T$. Dans les simulations numériques présentées dans la dernière partie de cet article, la fenêtre de Hanning de la Figure 5 a été utilisée. Bien évidemment, le choix peut se porter sur une autre fenêtre mais le but n'est pas ici d'engager une discussion sur le compromis à faire entre résolution spatiale et sensibilité radiométrique [8]. En effet, puisque la fenêtre d'apodisation est la même pour toutes les simulations, la comparaison des méthodes proposées sera significative du point de vue de leurs performances relatives.

4.2. Analyse du problème

La dimension de l'espace de travail objet E est plus élevée que celle de l'espace des données F , puisque le nombre n^2 de cellules élémentaires dans la grille spatiale $\mathbb{G}(\mathcal{H}^*)\delta\xi$ est

supérieur au nombre $\ell(\ell - 1)$ de fréquences (redondantes) dans la liste \mathcal{L} . Le système linéaire

$$\mathbf{G}T = V \quad (20)$$

est donc sous déterminé. Lorsque V est dans l'image de \mathbf{G} , il en résulte une multitude de solutions pour T et conformément à la définition donnée par Hadamard [12], ce problème inverse est donc mal posé.

Une première approche [13] consiste à déterminer, parmi les solutions de (20), la solution de norme minimale en résolvant le problème d'optimisation avec contrainte :

$$\begin{cases} \min_{T \in E} \|T\|_E^2 \\ \mathbf{G}T = V \end{cases} \quad (21)$$

La solution de (21) est bien évidemment $T_r = \mathbf{G}^+ V$, où \mathbf{G}^+ est l'inverse généralisé de More-Penrose de \mathbf{G} . Conformément à l'objectif établi précédemment, la solution apodisée avec une fenêtre W s'écrit alors :

$$\mathcal{T}_{rw} = \mathbf{U}^* \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{U} \mathbf{G}^+ V. \quad (22)$$

Dans cette expression, $\widehat{\mathbf{W}}$ est la matrice diagonale dont les éléments non nuls sont les coefficients de \widehat{W} . Cependant, d'un point de vue numérique, on constate que cette solution est très sensible au bruit et aux erreurs de modélisation. Par ailleurs, cette approche ne peut pas être envisagée lorsque la matrice \mathbf{G} est mal conditionnée ou de rang déficient, ce qui exclut de calculer \mathbf{G}^+ en utilisant l'expression classique $\mathbf{G}^*(\mathbf{G}\mathbf{G}^*)^{-1}$

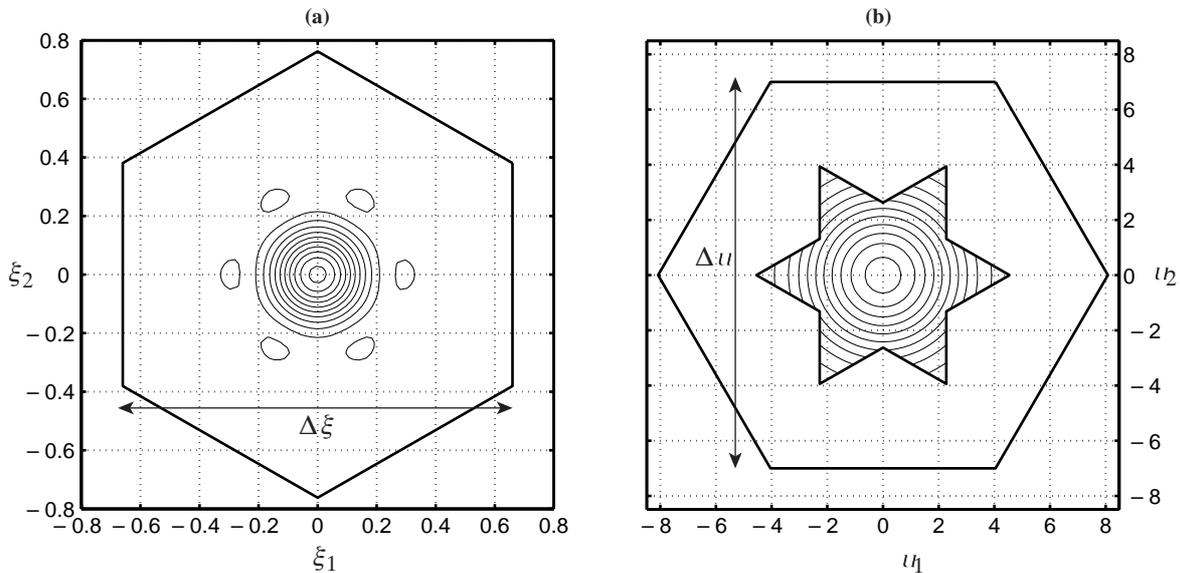


Figure 5. Fenêtre de Hanning $\widehat{W}(\mathbf{u})$ dans le domaine de Fourier (b) avec $\Delta u = 16\delta u = 14$ et réponse impulsionnelle associée $W(\xi)/W(\mathbf{0})$ dans le domaine spatial (a) avec $\Delta\xi = 16\delta\xi \simeq 1.32$ (les courbes de niveau varient de 0 à 1 par pas de 0.1).

puisque l'inverse de $\mathbf{G}\mathbf{G}^*$ n'est pas toujours défini. Cette situation se rencontre dès lors que des lignes de base redondantes sont associées à des éléments instrumentaux identiques, sinon numériquement très proches.

4.3. Régularisation mathématique

Dans le cas d'un instrument idéal, l'opérateur \mathbf{G} n'est pas de rang plein en raison des lignes de base redondantes. Plus précisément, $\ell(\ell - 1)$ étant le nombre de fréquences spatiales (redondantes) dans la liste \mathcal{L} , le rang de \mathbf{G} est égal au nombre de fréquences spatiales dans la couverture fréquentielle, c'est-à-dire $\ell(\ell - 1) - m$ où m est le nombre de redondances dans \mathcal{L} . Par contre, dans le cas d'un instrument réel, avec des antennes et des récepteurs différents, l'opérateur \mathbf{G} est de rang plein malgré les lignes de base redondantes puisque ces dernières sont associées à des éléments instrumentaux différents. Une seconde approche consiste donc à régulariser le problème (20) en substituant à \mathbf{G} l'opérateur \mathbf{G}_m de rang $\ell(\ell - 1) - m$ le plus proche de \mathbf{G} au sens quadratique. Ceci peut être fait en effectuant une décomposition en valeurs singulières tronquée de \mathbf{G} [14] dans laquelle on écarte les m plus petites valeurs singulières [12] (de sorte que $\mathbf{G}_0 \equiv \mathbf{G}$). Ainsi, si on désigne par μ_i les $\ell(\ell - 1)$ valeurs singulières de \mathbf{G} rangées par ordre croissant et par \mathbf{v}_i et \mathbf{u}_i les vecteurs singuliers associés à gauche et à droite, on a alors :

$$\mathbf{G}_m = \sum_{i=m+1}^{\ell(\ell-1)} \mu_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T, \quad m \geq 0. \quad (23)$$

La solution de moindre norme ainsi régularisée est $T_r = \mathbf{G}_m^+ V$, où \mathbf{G}_m^+ est l'inverse généralisé de More-Penrose de \mathbf{G}_m . La solution apodisée avec une fenêtre W s'écrit alors :

$$\mathcal{T}_{rw} = \mathbf{U}^* \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{U} \mathbf{G}_m^+ V. \quad (24)$$

L'impact des valeurs singulières écartées sur la stabilité de la solution en présence de bruit ou d'erreurs de modélisation sera illustré dans la dernière partie de cet article, et le lien sera fait avec l'approche proposée plus loin en relation avec le nombre de degrés de liberté du problème (20). Du point de vue de la propagation des erreurs, l'analyse standard au premier ordre [14] fournit les bornes suivantes

$$\frac{\|\Delta \mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}}{\|\mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}} \leq \frac{\mu_{\ell(\ell-1)}}{\mu_{m+1}} \frac{\|T\|_E}{\|\mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}} \frac{\|\Delta V\|_F}{\|V\|_F}, \quad (25)$$

$$\frac{\|\Delta \mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}}{\|\mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}} \leq \left(\frac{\mu_{\ell(\ell-1)}}{\mu_{m+1}} + \frac{\mu_{\ell(\ell-1)}^2}{\mu_{m+1}^2} \frac{\|V - \mathbf{G}T_r\|_F}{\|\mathbf{G}T_r\|_F} \right) \frac{\|T_r\|_E}{\|\mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}} \frac{\|\Delta \mathbf{G}\|_2}{\|\mathbf{G}\|_2}, \quad (26)$$

dans lesquelles ΔV et $\Delta \mathbf{G}$ représentent respectivement des perturbations sur le second membre V et sur la matrice \mathbf{G} de (20)

et où $\Delta \mathcal{T}_{rw} = \mathcal{T}_{rw} - \mathcal{T}_w$ est l'erreur de reconstruction résultant de ces perturbations. Dans le cas particulier où la perturbation ΔV est Gaussienne, on a l'égalité suivante

$$\frac{\sqrt{E[\|\Delta \mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}^2]}}{\|\mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}} = \frac{\sqrt{\sigma_{\xi}} \|V\|_F}{\sqrt{\sigma_{\mathbf{u}}} \|\mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}} \frac{\|\mathbf{U}^* \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{U} \mathbf{G}_m^+\|_{fro}}{\sqrt{\ell(\ell-1)}} \frac{\sqrt{E[\|\Delta V\|_F^2]}}{\|V\|_F}, \quad (27)$$

où $\|\cdot\|_{fro}$ est la norme de Frobenius et où $E[\cdot]$ désigne l'espérance mathématique. Les inégalités (25) et (26) reflètent la sensibilité à des perturbations mais comme nous le verrons dans la dernière partie ces bornes sont souvent très pessimistes. En revanche, l'égalité (27) établie dans l'Annexe B représente la propagation moyenne de ces erreurs.

4.4. Régularisation physique

Les radiomètres imageurs à synthèse d'ouverture étant des instruments à bande passante limitée, le problème (20) est mal posé en raison d'une perte d'information au-delà de la couverture fréquentielle H . Il est donc nécessaire d'introduire une information *a priori* pour compenser cette perte irréversible. Une telle information ne peut bien évidemment pas être issue des données elles-mêmes, mais doit au contraire exprimer des caractéristiques physiques de la solution et/ou de l'instrument. Dans ce contexte, il est donc naturel de prendre en compte la limite de résolution angulaire de l'instrument et de rechercher une solution dans le sous-espace \mathcal{E} des fonctions à bande passante limitée dans H puisque l'instrument utilisé ici ne transmet aucune information en dehors de la couverture fréquentielle [9]. La solution ainsi obtenue est la solution du problème d'optimisation avec contrainte

$$\begin{cases} \min_{T \in E} \|V - \mathbf{G}T\|_F^2 \\ (\mathbf{I}_E - \mathbf{P}_H)T = 0 \end{cases} \quad (28)$$

où \mathbf{P}_H est le projecteur de E sur \mathcal{E} . Si on désigne par \widehat{T} les composantes de Fourier de T à l'intérieur de H , la contrainte peut s'exprimer sous la forme $\mathbf{U}T = \mathbf{Z}\widehat{T}$. En reportant l'expression de $T = \mathbf{U}^* \mathbf{Z}\widehat{T}$ dans le critère quadratique de (28) on obtient alors le problème d'optimisation équivalent

$$\min_{\widehat{T} \in \widehat{\mathcal{E}}} \|V - \mathbf{A}\widehat{T}\|_F^2, \quad \text{avec } \mathbf{A} = \mathbf{G}\mathbf{U}^* \mathbf{Z}. \quad (29)$$

La fonction qui réalise le minimum de (29) est aussi la solution unique de l'équation normale $\mathbf{A}^* \mathbf{A} \widehat{T} = \mathbf{A}^* V$. Ce problème peut être résolu en faisant appel à une méthode itérative ou bien de manière directe puisque la matrice carrée $\mathbf{A}^* \mathbf{A}$ n'est pas singulière [15]. La solution de l'équation normale s'écrit donc $\widehat{T}_r = \mathbf{A}^+ V$, où $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^* \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^*$ est l'inverse généralisé de

More-Penrose de \mathbf{A} , et la solution apodisée par une fenêtre W s'écrit alors :

$$\mathcal{T}_{rw} = \mathbf{U}^* \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{Z} \mathbf{A}^+ V. \quad (30)$$

En ce qui concerne la propagation des erreurs, l'analyse standard au premier ordre [14] donne ici les approximations suivantes

$$\frac{\|\Delta \mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}}{\|\mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}} \leq \frac{\sigma_{\ell(\ell-1)-m}}{\sigma_1} \frac{\|T\|_E}{\|\mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}} \frac{\|\Delta V\|_F}{\|V\|_F}, \quad (31)$$

$$\frac{\|\Delta \mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}}{\|\mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}} \leq \left(\frac{\sigma_{\ell(\ell-1)-m}}{\sigma_1} + \frac{\sigma_{\ell(\ell-1)-m}^2}{\sigma_1^2} \frac{\|V - \mathbf{A} \widehat{\mathcal{T}}_r\|_F}{\|\mathbf{A} \widehat{\mathcal{T}}_r\|_F} \right) \frac{\|\mathcal{T}_r\|_{\mathcal{E}}}{\|\mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}} \frac{\|\Delta \mathbf{G}\|_2}{\|\mathbf{G}\|_2}, \quad (32)$$

où les σ_i sont les $\ell(\ell-1) - m$ valeurs singulières de \mathbf{A} rangées par ordre croissant. Conformément à la relation établie dans l'Annexe B, la propagation moyenne de ces erreurs est ici gouvernée par l'égalité :

$$\frac{\sqrt{\mathbb{E}[\|\Delta \mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}^2]}}{\|\mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}} = \frac{\sqrt{\sigma_{\xi}} \|V\|_F}{\sqrt{\sigma_{\mathbf{u}}} \|\mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}} \frac{\|\mathbf{U}^* \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{Z} \mathbf{A}^+\|_{fro}}{\sqrt{\ell(\ell-1)}} \frac{\sqrt{\mathbb{E}[\|\Delta V\|_F^2]}}{\|V\|_F}. \quad (33)$$

5. Simulations numériques et résultats

Les simulations numériques ont été réalisées pour un réseau en forme de Y équipé de 3 antennes équidistantes par bras auxquelles il faut ajouter une antenne centrale, pour arriver à un nombre total d'antennes et de récepteurs $\ell = 10$. L'espacement d entre les antennes adjacentes a été fixé à $0.875 \lambda_0$. Le nombre de visibilité complexes simultanément fournies par cet instrument est donc égal à $\ell(\ell-1) = 90$ (45 en tenant compte du caractère hermitien de la relation (2)), alors qu'il n'y a que $\ell(\ell-1) - m = 72$ fréquences spatiales dans la couverture fréquentielle H en forme d'étoile (36 en tenant compte du caractère hermitien de la transformée de Fourier). La dimension des grilles d'échantillonnage $\mathbb{G}(\mathcal{H}^*) \delta \xi$ et $\mathbb{G}(n\mathcal{H}) \delta u$ a été fixée à $n = 16$, de sorte que l'espace E est isomorphe à \mathbb{R}^{256} .

Une seule mesure du degré de cohérence spatiale à l'espacement nul, $V(\mathbf{0})$, a été incluse dans l'opérateur de modélisation (19). L'espace dual $\widehat{\mathcal{E}}$ et l'espace des données F sont donc respectivement isomorphes à \mathbb{C}^{36+1} et \mathbb{C}^{45+1} . Pour des raisons de mise en œuvre numérique, il est préférable de travailler dans les espaces réels sous-jacents \mathbb{R}^{73} et \mathbb{R}^{91} . La taille de la matrice réelle \mathbf{G} est donc 91×256 , alors que celle de la matrice réelle \mathbf{A} est seulement 91×73 .

La distribution des températures de brillance T de la scène test choisie pour les simulations est montrée sur la Figure 6a à son plus haut niveau de résolution et sur la Figure 6b au niveau de résolution de l'instrument et amortie par la fenêtre de Hanning W de la Figure 5. Cette dernière, définie par la relation de convolution $\mathcal{T}_w = W \star T$, est la carte de température de brillance que l'on cherchera à restaurer à partir des visibilité complexes de T .

La Figure 7 illustre le caractère bande passante limitée dans la couverture fréquentielle H des radiomètres imageurs à synthèse d'ouverture. En effet, comme indiqué dans la section 4.1, une reconstruction à l'aide du simple opérateur $\mathbf{U}^* \mathbf{Z}$ ne permet de restaurer qu'une version lissée de T , même dans le cas d'un instrument idéal. Dans le cas contraire, il apparaît clairement qu'une telle approche n'est pas acceptable si les antennes et les récepteurs sont tous différents.

Les visibilité complexes ont été simulées avec la distribution T de la Figure 6a pour un instrument modélisé par la relation (2) avec les paramètres des Tables 1 et 2. Dans tous les cas envisagés, les solutions \mathcal{T}_{rw} de moindre norme (22) et à bande passante limitée (30) ont été comparées et la qualité de la reconstruction a été évaluée par rapport à l'objectif \mathcal{T}_w de la Figure 6b. Dans une première étape, aucun bruit n'a été introduit sur les mesures interférométriques simulées. Comme on pouvait s'y attendre, il n'y a pas de différence notable entre les deux reconstructions (22) et (30), représentées sur la Figure 8, et la solution cherchée \mathcal{T}_w de la Figure 6b : l'erreur quadratique moyenne $\sigma_{\Delta T}^0$ est de l'ordre de 1.010 K pour la solution de moindre norme et 0.937 K pour la solution à bande passante limitée. Cette erreur est due aux hautes fréquences de T qui ont contribué aux visibilité complexes V , alors que les deux reconstructions sont effectuées à la résolution de l'instrument et amorties par la fenêtre de Hanning. Cette erreur est donc une erreur systématique qui dépend de la scène T , de la fenêtre d'apodisation W et bien évidemment de la limite de résolution de l'instrument.

Dans un second temps, un bruit radiométrique a été rajouté aux mesures simulées. Plus précisément, pour chaque ligne de base \mathbf{d}_{kl} un bruit radiométrique gaussien ΔV d'écart type $\sigma_{\Delta V} = 0.08$ K a été rajouté aux parties réelles et imaginaires des visibilité complexes $V(\mathbf{u}_{kl})$. Les cartes de température de brillance reconstruites sont représentées sur la Figure 9. Comme on pouvait s'y attendre, la solution de moindre norme est plus sensible au bruit radiométrique que la solution à bande passante limitée : l'erreur quadratique moyenne $\sigma_{\Delta T}$ est de l'ordre de 2.118 K pour la solution de moindre norme (22) et 0.938 K pour la solution à bande passante limitée (30). En tenant compte de l'erreur systématique $\sigma_{\Delta T}^0$, l'erreur quadratique moyenne $\sqrt{(\sigma_{\Delta T})^2 - (\sigma_{\Delta T}^0)^2}$ qui résulte de la propagation de ΔV est donc de l'ordre de 1.862 K pour (22) et seulement 0.043 K pour (30). En conséquence, le facteur d'amplification du bruit radiométrique est environ 45 fois plus élevé dans le premier cas, 23.3 K/K, que dans le second, 0.54 K/K.

La sensibilité des processus de reconstruction aux erreurs de modélisation a été étudiée de la même manière en choisissant, par exemple, de perturber le diagramme de rayonnement des

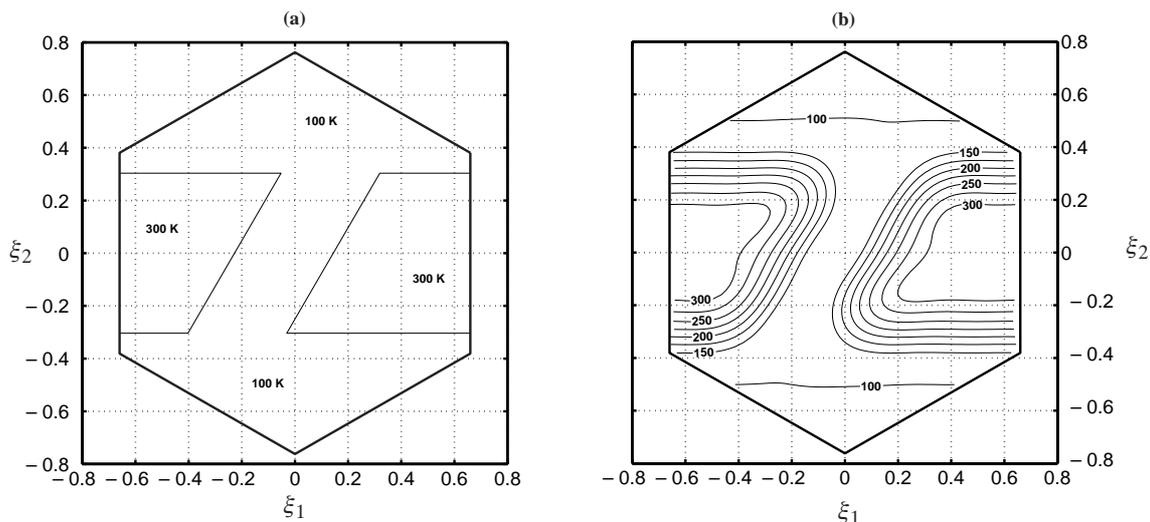


Figure 6. – Cartes de la température de brillance de la scène test (a) à son plus haut niveau de résolution T et (b) au niveau de résolution de l'instrument et amortie par la fenêtre de Hanning $T_w = W \star T$

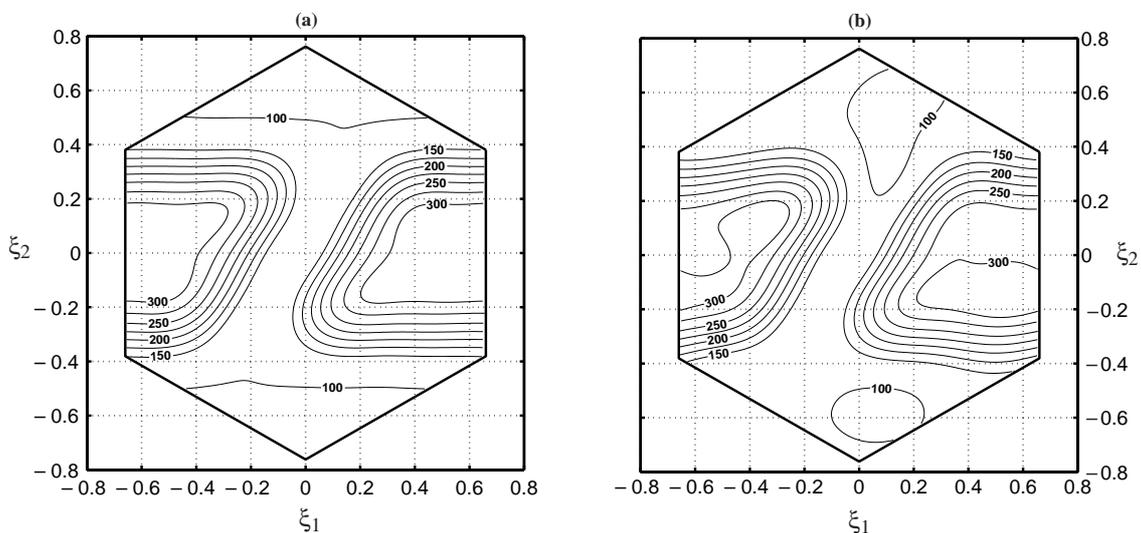


Figure 7. Cartes de température de brillance reconstruites avec une simple transformée de Fourier inverse des visibilités complexes pour (a) un instrument idéal et (b) un instrument avec des antennes et des récepteurs différents

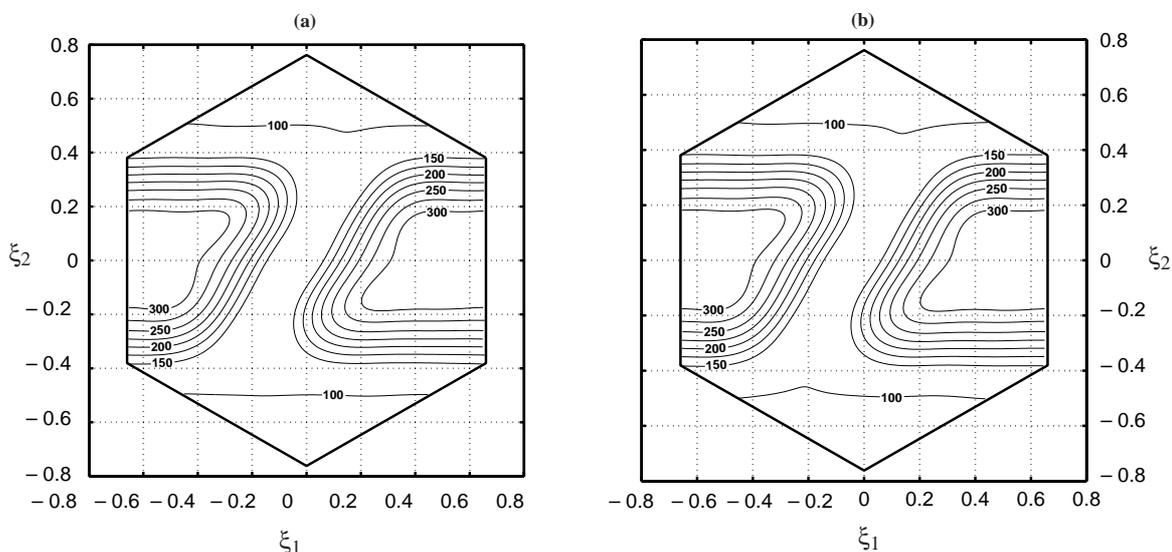


Figure 8. Cartes de température de brillance reconstruites avec (a) l'approche norme minimale et (b) l'approche bande passante limitée

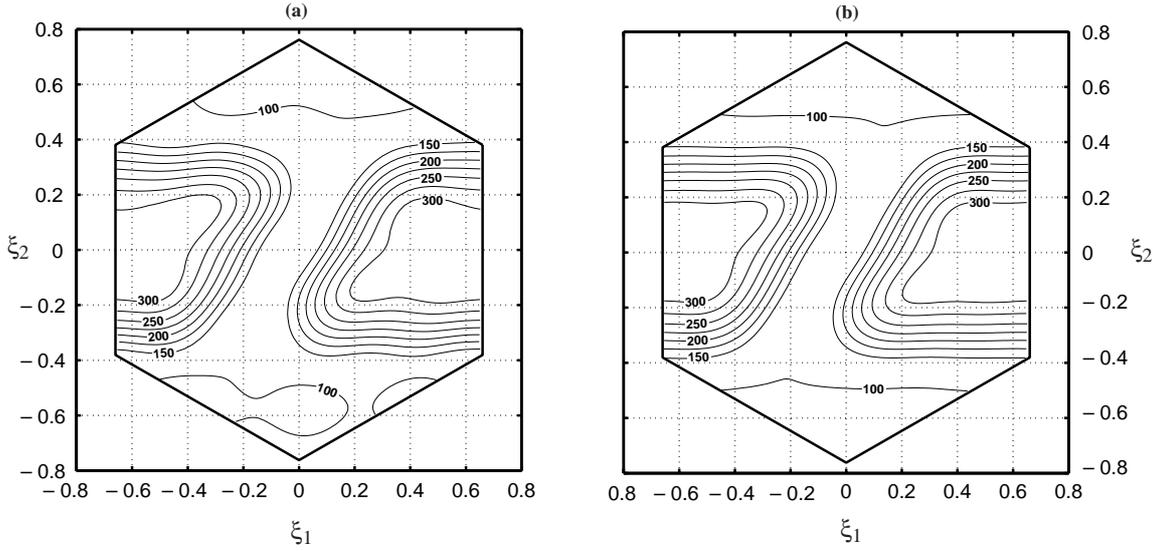


Figure 9. Cartes de température de brillance reconstruites en présence de bruit radiométrique avec (a) l'approche norme minimale et (b) l'approche bande passante limitée

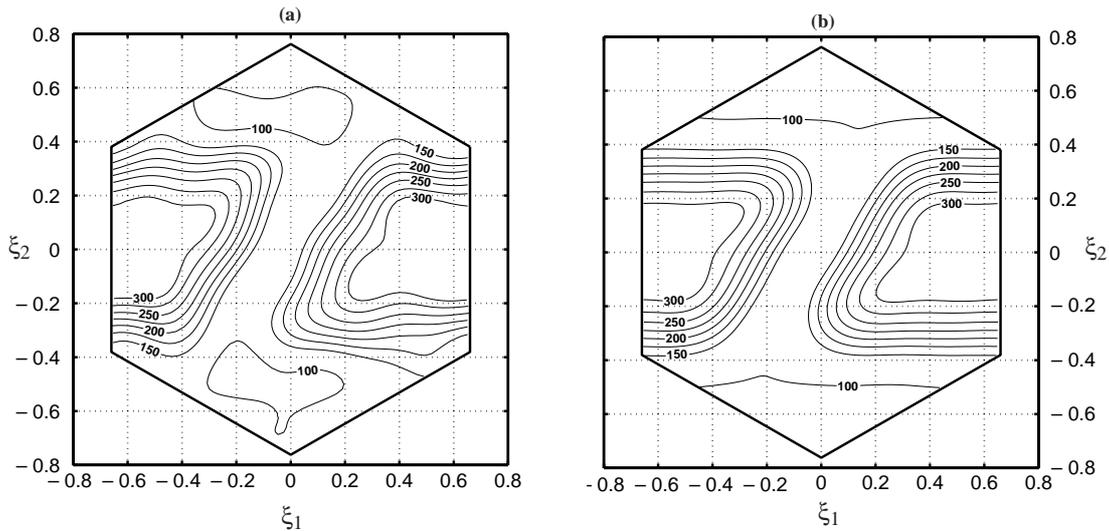


Figure 10. Cartes de température de brillance reconstruites en présence d'erreurs de modélisation avec (a) l'approche norme minimale et (b) l'approche bande passante limitée

antennes. Plus exactement, pour chaque antenne une erreur aléatoire de $\pm 0.2^\circ$ sur les largeurs à mi-hauteur θ_1 et θ_2 du diagramme de rayonnement a été introduite. Les cartes de température de brillance reconstruites sont représentées sur la Figure 10. Comme on pouvait s'y attendre encore, la solution de moindre norme est plus sensible aux erreurs que la solution à bande passante limitée: l'erreur quadratique moyenne $\sigma_{\Delta T}$ est ici de l'ordre de 11.80 K pour la solution de moindre norme (22) et 0.955 K pour la solution à bande passante limitée (30). En tenant compte à nouveau de la contribution systématique $\sigma_{\Delta T}^0$, l'erreur quadratique moyenne qui résulte de la propagation de cette perturbation de l'instrument est donc de l'ordre de 11.76 K pour (22) et seulement 0.184 K pour (30). En conséquence, le

facteur d'amplification de cette erreur de modélisation sur le diagramme de rayonnement des antennes est environ 65 fois plus élevé dans le premier cas, 58.8 K/°, que dans le second, 0.92 K/°.

Du point de vue de l'algèbre linéaire, la propagation du bruit radiométrique et des erreurs de modélisation précédentes est illustrée sur les Figures 11 et 12 où des simulations ont été effectuées avec 10 000 tirages aléatoires de $\sigma_{\Delta V}$ dans l'intervalle $[0, 0.2 \text{ K}]$ et 10 000 erreurs sur les largeurs à mi-hauteur θ_1 et θ_2 dans l'intervalle $[-1^\circ, 1^\circ]$. La situation est bien meilleure que celle gouvernée par les inégalités de l'analyse standard au premier ordre. En effet, il s'avère que dans le cas du bruit radiométrique le facteur moyen d'amplification des erreurs est de

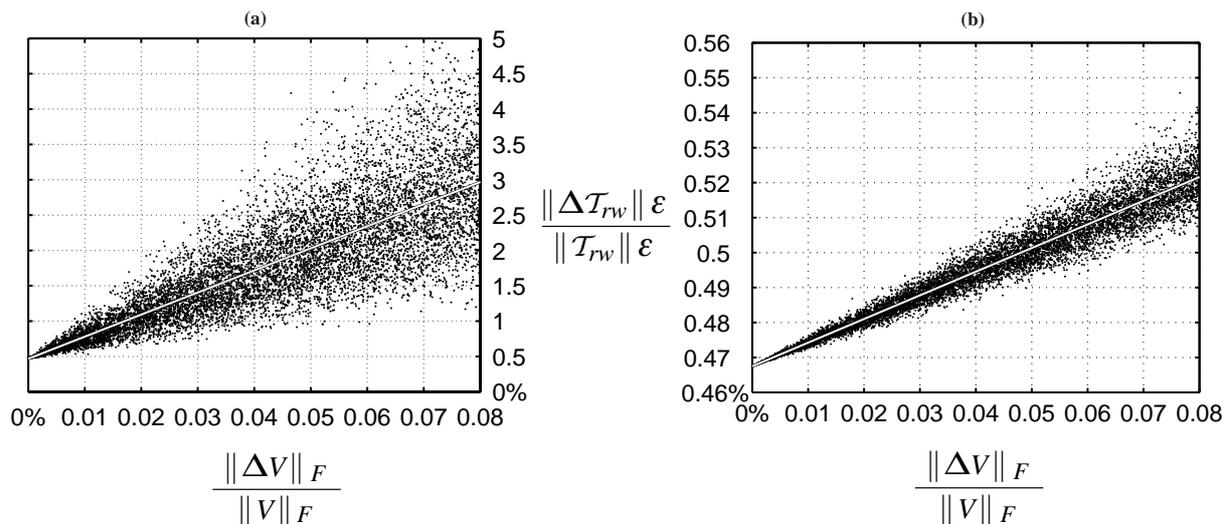


Figure 11. Propagation du bruit radiométrique au cours du processus de reconstruction de (a) la solution de moindre norme et de (b) la solution à bande passante limitée

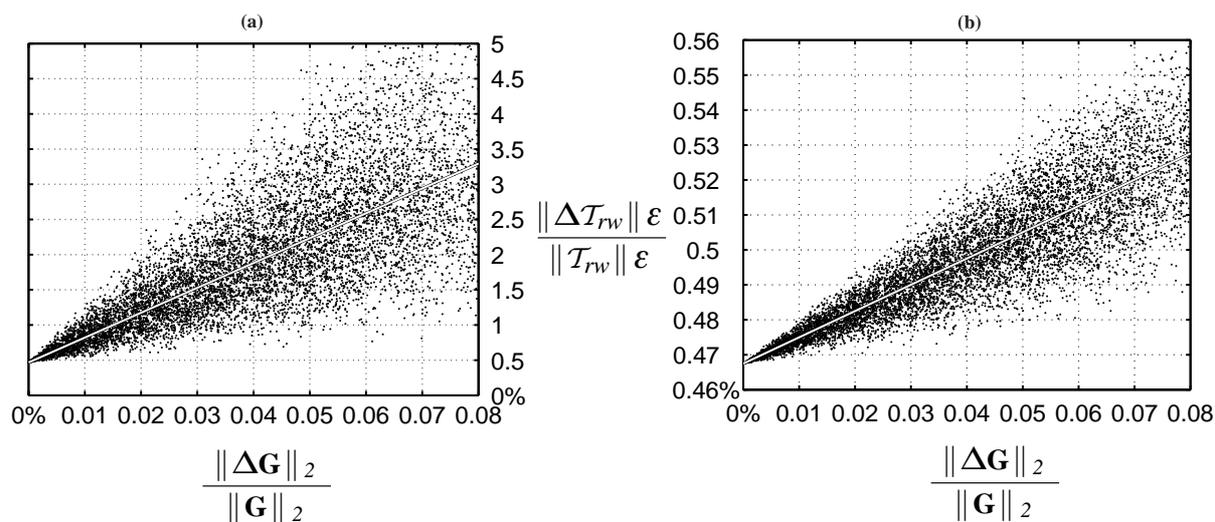


Figure 12. Propagation des erreurs de modélisation au cours du processus de reconstruction de (a) la solution de moindre norme et de (b) la solution à bande passante limitée

l'ordre de 30 pour la solution de moindre norme et de 0.66 pour la solution à bande passante limitée, ce qui est en parfait accord avec les facteurs moyens des égalités (27) et (33) dont les valeurs sont ici égales à 32 et 0.68, alors que les bornes supérieures données par les relations (25) et (31) sont respectivement 7 000 et 4.34. De même, dans le cas des erreurs de modélisation, le facteur moyen d'amplification des erreurs est de l'ordre de 35 pour la solution de moindre norme et de 0.75 pour la solution à bande passante limitée, alors que les bornes supérieures données par les relations (26) et (32) sont respectivement 7 000 et 4.29.

Cette différence importante dans le comportement des solutions (22) et (30) vis-à-vis de la propagation des erreurs n'est pas sur-

prenante et le rôle joué par les plus petites valeurs singulières de \mathbf{G} n'est pas étranger à cette amplification importante du bruit et des erreurs de modélisation. À ce sujet, les spectres des valeurs singulières de \mathbf{G} et de \mathbf{A} sont représentés sur la Figure 13. Comme on pouvait s'y attendre, les 73 valeurs singulières σ_i de \mathbf{A} sont regroupées dans un intervalle relativement étroit, ce qui n'est pas le cas de \mathbf{G} pour lequel les valeurs singulières μ_i les plus faibles, dont le nombre est exactement égal au nombre de lignes de base redondantes, sont dans un intervalle plus large et bien disjoint du précédent.

Ce type de distribution des valeurs singulières est souvent rencontré dans les problèmes inverses en imagerie [12]. Il suggère de filtrer les plus petites valeurs singulières à l'aide d'une

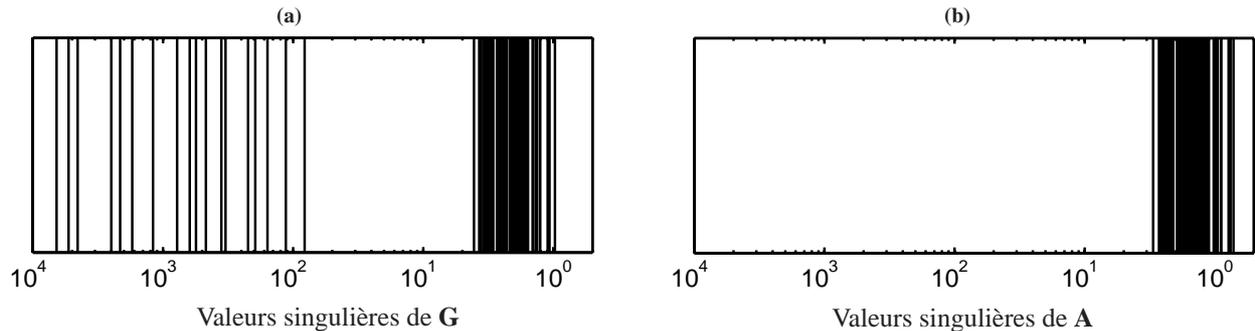


Figure 13. Valeurs singulières des matrices (a) \mathbf{G} 91×256 et (b) \mathbf{A} 91×73

décomposition en valeurs singulières tronquée [14]. Le lien entre cette régularisation « mathématique » et la régularisation « physique » associée à la notion de bande passante limitée est ici clairement illustré. Le nombre de degrés de liberté du problème (20) étant égal à 73 (le nombre de fréquences dans la couverture fréquentielle H) on retrouve en effet dans le spectre de \mathbf{G} un premier groupe de 73 valeurs qui jouent le même rôle que les 73 valeurs singulières de \mathbf{A} et un second groupe de 18 valeurs, plus petites, associées aux 18 lignes de base redondantes et à l'origine de la borne supérieure du facteur d'amplification voisine de 7 000. Les simulations ont donc été reconduites dans les mêmes conditions que celles des Figures 9a, 10a et 11a, mais cette fois-ci pour la solution de moindre norme (24) avec $m = 18$. Comme on pouvait s'y attendre, les résultats obtenus sont très proches, sinon identiques, à ceux des Figures 9b, 10b et 11b. Par ailleurs, l'erreur systématique $\sigma_{\Delta T}^0$ reste inchangée et est toujours de l'ordre de 1.010 K contre 0.937 K pour la solution à bande passante limitée.

Le choix du bruit et des erreurs de modélisation peut bien évidemment être critiqué, cependant leur niveau est de l'ordre de ce qui est attendu dans la pratique. Les diagrammes des antennes et les filtres des récepteurs ne sont pas ceux de l'instrument spatial SMOS, toutefois leur allure n'est pas très éloignée de la forme finale et la disparité des paramètres des Tables 1 et 2 est volontairement plus importante qu'elle ne sera dans la pratique. Il ne faut pas perdre de vue que l'objectif principal n'est pas de faire ici une revue détaillée des erreurs, mais d'illustrer avant tout leur propagation et de vérifier la stabilité des processus de reconstruction mis en œuvre pour un instrument dont les récepteurs et les antennes ne sont pas tous identiques.

6. Conclusions

La restauration de la distribution de température de brillance d'une scène à partir de mesures interférométriques fournies par

un radiomètre imageur à synthèse d'ouverture a été étudiée. Il a été montré que le problème inverse correspondant est mal posé et doit être régularisé afin d'obtenir une solution unique et stable. Il a aussi été vérifié que la discrétisation d'un tel problème conduit à la résolution numérique d'un système linéaire mal conditionné. Ainsi, le bruit radiométrique ou les erreurs de modélisation affectant les données interférométriques peuvent être transmis à la distribution de température de brillance reconstruite avec un facteur d'amplification important.

Les radiomètres imageurs à synthèse d'ouverture étant des instruments à bande passante limitée, le problème inverse a été reformulé en prenant en compte cette spécificité. Plus précisément, le principe de la régularisation adoptée consiste à reconstruire une distribution de température au niveau de résolution de l'instrument. Ce principe de régularisation, dont le sens physique est directement lié à des caractéristiques propres à l'instrument, a été comparé à celui d'une régularisation dont l'argumentation est essentiellement mathématique. Le lien entre les deux approches a été établi en relation avec le nombre de degrés de liberté du problème inverse.

Du point de vue de la mise en œuvre informatique, le problème a été analysé sans faire référence à un algorithme en particulier : la solution peut être obtenue en faisant appel à une méthode itérative ou bien de manière directe. Les dimensions du problème ont été réduites au nombre minimum d'inconnues (ou de degrés de liberté) tout en prenant en compte, au sens des moindres carrés, l'ensemble des données interférométriques sans moyenner les éventuelles mesures redondantes. Enfin, la stabilité des processus de reconstruction étudiés a été illustrée à l'aide de simulations numériques conduites dans le cadre du démonstrateur de la mission spatiale SMOS de l'Agence Spatiale Européenne. Si la propagation du bruit ou des erreurs de modélisation est sensiblement la même, la solution de moindre norme présente une erreur systématique plus importante que la solution à bande passante limitée.

Annexe A

Nous établissons ici l'expression de l'adjoint de l'opérateur de modélisation de l'instrument défini par la relation (19). D'après la définition des produits scalaires dans E et dans F

$$(T^{(1)} | T^{(2)})_E \equiv \sigma_{\xi} \sum_{\mathbf{p} \in (\mathcal{H}^*)} \bar{T}_{\mathbf{p}}^{(1)} T_{\mathbf{p}}^{(2)},$$

et

$$(V^{(1)} | V^{(2)})_F \equiv \sigma_{\mathbf{u}} \sum_{k,l=1}^{\ell} \bar{V}_{kl}^{(1)} V_{kl}^{(2)},$$

il vient:

$$\begin{aligned} (V | \mathbf{G}T)_F &\equiv \sigma_{\mathbf{u}} \sum_{k,l=1}^{\ell} \bar{V}_{kl} (\mathbf{G}T)_{kl} \\ &= \sigma_{\mathbf{u}} \sum_{k,l=1}^{\ell} \bar{V}_{kl} \sigma_{\xi} \sum_{\mathbf{p} \in (\mathcal{H}^*)} \frac{F_{k,\mathbf{p}} \bar{F}_{l,\mathbf{p}} T_{\mathbf{p}}}{\sqrt{1 - \|\xi_{\mathbf{p}}\|^2}} \tilde{r}_{kl} \left(\frac{-\mathbf{u}_{kl} \xi_{\mathbf{p}}}{f_o} \right) e^{-2j\pi \mathbf{u}_{kl} \xi_{\mathbf{p}}} \\ &= \sigma_{\xi} \sum_{\mathbf{p} \in (\mathcal{H}^*)} T_{\mathbf{p}} \sigma_{\mathbf{u}} \sum_{k,l=1}^{\ell} \frac{F_{k,\mathbf{p}} \bar{F}_{l,\mathbf{p}} \bar{V}_{kl}}{\sqrt{1 - \|\xi_{\mathbf{p}}\|^2}} \tilde{r}_{kl} \left(\frac{-\mathbf{u}_{kl} \xi_{\mathbf{p}}}{f_o} \right) e^{-2j\pi \mathbf{u}_{kl} \xi_{\mathbf{p}}} \\ &= \sigma_{\xi} \sum_{\mathbf{p} \in (\mathcal{H}^*)} (\bar{\mathbf{G}}^* V)_{\mathbf{p}} T_{\mathbf{p}} \equiv (\mathbf{G}^* V | T)_E. \end{aligned}$$

D'où la définition de \mathbf{G}^* :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^* : F &\longrightarrow E \\ V &\longmapsto \mathbf{G}^* V = T \end{aligned}$$

avec, $\forall \mathbf{p} \in \mathbb{G}(\mathcal{H}^*)$:

$$T_{\mathbf{p}} = \sigma_{\mathbf{u}} \sum_{k,l=1}^{\ell} \frac{\bar{F}_{k,\mathbf{p}} F_{l,\mathbf{p}}}{\sqrt{1 - \|\xi_{\mathbf{p}}\|^2}} V_{kl} \tilde{r}_{kl} \left(\frac{-\mathbf{u}_{kl} \xi_{\mathbf{p}}}{f_o} \right) e^{+2j\pi \mathbf{u}_{kl} \xi_{\mathbf{p}}}.$$

Annexe B

Nous établissons ici l'expression de la propagation moyenne du bruit radiométrique au cours des différents processus de reconstruction. Les vecteurs aléatoires ΔV et $\Delta \mathcal{T}_{rw}$ sont liés par la relation linéaire $\Delta \mathcal{T}_{rw} = \mathbf{R} \Delta V$, où \mathbf{R} est l'opérateur de reconstruction explicité dans les relations (22), (24) ou (30). Nous supposons que le bruit radiométrique est gaussien, de valeur moyenne nulle et de variance $\sigma_{\Delta V}^2$. Il vient alors d'après la définition du produit scalaire dans \mathcal{E} , semblable à celle du produit scalaire dans E :

$$\begin{aligned} E[\|\Delta \mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}^2] &\equiv \sigma_{\xi} E[\text{trace}(\Delta \mathcal{T}_{rw} \overline{\Delta \mathcal{T}_{rw}}^T)] = \sigma_{\xi} \text{trace}(E[\Delta \mathcal{T}_{rw} \overline{\Delta \mathcal{T}_{rw}}^T]) \\ &= \sigma_{\xi} \text{trace}(E[\mathbf{R} \Delta V \overline{\Delta V}^T \mathbf{R}^*]) = \sigma_{\xi} \text{trace}(\mathbf{R} E[\Delta V \overline{\Delta V}^T] \mathbf{R}^*) \\ &= \sigma_{\xi} \text{trace}(\mathbf{R} \sigma_{\Delta V}^2 \mathbf{I}_F \mathbf{R}^*) = \sigma_{\xi} \sigma_{\Delta V}^2 \text{trace}(\mathbf{R} \mathbf{R}^*) \\ &= \sigma_{\xi} \sigma_{\Delta V}^2 \|\mathbf{R}\|_{f_{ro}}^2. \end{aligned}$$

De même, d'après la définition du produit scalaire dans F :

$$\begin{aligned} E[\|\Delta V\|_F^2] &\equiv \sigma_{\mathbf{u}} E[\text{trace}(\Delta V \overline{\Delta V}^T)] \\ &= \sigma_{\mathbf{u}} \text{trace}(E[\Delta V \overline{\Delta V}^T]) \\ &= \sigma_{\mathbf{u}} \ell(\ell - 1) \sigma_{\Delta V}^2. \end{aligned}$$

Il vient alors:

$$\begin{aligned} \frac{E[\|\Delta \mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}^2]}{\|\mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}^2} &= \frac{\sigma_{\xi}}{\|\mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}^2} \sigma_{\Delta V}^2 \|\mathbf{R}\|_{f_{ro}}^2 \\ &= \frac{\sigma_{\xi}}{\sigma_{\mathbf{u}} \|\mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}^2} \frac{\|\mathbf{R}\|_{f_{ro}}^2}{\ell(\ell - 1)} E[\|\Delta V\|_F^2]. \end{aligned}$$

D'où l'égalité

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{E[\|\Delta \mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}^2]}}{\|\mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}} &= \frac{\sqrt{\sigma_{\xi}} \|\mathbf{R}\|_{f_{ro}}}{\sqrt{\sigma_{\mathbf{u}} \|\mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}}} \frac{\sqrt{E[\|\Delta V\|_F^2]}}{\|\mathbf{R}\|_{f_{ro}}}, \end{aligned}$$

et les relations (27) et (33) qui en découlent en substituant à \mathbf{R} son expression complète.

Références

- [1] Y.H. Kerr, P. Waldteufel, J.-P. Wigneron, J.-M. Martinuzzi, J. Font and M. Berger, *Soil Moisture Retrieval from Space: The Soil Moisture and Ocean Salinity (SMOS) Mission*, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 39(8), pp. 1729-1735, 2001.
- [2] A.R. Thompson, G.W. Swenson and J.W. Moran, *Interferometry and Synthesis in Radio Astronomy*, John Wiley & Sons Inc., 1st ed., 1986.
- [3] F.T. Ulaby, R.K. Moore and A.K. Fung, *Microwave Remote Sensing, Active and Passive: Fundamentals and Radiometry (Vol. 1)*, Artech House Inc., 1st ed., 1981.
- [4] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, Cambridge University Press, 7th ed., 1999.
- [5] C.S. Ruf, C.T. Swift, A.B. Tanner and D.M. LeVine, *Interferometric synthetic aperture radiometry for the remote sensing of the Earth*, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 26(5), pp. 597-611, 1988.
- [6] F. Bayle, J.-P. Wigneron, Y.H. Kerr, P. Waldteufel, E. Anterrieu, J.-C. Orlhac, A. Chanzy, O. Marloie, M. Bernardini, S. Sobjaerg, J.-C. Calvet, J.-M. Goutoule and N. Skou, *Two-dimensional synthetic aperture images over a land surface scene*, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 40(3), pp. 710-714, 2002.
- [7] M. Martin-Neira, Y. Menard, J.-M. Goutoule and U. Kraft, *MIRAS, a two-dimensional aperture synthesis radiometer*, Proc. of IGARSS'94 (Pasadena, California, USA), pp. 1323-1325, 1994.
- [8] E. Anterrieu, P. Waldteufel and A. Lannes, *Apodization functions for 2D hexagonally sampled synthetic aperture imaging radiometers*, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 40(12), pp. 2531-2542, 2002.
- [9] A. Lannes, E. Anterrieu and K. Bouyoucef, *Fourier Interpolation and Reconstruction via Shannon-type Techniques; Part I: regularization principle*, Journal of Modern Optics, 41(8), pp. 1537-1574, 1994.

- [10] A. Lannes, E. Anterrieu and K. Bouyoucef, *Fourier Interpolation and Reconstruction via Shannon-type Techniques; Part II: technical developments and applications*, Journal of Modern Optics, 43(1), pp. 105-138, 1996.
- [11] R.M. Mersereau, *The processing of hexagonally sampled two-dimensional signals*, Proc. IEEE, 67(6), pp. 930-949, 1979.
- [12] M. Bertero and P. Boccacci, *Introduction to Inverse Problems in Imaging*, Institute of Physics Publishing, 1st ed., 1998.
- [13] A.B. Tanner and C.T. Swift, *Calibration of a synthetic aperture radiometer*, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 31(1), pp. 257-267, 1993.
- [14] C. Hansen, *Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems*, Society for Industrial & Applied Mathematics, 1st ed., 1998.
- [15] A. Bjorck, *Numerical Methods for Least Squares Problems*, Society for Industrial & Applied Mathematics, 1st ed., 1996.



Éric Anterrieu

Eric Anterrieu est né à Brive (Corrèze) en 1965. Il est diplômé de l'Institut National des Sciences Appliquées (INSA) de Toulouse où il obtient en 1988 un titre d'ingénieur et un DEA en « physique du solide ». Après un DEA en « astronomie et astrophysique » de l'université Paul Sabatier (Toulouse III) obtenu en 1989, il soutient en 1992 à l'Observatoire Midi-Pyrénées (OMP) une thèse sur l'algorithmique de reconstruction d'image en synthèse d'ouverture multi-pupillaire. Depuis 1993 il est ingénieur de recherche au CNRS, d'abord au Laboratoire d'Astrophysique de l'OMP, puis au sein de l'équipe « Signal et Image » du CERFACS où il poursuit ses activités de recherche sur la synthèse d'ouverture, notamment dans le cadre de la mission SMOS pour laquelle il est membre du comité scientifique auprès de l'Agence Spatiale Européenne.



Serge Gratton

Serge Gratton est né à Créhange (Moselle) en 1971. Il est diplômé de l'École Nationale Supérieure d'Électrotechnique, d'Électronique, d'Informatique, d'Hydraulique et des Télécommunications (ENSEEIHT) de Toulouse où il obtient un titre d'ingénieur et un DEA en « informatique fondamentale et parallélisme » de l'Institut National Polytechnique de Toulouse (INPT) en 1994. Il soutient en 1998 au CERFACS une thèse sur la fiabilité des calculs sur ordinateur. Il a ensuite travaillé pendant 3 ans au Centre National d'Études Spatiales (CNES) de Toulouse sur des problèmes d'estimation de paramètres non-linéaires. Il occupe maintenant une position de chercheur senior dans l'équipe « Algorithmes Parallèles » du CERFACS où il développe une recherche sur les thèmes de l'assimilation de données et de la résolution de problèmes de moindres carrés.



Bruno Picard

Bruno Picard est né à Romorantin-Lanthenay (Loir-et-cher) en 1977. Il est diplômé de l'université Denis Diderot (Paris VII) où il obtient en 2001 un DEA sur les « méthodes physiques en télédétection ». Il termine actuellement au CERFACS une thèse sur la résolution des problèmes inverses en imagerie micro-onde passive par synthèse d'ouverture dans le cadre du projet SMOS de l'Agence Spatiale Européenne.