

Quelques aperçus sur l'optimisation de la répartition des efforts de recherche d'une cible

Some viewpoints about the optimization of the management of detection resources for the search of a moving target

J.-P. Le Cadre

IRISA/CNRS, Campus de Beaulieu, 35042, Rennes, France.
lecadre@irisa.fr

Manuscrit reçu le 19 mai 2004

Résumé et mots clés

On expose ici quelques aperçus sur l'optimisation de la répartition des efforts de recherche d'une cible. Il s'agit de mettre en évidence la diversité des approches proposées. On examine plus particulièrement les difficultés algorithmiques. Diverses modélisations du problème sont aussi considérées.

Détection, cible, optimisation, jeux, réseaux, effort de recherche.

Abstract and key words

We present here various point of views about the optimization of search effort for detecting a target. An important aim is to show the diversity of possible approaches. Algorithmic difficulties are emphasized. Various modelling are also considered as well as their implications for defining and solving the search problem.

Detection, target, optimization, games, network, search theory.

Remerciements

L'auteur remercie les experts de la revue *Traitement du Signal* pour une relecture très attentive et leurs nombreux conseils.

1. Search theory: présentation générale

Le but général de la « théorie de la recherche » (« search theory ») est l'optimisation de l'effort de recherche (ou de détection) d'une cible. Il s'agit avant tout d'un problème de planification des efforts de recherche; ce qui signifie ici que pour une recherche multipériodes, il n'y a pas d'adaptativité de la répartition des efforts de recherche aux résultats obtenus aux périodes précédentes. La search theory elle-même a vu le jour durant la seconde guerre mondiale, sous l'impulsion de l'ASWORG (AntiSubmarine Warfare Operations Research Group). Cet

organisme (Navy) avait dans ses attributions l'optimisation des méthodes de recherche de submersibles ennemis durant la « bataille de l'Atlantique ». On ne peut que citer l'ouvrage de B. Koopman [16] dans lequel se trouvent les méthodes développées pour ce contexte. On ne peut pas résister non plus à citer ces phrases du même auteur [16]: *Mathematics, science, and technology were young together; but with age and professionalism they have tended to fall apart. Then, in the grim calculus of the Battle of the Atlantic they regained some of their youth and, with it, the freshness of vision and the sense of balance between reality and abstraction.*

L'ouvrage historique de B. Koopman [16] présente toujours un très fort intérêt. À un niveau un plus didactique on peut citer celui d'A. Washburn [29], ou encore l'ouvrage de synthèse [21].

Des ouvrages plus spécialisés sont ceux d' A. Washburn [30], de L. Stone [25], de K. Iida [14], de S. Gal [9] et A. Garnaev [10] et une thèse récente [3]. On peut aussi y rajouter l'article de références de S. J. Benkoski *et al* [1]. On le voit ; la littérature est très riche et le lecteur intéressé pourra se reporter aux études publiées dans les revues «spécialisées» (*e.g.* «*Operations Research*», *Naval Research Logistics*, *Journal of the Operational Research Society of Japan*, *European Journal of Operational Research*, etc.). Précisons maintenant le cadre du problème.

Tout d'abord, le problème est l'optimisation de la répartition des efforts de recherche. Cette répartition est en général spatio-temporelle, mais elle peut aussi concerner l'utilisation des modes opérationnels d'un détecteur. Les efforts de recherche sont à entendre à un sens large : cela peut être une puissance d'émission, le temps passé sur une zone, l'envoi d'observateurs, etc. Par ailleurs, on considère fréquemment que ces efforts de recherche sont déployés sur plusieurs périodes temporelles. Ceci concerne en particulier la détection de cibles mobiles. Ces périodes peuvent représenter les récurrences radar/sonar, le déplacement (discrétisé) de l'observateur, etc. Ce formalisme peut être adapté au cadre usuel des problèmes de pistage ; non sans difficultés toutefois.

Les efforts de recherche peuvent être soit indéfiniment divisibles (*e.g.* répartition spatiale des faisceaux d'un radar à balayage électronique) ou non [7]. C'est le cas lorsque, par exemple, la répartition de l'effort de recherche est directement liée à la position de l'observateur ou lorsqu'on n'examine qu'une direction de scrutation par période. Dans le premier cas, ceci conduit à considérer des problèmes d'optimisation avec des variables continues [11] ; alors que pour le second le problème se complique du fait des contraintes d'intégrité. Le distinguo entre effort de recherche *indéfiniment* divisible et son contraire n'est pas de nature «sémantique». En effet, il arrive fréquemment que l'effort de recherche soit directement lié à la position de l'observateur. Dans ce cas, il ne peut évidemment pas être divisé, ce qui modifie profondément la nature du problème d'optimisation associé. L'accélération des processus énumératifs prend alors la place essentielle : algorithmes de type Branch & Bound plus généralement d'optimisation combinatoire.

Les efforts de recherche sont bien sûr contraints. Usuellement, la quantité globale d'effort de recherche disponible à chaque période est bornée. Il existe des formalismes permettant d'aller au-delà de ces simples contraintes. On peut ainsi considérer l'utilisation d'une algèbre sur l'utilisation de ressources prenant en compte leurs interactions [5], [6]. Ces efforts de recherche sont déployés sur un espace de recherche : celui où se meut la cible. Celui-ci peut être purement physique (des zones de l'espace) ou relatif à des modes de la cible [4]. Le comportement de la cible est aussi modélisé par ordre de difficulté croissante selon que la cible est *fixe*, de mouvement *conditionnellement déterministe*, *Markovien* ou même *réactive*¹. Il est aussi de plus

en plus fréquent de considérer une cible évoluant sur un réseau de topographie connue. Les approches classiques de la search theory supposent que le chercheur dispose d'un *a priori* sur le comportement spatio-temporel de la cible. Si ce n'est pas le cas, il est usuel de considérer une formulation de type «jeux». Ceci constitue une composante essentielle des approches récentes [30], [28], [34], [13].

Optimiser l'effort de recherche nécessite de savoir modéliser le rendement de cet effort. Usuellement, la fonctionnelle objectif est une probabilité de détection et le facteur de rendement (ou facteur de visibilité) est lié au taux d'accroissement de la probabilité de détection. Ce facteur de visibilité peut dépendre de paramètres environnementaux (*e.g.* propagation, contre-mesures, etc.). Enfin, il est possible de considérer que la connaissance de ce facteur est décrite par des bornes. La nécessité d'une certaine connaissance de ce facteur de rendement constitue l'aspect le plus critiquable de l'approche classique de la search theory. Il est aussi usuel de considérer une loi de détection de type exponentiel. Pour toutes ces questions, on se reportera aussi bien à la référence [16], qu'à des contributions plus récentes (*e.g.* les lois $\lambda - \sigma$) [21].

Un panorama des méthodes d'optimisation de l'effort de recherche ayant été donné en [24], on s'attachera ici à présenter quelques points plus spécifiques. Soit, parce qu'ils correspondent à des développements récents ; soit, encore, parce que les mises en œuvre des idées nous ont semblées compléter celles de [24].

2. Probabilité de détection d'une cible en mouvement

On ne se préoccupe pas ici de l'optimisation des efforts de recherche. Si cette étape a été l'objet de nombreuses et profondes études depuis les travaux fondateurs de B. Koopman [16], un point commun à toutes celles-ci est la disponibilité des grandeurs élémentaires que sont d'une part la distribution spatio-temporelle de la cible et, d'autre part, la probabilité de détection conditionnelle (aux efforts de recherche) de celle-ci.

Les travaux sur le sujet sont relativement peu nombreux ; soit parce que la probabilité de détection conditionnelle dépend très étroitement des caractéristiques du récepteur (et donc de l'application considérée), soit parce qu'un modèle Markovien de cible mobile est suffisant pour de nombreuses applications. Ainsi, dans le cas d'une recherche multi-périodes, un modèle Markovien de mouvement de la cible permet non seulement d'avoir un bon degré de généralité mais encore de «casser» les problèmes combinatoires (*cf* algorithme de Brown) induits par l'arborescence des chemins possibles de la cible en fonction du nombre de périodes.

1. Réactive signifie ici que les évolutions de la cible dépendent de la répartition des efforts de recherche aux différentes périodes.

En gardant tout ceci à l'esprit, on s'attache ici à présenter une *synthèse* de résultats existants dans les directions suivantes :

- Calcul et approximations de la densité de présence de la cible $p(x, y, t)$ dans les cas où l'on dispose d'informations (distributions) sur le cap et la vitesse de celle-ci,
- Estimation de la probabilité de détection d'une cible diffusante par un ou des capteurs fixes.

2.1. Distribution spatio-temporelle de la cible

On se limite ici au cas d'une cible se déplaçant sur un plan. On considère la situation où le cap (τ) et la vitesse v de la cible ne sont qu'imparfaitement connus ; soient alors $p_2(\tau)$ et $p_1(v)$ leurs densités respectives. Alors si on désigne par $p_0(x, y)$ la distribution initiale de la cible, sa distribution au temps t sera :

$$p(x, y, t) = \int_{v_1}^{v_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} p_0(x - t v \cos \tau, y - t v \sin \tau) p_2(\tau) p_1(v) d\tau dv. \quad (2.1)$$

Cette expression est très générale mais nous allons voir que l'on peut en déduire des expressions très simples moyennant quelques hypothèses. Le cas le plus simple est, bien sûr, celui où $p_0(x, y) = \delta(x)\delta(y)$ (δ : Dirac), ce qui signifie que l'on connaît exactement la position initiale. On obtient alors, par passage aux coordonnées polaires (r, θ) :

$$p(r, \theta, t) = \frac{1}{r t} p_1\left(\frac{r}{t}\right) p_2(\tau).$$

On peut aussi étendre ce calcul aux cas où la distribution initiale de la cible est arbitraire et est simplement une densité $p_0(r, \tau)$. La distribution initiale est alors considérée comme une densité de cibles ponctuelles et l'on obtient alors :

$$p(x, y, t) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{p_1\left(\frac{[(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2]^{1/2}}{t}\right)}{t[(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2]^{1/2}} p_2\left(\tan^{-1}\left[\frac{y - \beta}{x - \alpha}\right]\right) p_0(\alpha, \beta) d\alpha d\beta, \quad (2.2)$$

qui reste identique à 2.1, au changement de variable $\alpha = (x - t v \cos \tau)$, $\beta = (y - t v \sin \tau)$ près. Si on suppose, par exemple, que $p_0(\alpha, \beta)$ est gaussienne, centrée et à symétrie de révolution (de variance σ^2) et que, de plus, le cap de la cible est uniformément réparti (sur $[0, 2\pi]$) et que la vitesse l'est aussi entre v_1 et v_2 , alors un calcul élémentaire [17] conduit à l'expression suivante de $p(r, \theta, t)$ ([17], I_0 : fonction de Bessel d'ordre 0 ; $p \triangleq p(r, \theta, t)$) :

$$p(r, \theta, t) = \frac{\exp(-r^2/2\sigma^2)}{2\pi\sigma^2(v_2 - v_1)} \int_{v_1}^{v_2} \exp\left(\frac{-v^2 r^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{r v t}{\sigma^2}\right) dv.$$

Une hypothèse supplémentaire est que la vitesse de la cible est déterministe ; un passage à la limite dans l'expression précédente conduit alors à :

$$p(r, \theta, t) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(\frac{-(r^2 + v_0^2 t^2)}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{r v_0 t}{\sigma^2}\right),$$

soit, en utilisant un équivalent asymptotique de I_0 :

$$p(r, \theta, t) \sim \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sigma v_0 t r^{1/2}} \exp\left(\frac{-(r - v_0 t)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.3)$$

quand $\frac{v_0 t r}{\sigma^2} \rightarrow \infty$.

On voit alors que la distribution de la cible correspond à une « vague » qui se déplace en diffusant, avec une vitesse v_0 . À la « crête » de la vague (donnée par $r = v_0 t$), le facteur de l'exponentielle décroît en $1/t$.

Toutefois, les hypothèses faites ici sont restrictives pour de nombreuses applications où l'on dispose d'informations *a priori* sur la trajectoire de la cible. On considère alors les cas suivants :

- cap aléatoire, vitesse fixée,
- cap fixé, vitesse aléatoire.

Ainsi, supposons que le module du vecteur vitesse est fixe (noté ici v_0), mais que son cap est distribué entre τ_1 et τ_2 . En utilisant le changement de variables

$[x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, \sigma_x = \sigma, \sigma_y = k \sigma]$, on obtient [17] :

$$p(r, \theta, t) = \frac{1}{2\pi k \sigma^2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \exp\left(-\frac{v_0^2 t^2}{2\sigma^2} \left\{ \left(\frac{r}{v_0 t} \cos \theta - \cos \tau\right)^2 + \frac{1}{k^2} \left(\frac{r}{v_0 t} \sin \theta - \sin \tau\right)^2 \right\}\right) p_2(\tau) d\tau. \quad (2.4)$$

L'approximation de Laplace est fréquemment utilisée pour calculer des approximations d'intégrales de la forme $\int_a^b f(\varphi) \exp(-\mu h(\varphi)) d\varphi$ quand $\mu \rightarrow \infty$ et résulte en l'approximation suivante :

$$\int_a^b f(\varphi) \exp(-\mu h(\varphi)) d\varphi \sim f(\varphi_0) \exp(-\mu h(\varphi_0)) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{\mu}{2} h''(\varphi_0) (\varphi - \varphi_0)^2\right] d\varphi, \quad (2.5)$$

$\mu \rightarrow \infty$, et φ_0 minimise $h(\varphi)$, $\varphi_0 \in]a, b[$.

Ainsi, en utilisant cette approximation et après de longs calculs, le résultat suivant a été obtenu [17] pour le cas $k = 1$ ($\frac{v_0^2 t^2}{\sigma^2} \rightarrow \infty$) :

$$p(r, \theta, t) \sim \frac{p_2(\theta)}{\sigma \sqrt{2\pi v_0 t r}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (r - v_0 t)^2\right).$$

On se reportera à [17], pour une présentation complète et de nombreuses illustrations de ces calculs. Considérons maintenant le calcul d'approximations de la probabilité de détection.

2.2. Probabilité de détection d'une cible mobile par un capteur fixe

Un premier problème est le calcul de la probabilité de détection d'une cible diffusante à l'aide d'un détecteur fixe (placé à l'origine), dans un domaine d'aire A . Malgré sa simplicité, ce problème a cependant une certaine importance pratique. Pour l'essentiel on se réfère ici à l'article [8]. Rappelons tout d'abord que la densité p de probabilité d'une cible diffusante obéit à l'équation suivante :

$$(d/2) \nabla^2 p = \frac{\partial p}{\partial t},$$

où d est la constante de diffusion et ∇^2 est le Laplacien. En coordonnées cartésiennes et polaires, on obtient respectivement :

$$\begin{cases} (d/2) \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial p}{\partial t}, \\ (d/2) \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{\partial p}{\partial t}. \end{cases} \quad (2.6)$$

Il faut, bien sûr, y rajouter les conditions aux limites. Toutefois, le problème ne semble pas admettre une approximation suffisamment explicite dans le cas général. Une simplification (réaliste) est alors de considérer qu'il est à symétrie centrale; le terme $\frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2}$ est alors nul et on doit résoudre le problème ci-dessous :

$$(d/2) \left(\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r} \right) \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial r} \right) \right) = \frac{\partial \bar{p}}{\partial t},$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial r} \right)_{r=R_A} = 0, \\ \bar{p}(r,t) = 0 \text{ pour } r \leq R, \\ \bar{p}(r,0) = 1/A \text{ pour } r > R, \\ A : \text{aire totale de recherche,} \\ R_A : \text{rayon de l'aire de recherche,} \\ R : \text{rayon détection capteur.} \end{cases} \quad (2.7)$$

Dans l'équation ci-dessus \bar{p} désigne une probabilité *élémentaire* de non-détection. Les hypothèses relatives à la détection se traduisent par les conditions: $\bar{p}(r,t) = 0$ pour $r \leq R$ et $\bar{p}(r,0) = 1/A$ pour $r > R$. R_A est le rayon de l'aire de recherche ($R_A = \sqrt{A/\pi}$). On notera également que la détection est supposée être de type «Cookie-Cutter» [33] (emporte-pièce); ce qui signifie que la cible est détectée si elle se trouve dans un disque de rayon R et non détectée en dehors de ce disque. Enfin la condition $\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial r} \right)_{r=R_A} = 0$ exprime le fait que la cible reste à l'intérieur du disque d'aire A et centré en 0; c'est-à-dire que la frontière est «réfléchissante». De plus, si on désigne par $PND(t)$ la probabilité de non-détection au temps t , on a bien sûr :

$$PND(t) = \int_0^{2\pi} \int_R^{R_A} \bar{p}(r,t) r dr dt.$$

Revenons maintenant à l'équation 2.7. Celle-ci peut être considéré comme un «classique» des équations de la diffusion de chaleur [19]. Il y a ainsi des développements en séries entières de la solution. Plus précisément, Muskat en a obtenu la forme ci-dessous :

$$\bar{p}(r,t) = - \left(\frac{\pi}{A} \right) \sum_{n=1}^{\infty} k_n U(\alpha_n r) \exp \left(- \frac{d}{2} \alpha_n^2 t \right),$$

$$\begin{cases} \text{où :} \\ k_n = [J_0(\alpha_n R) J_1(\alpha_n R_A)] [J_0^2(\alpha_n R) - J_1^2(\alpha_n R_A)]^{-1}, \\ U(\alpha_n r) = Y_1(\alpha_n R_A) J_0(\alpha_n r) - J_1(\alpha_n R_A) Y_0(\alpha_n r). \end{cases} \quad (2.8)$$

Dans les équations ci-dessus, J_0, J_1, Y_0 et Y_1 sont, respectivement, les fonctions de Bessel de première espèce et d'ordre 0, de première espèce et d'ordre 1, de deuxième espèce et d'ordre 0 et enfin deuxième espèce et d'ordre 1. Le scalaire α_n est la n -ième plus petite racine positive de l'équation $U(\alpha R) = 0$. Même si (2.8) a le mérite d'exister, elle est d'interprétation pour le moins difficile. Toutefois, on peut remarquer que si t devient suffisamment grand, $\bar{p}(r,t)$ est correctement approximé par le premier terme du développement :

$$\bar{p}(r,t) \sim - \frac{\pi k_1}{A} U(\alpha_1 r) \exp \left(- \frac{d}{2} \alpha_1^2 t \right). \quad (2.9)$$

Les autres termes peuvent être négligés dans la mesure où ils font intervenir des racines plus grandes de l'équation $U(\alpha R) = 0$. Pratiquement, ceci a pour implication que lorsque t est suffisamment grand, alors la décroissance de $\bar{p}(r,t)$ (r fixé) est proportionnelle à $\exp \left(- \frac{d}{2} \alpha_1^2 t \right)$. On est alors en mesure d'approximer convenablement

$$PND(t) = \int_0^{2\pi} \int_R^{R_A} \bar{p}(r,t) r dr dt.$$

En utilisant les identités «classiques» $\int x J_0(x) dx = x J_1(x)$ et $\int x Y_0(x) dx = x Y_1(x)$, on obtient alors [8] :

$$PND(t) \sim K \exp \left(- \frac{d}{2} \alpha_1^2 t \right) \quad (2.10)$$

où la constante K ne dépend que des hypothèses du problème de détection (*i.e.* R et A). Ainsi, pour t suffisamment grand $PND(t)$ a la même vitesse de décroissance que $\bar{p}(r,t)$. Ceci est à rapprocher la formule (semi-empirique) de Sislioglu [23] qui donne la probabilité de non-détection au temps t ($PND(t)$) d'une cible de distribution initiale uniforme dans une zone d'aire A et de constante de diffusion d , par un capteur de rayon de détection R :

$$PND(t) = (1 - \pi R^2/A) \exp(-24.7 R d t/A^{3/2}). \quad (2.11)$$

Cette formule a été obtenue à partir d'ajustements de résultats obtenus par tirages aléatoires. En fait, le paramètre $\rho \triangleq \frac{R_A}{R}$ a ici une importance considérable et il a été montré [8] que tant que ce paramètre est suffisamment grand devant 1, les approximations données ci-dessus sont tout à fait correctes. En revanche, lorsque ρ se rapproche de 1, elles deviennent plutôt pessimistes. Une constatation identique a été établie lorsque t est relativement petit.

3. Formulations élémentaires du problème de répartition optimale de l'effort de recherche

Le cadre classique de la search theory est hérité de la formulation initiale de B. Koopman [16]. Elle est remarquable par sa simplicité et son efficacité, même si elle souffre de limitations certaines. On le détaille brièvement ci-dessous :

- Une densité de localisation *a priori* de la cible: $\alpha(x), x \in E$ (espace de recherche).

- Une probabilité de détection « conditionnelle » $p(x, \varphi(x))$: probabilité de détecter la cible se trouvant en x , si un effort de recherche $\varphi(x)$ est appliqué en x . Un exemple « usuel » (loi de détection exponentielle): $p(x, \varphi(x)) = 1 - \exp(-w_x \varphi(x))$, où w_x est un facteur de visibilité affecté à x et à l'effort de recherche φ .

- Une contrainte d'effort: $\int_E \varphi(x) dx \leq \phi$, et (bien sûr) $\varphi(x) \geq 0, \forall x \in E$.

- Une probabilité *totale* de **non-détection**: $P_{nd}(\varphi) = \int_E \alpha(x) \bar{p}_x(\varphi(x)) dx$ où $\bar{p}_x(\varphi(x)) \triangleq 1 - p(x, \varphi(x))$.

Le problème prend alors la forme suivante :

Problème 1 :

Minimiser P_{nd} sous les contraintes: $\int_E \varphi(x) dx \leq \phi$, et (bien sûr) $\varphi(x) \geq 0, \forall x \in E$.

Celui-ci est alors résolu pour une classe de fonctions φ (répartition de l'effort de recherche) assez large par des techniques de calcul des variations [11], [25], [26], [27]. Celles-ci conduisent aux conditions classiques d'optimalité.

Proposition 1. Conditions de Koopman-de Guenin (cas continu):

Soit $\varphi^*(x)$ la fonction de répartition optimale de l'effort de recherche (i.e. solution du problème ci-dessus), on a alors :

$$\begin{cases} \alpha(x) \bar{p}'_x(\varphi^*(x)) = \eta & \text{si } \alpha(x) > \eta/p'_x(0), \\ \varphi^*(x) = 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.1)$$

Par inversion de \bar{p}'_x (cf 3.1), on obtient φ_η , fonction du seuil η (paramètre dual):

$$\varphi_\eta(x) = \max \left\{ 0, \left(\bar{p}'_x \right)^{-1} \left(\frac{\eta}{\alpha(x)} \right) \right\}$$

La fonction duale étant concave, le paramètre η est obtenu par une simple dichotomie.

En dépit de sa simplicité, ce résultat mérite quelques commentaires. Tout d'abord, on voit que du point de vue algorithmique tout le problème se réduit à « ajuster » le paramètre η . Son « ajustement » est alors obtenu par rapport à la contrainte $\int_E \varphi_\eta(x) dx \leq \phi$. On note aussi que les contraintes de positivité de l'effort de recherche sont « évacuées » *via* la condition $\varphi^*(x) = \max \left\{ 0, \left(\bar{p}'_x \right)^{-1} \left(\frac{\eta}{\alpha(x)} \right) \right\}$. On voit donc que cette approche fonctionne donc essentiellement *via* la « dualisation » des contraintes. Ce que l'on retrouvera, de façon toute aussi fondamentale, dans l'approche discrète, que l'on décrit ci-dessous :

Conditions de Koopman-de Guenin. Approche discrète :

Soit f une fonctionnelle séparable i.e.

$\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \rightarrow f(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i)$. On considère le problème primal associé :

$$\mathcal{P} \begin{cases} \min f(\mathbf{X}) \\ \text{Contraintes : } x_i \geq 0 (i = 1, \dots, n) \text{ et } \sum_{i=1}^n x_i = 1. \end{cases} \quad (3.2)$$

Les conditions de Karush-Kuhn-Tucker² (KKT) impliquent alors l'existence de multiplicateurs $\{\underline{\mu}_1, \dots, \underline{\mu}_n\} \in (\mathbb{R}^+)^n$ et $\underline{\lambda} \in \mathbb{R}$ tels que :

$$KKT \begin{cases} f'_i(\underline{x}_i) - \underline{\mu}_i + \underline{\lambda} = 0, \\ \underline{\mu}_i \underline{x}_i = 0, \forall i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (3.3)$$

La fonctionnelle *duale* associée à ce problème est définie par :

$$\begin{cases} \psi(\lambda) = \inf_{\mathbf{X} \in (\mathbb{R}^+)^n} \mathcal{L}(\mathbf{X}, \lambda) \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ \mathcal{L}(\mathbf{X}, \lambda) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i) + \lambda \left(\sum_{i=1}^n x_i - 1 \right). \end{cases} \quad (3.4)$$

Note : seule la contrainte « égalité » est dualisée. Les autres sont prises en compte par le domaine de définition de ψ . Si, de plus, on suppose que $f_i(x_i) = p_i(e^{-w_i x_i} - 1), i = 1, \dots, n$, on peut « spécialiser » les équations (KKT) de définition de ces contraintes de la façon suivante :

$$\begin{cases} -p_i w_i e^{-w_i x_i(\lambda)} + \lambda = 0 & \forall i \text{ tel que } \underline{x}_i(\lambda) > 0, \\ p_i w_i - \lambda \geq 0 & \forall i \text{ tel que } \underline{x}_i(\lambda) = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

D'où l'expression générale de la fonction duale $\psi(\lambda)$ ($x^+ = x$ si $x \geq 0$; = 0 sinon) :

2. notées KKT pour la suite.

$$\psi(\lambda) = - \sum_{i=1}^n p_i \left(1 - \frac{\lambda}{p_i w_i}\right)^+ + \lambda \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{w_i} \left[\ln \left(\frac{p_i w_i}{\lambda} \right) \right]^+ - 1 \right) \quad (3.6)$$

L'effort de recherche optimal est alors donné par :

$$\underline{x}_i(\lambda) = \frac{1}{w_i} \left[\ln \left(\frac{p_i w_i}{\lambda} \right) \right]^+ \quad (3.7)$$

Maintenant, la fonction $\psi(\lambda)$ est **concave**. Son maximum est atteint pour une **unique** valeur λ^* , ce qui donne la répartition optimale des efforts de recherche. De plus, pour cette valeur du paramètre λ on a aussi la contrainte $\sum_{i=1}^n \underline{x}_i(\lambda^*) = 1$ satisfaite.

3.1. Stratégies myopes et optimales

Précisons aussi la nature des stratégies de recherche employées. On peut très grossièrement les diviser en deux classes :

- **Myope** : choisit la répartition des efforts de recherche qui maximise la probabilité de détection à chaque étape. Il y a simplement mise à jour de l'a priori de la cible par :

$$\alpha_{(t+1)}(x) = \alpha_t(x) \times \text{Pr}(\text{cible non-détectée}). \quad (3.8)$$

- **Optimale** : il s'agit d'optimiser la probabilité de détection à la fin des N étapes de la recherche.

Le cadre général est celui d'une fonctionnelle objectif *binaire* : la cible a été détectée ou non. Une recherche à N périodes signifie que l'effort de recherche est déployé N fois. La cible sera dite détectée si elle a été détectée durant (*au moins*) une de ces N périodes de recherche. Il est bien évident que l'optimisation de l'effort de recherche à l'étape t dépend de celles qui l'ont précédée et la suivront. Un algorithme exhaustif s'avère donc le plus souvent parfaitement impossible. C'est donc là que réside une bonne part des difficultés.

Il en est de même si l'effort de recherche n'est plus indéfiniment divisible. Le but de l'algorithme Branch & Bound est d'éliminer les « embranchements » inintéressants.

3.2. Modélisation du problème d'optimisation des efforts de recherche pour la détection de pistes

Jusqu'à présent, la détection d'une cible était purement binaire. Cependant, dans de nombreux contextes une cible est dite « détectée » si la piste correspondante est dite détectée. La « détection » d'une piste correspond en général à la succession de plusieurs détections élémentaires correspondant à une hypothèse spatio-temporelle de mouvement. La règle de « détection » est alors, en général, non-binaire (e.g. p détections pour T scans³. La

question est alors de savoir si l'on peut étendre le formalisme précédent à ce cas. Commençons par une présentation du problème :

- Une cible se déplace dans un ensemble de cellules $C_t = \{c_{\theta,t}\}_\theta$, indexées par le temps $t \in \{1, 2, \dots, T\}$ et un paramètre de piste θ . Une suite de cellules (cherchées) $\{c_{\theta,t}\}_t$ est *complètement* définie par la donnée du paramètre (θ) (mouvement conditionnellement déterministe). Par conditionnement déterministe [12], on entend que la trajectoire de la cible est parfaitement définie par θ .

Ceci est suffisant pour pouvoir modéliser de nombreuses situations pratiques.

- L'effort de recherche appliqué à la cellule $c_{\theta,t}$ est noté $\varphi_{t,\theta}$ ($\varphi_{t,\theta} \geq 0$).

- La probabilité *élémentaire* conditionnelle de détecter la cible dans la cellule $c_{\theta,t}$ si un effort $\varphi_{t,\theta}$ lui est appliqué est $p(\varphi_{t,\theta}) = 1 - \exp(-w_{t,\theta} \varphi_{t,\theta})$.

Avant tout, les buts sont ici la prise en compte de détections multiples pour la détection en n -périodes pour une règle (de fusion) «AND» ou «OR». Si, de plus, on fait l'hypothèse que les détections élémentaires sont indépendantes, la fonctionnelle de détection devient (pour une règle AND) :

$$\begin{cases} P = \sum_{\theta} \alpha_1(\theta) p(\varphi_{1,\theta}) p(\varphi_{2,\theta}) \cdots p(\varphi_{T,\theta}), \\ \text{où (par exemple) :} \\ p(\varphi_{k,\theta}) = (1 - \gamma_k e^{-w_{k,\theta} \varphi_{k,\theta}}) \quad k = 1, \dots, n, \end{cases} \quad (3.9)$$

On est alors conduit à examiner le problème d'optimisation ci-dessous :

$$\mathcal{P} \begin{cases} \min -P, \\ \text{sous les contraintes :} \\ \sum_{\theta} [\varphi_{1,\theta} + \cdots + \varphi_{T,\theta}] = \Phi, \\ \varphi_{1,\theta} \geq 0, \dots, \varphi_{T,\theta} \geq 0, \forall(\theta). \end{cases} \quad (3.10)$$

Supposons $\varphi_{1,\theta} \neq 0$, alors les conditions de KKT impliquent que $\varphi_{2,\theta} \neq 0, \dots, \varphi_{T,\theta} \neq 0$. Les équations d'optimalité de KKT conduisent à considérer le système suivant constitué de T équations non-linéaires :

$$\begin{cases} \gamma_1 X_{1,\theta} (1 - \gamma_2 X_{2,\theta}) \cdots (1 - \gamma_T X_{T,\theta}) \\ \quad = \frac{\lambda}{w_{1,\theta} g_1(\theta)} = \alpha_1 \quad (1), \\ \gamma_2 X_{2,\theta} (1 - \gamma_1 X_{1,\theta}) \cdots (1 - \gamma_T X_{n,\theta}) \\ \quad = \frac{\lambda}{w_{2,\theta} g_1(\theta)} = \alpha_2 \quad (2), \\ \vdots \\ \gamma_T X_{T,\theta} (1 - \gamma_1 X_{1,\theta}) \cdots (1 - \gamma_{T-1} X_{T-1,\theta}) \\ \quad = \frac{\lambda}{w_{T,\theta} g_1(\theta)} = \alpha_T \quad (n). \end{cases} \quad (3.11)$$

Considérons le système ci-dessus, en divisant la ligne (1) par la ligne (p) et en notant $Y_{1,\theta} \triangleq \gamma_1 X_{1,\theta}, \dots, Y_{p,\theta} \triangleq \gamma_p X_{p,\theta}$, on obtient :

3. Ici le terme « scan » correspond à une récurrence ou à une période.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(1 - Y_{1,\theta})}{\alpha_1 Y_{1,\theta}} = \frac{(1 - Y_{p,\theta})}{\alpha_p Y_{p,\theta}}, \\ \text{soit, encore : } Y_{p,\theta} = \frac{Y_{1,\theta}}{Y_{1,\theta}(1 - \beta_p) + \beta_p}, \\ \text{avec : } \beta_p = \frac{\delta w_{1,\theta}}{w_{p,\theta}}. \end{array} \right. \quad (3.12)$$

Par conséquent, $x_{p,\theta}$ ($p = 2, \dots, T$) se déduit de $x_{1,\theta}$, lui-même déterminé par :

$$x_{1,\theta} = \frac{1}{w_{1,\theta}} \left[\ln \left(\frac{\gamma_1}{Y_{1,\theta}} \right) \right]^+ \quad (3.13)$$

Le problème est donc réduit à la détermination de $\underline{x}_{1,\theta}$. À partir de 3.12, on voit que $\underline{x}_{1,\theta}$ est une racine de l'équation polynomiale de degré T , ci-dessous :

$$Y_{1,\theta} (1 - Y_{1,\theta})^T - \frac{\lambda}{w_{1,\theta} g_1(\theta)} \prod_{p=2}^T [Y_{1,\theta}(\beta_p^{-1} - 1) + 1] = 0. \quad (3.14)$$

La valeur de $\underline{x}_{1,\theta}(\lambda)$ est la racine de 3.14 qui minimise le Lagrangien, déduit de 3.9; où $\underline{x}_{2,\theta}, \dots, \underline{x}_{T,\theta}$ sont déterminés (à partir de $\underline{x}_{1,\theta}$) par 3.12. Puisque P est séparé relativement aux $\{x_{1,\theta}\}_\theta$, la charge de calcul est relativement modeste. À partir de la donnée de $\underline{x}_{1,\theta}$, on déduit la fonctionnelle duale $\psi(\lambda)$, i.e. :

$$\psi(\lambda) = - \sum_{(\theta)_+} \prod_{k_+} \left(\left(1 - \gamma_k \underline{x}_{k,\theta} \right) + \lambda \sum_{(\theta,k)_+} \underline{x}_{k,\theta} - \Phi \right). \quad (3.15)$$

Tout le problème est donc réduit à la détermination de la valeur de λ qui maximise la fonction concave $\psi(\lambda)$.

Soit $\Phi(\lambda)$ l'effort de recherche optimal associé à λ , on a alors la proposition suivante :

Proposition 2. $\Phi(\lambda)$ est une fonction décroissante de λ .

Ainsi, le cas de la règle AND peut être traité assez simplement par dualisation. En effet, la fonction duale étant déterminée, il suffit de maximiser cette fonction (concave) du seul paramètre λ .

Comme on a pu le constater la résolution du problème de répartition optimale des efforts de recherche est relativement simple dans le cas d'une règle «AND». Examinons maintenant, une règle de décision «majoritaire» («OR»). L'étude sera illustrée par la détection sur 3 périodes, pour le cas général on se reportera à [18]. Ici, la piste est dite «détectée» si elle l'est durant *au moins* 2 périodes. On considère alors que la probabilité de détection s'écrit :

$$P = \sum_{\theta} g_1(\theta) [\beta_{0,2,3} P_{0,2,3} + \beta_{1,2,0} P_{1,2,0} + \beta_{1,0,3} P_{1,0,3} + \beta_{1,2,3} P_{1,2,3}],$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{0,2,3} = e^{-w \varphi_{1,\theta}} (1 - e^{-w \varphi_{2,\theta}}) (1 - e^{-w \varphi_{3,\theta}}), \\ P_{1,2,0} = e^{-w \varphi_{3,\theta}} (1 - e^{-w \varphi_{1,\theta}}) (1 - e^{-w \varphi_{2,\theta}}), \\ P_{1,0,3} = e^{-w \varphi_{2,\theta}} (1 - e^{-w \varphi_{1,\theta}}) (1 - e^{-w \varphi_{3,\theta}}), \\ P_{1,2,3} = (1 - e^{-w \varphi_{1,\theta}}) (1 - e^{-w \varphi_{2,\theta}}) (1 - e^{-w \varphi_{3,\theta}}). \end{array} \right. \quad (3.16)$$

dans (3.16), la notation $P_{0,2,3}$ est associée à l'hypothèse suivante: non-détection à la période 1, détection aux périodes 2 et 3, idem pour $P_{1,2,0}$ et $P_{1,0,3}$. Enfin, $P_{1,2,3}$ correspond à une détection à chaque période. Finalement, les « poids » $\beta_{0,2,3}, \dots, \beta_{1,2,3}$ représentent le gain d'information attachée à un événement élémentaire. On considère alors le problème d'optimisation ci-dessous :

$$\mathcal{P} \left\{ \begin{array}{l} \min -P, \\ \text{sous les contraintes :} \\ \sum_{\theta} (x_{1,\theta} + x_{2,\theta} + x_{3,\theta}) = \Phi, \\ x_{1,\theta} \geq 0, \dots, x_{3,\theta} \geq 0, \forall(\theta). \end{array} \right. \quad (3.17)$$

Pour des raisons de simplification, on adopte alors les notations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{0,2,3} \triangleq \delta_1, \beta_{1,2,0} \triangleq \delta_3, \\ \beta_{1,0,3} \triangleq \delta_2, \beta_{1,2,3} \triangleq \delta^*, g_1 \triangleq w g_1(\theta), \\ X_{1,\theta} = e^{-w x_{1,\theta}} \triangleq y_1, \dots, X_{3,\theta} = e^{-w x_{3,\theta}} \triangleq y_3. \end{array} \right. \quad (3.18)$$

Supposant qu'aucun des efforts de recherche (i.e. $x_{i,\theta} \neq 0$, $i = 1, 2, 3$) ne s'annule, les conditions de KKT conduisent alors au système (non-linéaire) suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\delta_1 y_1 (1 - y_2)(1 - y_3) + \delta_2 y_1 y_2 (1 - y_3) \\ + \delta_3 y_1 y_3 (1 - y_2) + \delta^* y_1 (1 - y_2)(1 - y_3) = \frac{\lambda}{g_1} \quad (1), \\ \delta_1 y_1 y_2 (1 - y_3) - \delta_2 (1 - y_1) y_2 (1 - y_3) \\ + \delta_3 y_2 y_3 (1 - y_1) + \delta^* (1 - y_1) y_2 (1 - y_3) = \frac{\lambda}{g_1} \quad (2), \\ \delta_1 y_1 (1 - y_2) y_3 + \delta_2 y_1 y_2 (1 - y_3) \\ - \delta_3 (1 - y_1)(1 - y_2) y_3 + \delta^* (1 - y_1)(1 - y_2) y_3 = \frac{\lambda}{g_1} \quad (3). \end{array} \right. \quad (3.19)$$

Soustrayant la ligne (3) de la ligne (2) dans (3.19), on obtient :

$$y_3 = \left[\frac{y_1 (\delta^* - \delta_1 - \delta_2) + \delta_2 - \delta^*}{y_1 (\delta^* - \delta_1 - \delta_3) + \delta_3 - \delta^*} \right] y_2. \quad (3.20)$$

Alors, insérant cette valeur $y_3 = f(y_1) y_2$ (cf eq. (3.19)) dans la première ligne de (3.19), on voit que la variable y_2 satisfait une simple équation du 2-ème degré :

$$(a - b y_1) y_2^2 + (c - d y_1^2) y_2 + (e y_1^2 + f y_1) = 0,$$

où :

$$\begin{cases} a = \beta_2 (\beta_3 - \alpha_2) , & d = (\alpha_1 - \beta_2) (\alpha_1 - \beta_3) , \\ b = (\alpha_1 - \beta_2) (\alpha_2 - \beta_3) , & e = \beta_1 (\alpha_1 - \beta_3) , \\ c = -\beta_2 \beta_3 , & f = \beta_1 \beta_3 , \\ \text{et :} & \\ \beta_1 = \delta^* - \delta_1 ; \beta_2 = \delta^* - \delta_2 ; \beta_3 = \delta^* - \delta_3 . \end{cases} \quad (3.21)$$

Dans ce cas ($x_{k,\theta} \neq 0$; $k = 1,2,3$), la répartition des efforts de recherche est complètement déterminée par l'équation (3.19). En effet, de (3.20) et (3.21) on déduit $y_3 = f(y_1) y_2$ et $y_2 = f'(y_1)$. La valeur optimale de y_1 est obtenue en résolvant l'équation non-linéaire en y_1 , déduite de (3.19) en remplaçant y_2 et y_3 par leurs expressions en termes de y_1 (cf (3.20) et (3.21)) ; la valeur optimale \underline{y}_1 est celle des racines qui minimise le Lagrangien.

De plus de (3.19), on déduit que si l'effort de recherche est nul pour deux périodes (i.e. $y_k = y_{k'} = 1$ pour $k \neq k'$), alors il est nul pour toutes les périodes (i.e. $y_1 = y_2 = y_3 = 1$). Aussi, on ne doit considérer que les cas pour lesquels l'effort de recherche est nul pour une seule période. Dans ce cas, seules deux lignes de l'équation d'optimalité (3.19) sont valides. Considérons par exemple (les autres cas sont en tous points similaires), le cas $x_{2,\theta} = 0$, alors l'équation (3.19) se réduit à l'équation suivante :

$$\delta_2 y_1 (1 - y_3) = \frac{\lambda}{g_1} . \quad (3.22)$$

Ces calculs vont être détaillés ci-dessous :

Un exemple illustratif :

Pour fixer les idées, on fait les simplifications suivantes : $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta^*$. L'essentiel du «travail» est maintenant de passer en revue tous les cas possibles.

Tout d'abord, supposons que $x_{1,\theta}$ soit non nul, alors l'équation (3.19) implique que les quantités $x_{2,\theta}$ et $x_{3,\theta}$ ne peuvent être toutes deux nulles. Supposons maintenant que $x_{3,\theta} \neq 0$, alors on déduit aisément de (3.19) :

$$\begin{aligned} (1 - y_2) (y_3 - y_1) + (y_1 - y_3) &= -y_2 (y_1 - y_3) = 0 , \\ \text{d'où } (y_2 \neq 0) : & \\ y_1 &= y_3 . \end{aligned} \quad (3.23)$$

On doit alors considérer deux «sous-cas» :

Cas 1 : ($y_1 = y_3 \neq 1$, $y_2 = 1$)

De (3.19), on déduit que l'équation permettant de déterminer $X_{1,\theta}$, et $X_{3,\theta}$ est la suivante :

$$X_{1,\theta} (1 - X_{1,\theta}) = \frac{\lambda}{w g_{1,\theta}} . \quad (3.24)$$

La probabilité de détection est alors $P = \sum_{\theta} g_{1,\theta} (1 - X_{1,\theta})^2$ ($X_{1,\theta}$ étant déterminé par (3.24)).

Cas 2 : ($y_1 = y_3 \neq 1$; $y_2 \neq 1$)

Alors, on déduit de (3.19) que $y_1 = y_2 = y_3$. La probabilité de détection s'écrit alors :

$$P = \sum_{\theta} g_{1,\theta} (1 - X_{1,\theta})^2 (1 + 2 X_{1,\theta}) ,$$

d'où on déduit $X_{1,\theta}$, donné par :

$$(1 - X_{1,\theta}) X_{1,\theta}^2 = \frac{\lambda}{2 w g_{1,\theta}} . \quad (3.25)$$

Plus généralement, on voit que l'on doit examiner plusieurs sous-cas, outre le cas «élémentaire» (i.e. $y_1 = y_2 = y_3$). Plus précisément, on doit considérer la nullité de l'effort de recherche pour une quelconque des trois périodes (i.e. y_1 ou y_2 , ou encore y_3 est nul). La forme générale de ces possibilités est la suivante :

$$\begin{cases} y_i = 1, & i = 1,2 \text{ or } 3 , \\ y_j = y_k & \text{for } j \neq i \text{ and } k \neq i . \end{cases} \quad (3.26)$$

Les calculs sont alors en tous points identiques à ceux du cas 1. L'étape suivante consiste à calculer la fonction duale $\psi(\lambda)$. Pour cela, les valeurs de $\{y_1, y_2, y_3\}$ sont données par (3.24) ou par (3.25), et la fonction $\psi(\lambda)$ est donnée par ($\underline{X} = (x_{1,\theta}, x_{2,\theta}, x_{3,\theta})$) :

$$\psi(\lambda) = -P(\underline{X}) + \lambda \left(\sum_{\theta} x_{1,\theta} + x_{2,\theta} + x_{3,\theta} - \Phi \right) .$$

Les valeurs des composantes du vecteur \underline{X} sont déterminées par (3.24) ou par (3.25) et correspondent soit aux solutions des équations polynomiales qui minimisent le Lagrangien réduit \mathcal{L} , ou bien sont toutes nulles. La fonction ψ étant concave, sa maximisation est particulièrement aisée. Les résultats sont illustrés par la figure ci-dessous (cf. [18]).

On peut toutefois remarquer que cette analyse devient compliquée dans le cas général ; du fait de la nécessité d'énumérer et d'analyser les différents cas.

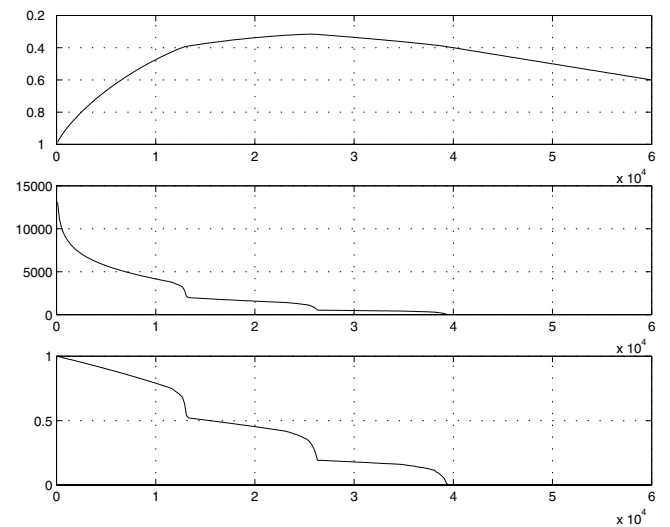


Figure 1. En haut : la fonctionnelle $\psi(\lambda)$ en ordonnée, en fonction de la variable λ pour une règle de détection majoritaire, 3 périodes. Au milieu, effort de recherche total $\Phi(\lambda)$, en fonction de λ . En bas, probabilité totale de détection, en fonction de λ .

4. Recherche multi-périodes pour la détection d'une cible Markovienne (Brown)

La détection d'une cible mobile dont la trajectoire est Markovienne sur T périodes est un problème difficile. Il est resté sans solution «raisonnable» jusqu'au début des années 1980; plus précisément les travaux de S. Brown [2] et de A. Washburn [31]. Sur un plan plus théorique, il est utile de se référer aux articles de Stone [27], de Stromquist et Stone [26]. La difficulté est ici combinatoire. Il est bien sûr possible de considérer une optimisation exhaustive, prenant en compte tous les chemins possibles, mais c'est clairement irréaliste. La solution en est donnée par l'algorithme de Brown qui appartient lui-même à la classe des algorithmes «Forward-Backward». Elle est d'une surprenante simplicité; mais, en même temps, d'une grande généralité.

Le point de vue considéré est le suivant: approximer le mouvement par une séquence d'états stationnaires (étapes de détection). On montrera qu'il est alors possible d'utiliser les étapes suivantes:

- se ramener à une suite de problèmes mono-étape,
- utiliser sa résolution (algorithme de de Guenin).

Le problème global **ne se réduit** pas à une simple «extension» du problème mono-étape. Il suppose lui aussi l'existence:

- d'un *a priori* sur les trajectoires,
- d'une fonctionnelle de (non)-détection, non-additive mais *séparable*.

La réduction de la dimension est alors obtenue *via l'hypothèse de Markoviannité* sur la trajectoire de la cible.

Formalisation

- nombre total d'étapes de détection: T . Trajectoire cible: $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_T\} \in E^T$,
 - (x_1, \dots, x_T) cellules occupées par la cible aux instants 1 à T .
- L'objectif est de détecter *au moins* une fois une cible durant T périodes de recherche.

Hypothèse courante: le mouvement de la cible est **Markovien** et $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_T)$ représente la trajectoire de la cible. On a alors:

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha(\mathbf{x}) &= \prod_{k=1}^{T-1} \alpha_{k,k+1}(x_k, x_{k+1}). \\ P_{nd}(\varphi) &= \int_{E^T} \alpha(\mathbf{x}) \prod_{k=1}^T \bar{p}_{k,x_k}(\varphi_k(x_k)) d\mathbf{x}, \\ \int_E \varphi_k(x_k) dx_k &= \Phi_k, \quad \forall k = 1, \dots, T, \end{aligned} \right. \quad (4.1)$$

où $\alpha_{k,k+1}(x_k, x_{k+1})$ correspond aux probabilités de transition de la cible, de l'instant k à l'instant $(k + 1)$. L'objectif est de déterminer φ pour minimiser $P_{nd}(\varphi)$, sous des contraintes de res-

sources. En fait, la «grande» idée pour résoudre ce problème consiste en une simple réécriture, qui va être détaillée ci-dessous.

Réécriture (à la Brown)

On est alors amené à réécrire le problème de la façon suivante:

$$\left\{ \begin{aligned} \text{Min. : } P_{nd}(\varphi) &= \int_E \beta_k^\varphi(x) \bar{p}_{k,x}(\varphi_k(x)) dx, \\ \text{tel que : } \int_E \varphi_k(x) dx &= \phi_k \text{ et } \varphi_k \geq 0, \\ \text{où : } \beta_k^\varphi(x_k) &= \int_{E^{T-1}} \alpha(\mathbf{x}_k) \prod_{1 \leq l \leq T, l \neq k} \left(\bar{p}_{l,x_l}(\varphi_l(x_l)) \right) dx_k, \\ \text{et : } \mathbf{x}_k &= (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_T). \end{aligned} \right. \quad (4.2)$$

On s'est donc ramené au problème **mono-étape**, que l'on sait résoudre (conditions de de Guenin ou KKT en discret). La «différence» est que c'est β qui remplace l'*a priori* α ; β peut s'interpréter comme la probabilité que la cible soit non détectée pour toutes les autres (que l'étape courante) périodes de recherche. On a alors par application des conditions d'optimalité du cas mono-période (de Guenin):

$$\varphi_k(x_k) = \max \left\{ 0, \left(\bar{p}'_{k,x_k} \right)^{-1} \left(\frac{\eta_k}{\beta_k^\varphi(x_k)} \right) \right\}. \quad (4.3)$$

Tous les problèmes n'ont pas été résolus pour autant, en particulier:

- L'inversion dépend de toutes les étapes passées et futures.
- Le calcul de β_k^φ est long (intégration sur E^{T-1} !).

C'est là que l'hypothèse Markovienne (trajectoire cible) s'avère déterminante.

Algorithme de Brown (FAB) ou comment calculer β_k^φ et optimiser φ ?

- 1^{er} ingrédient: Effectuer cycliquement une optimisation partielle de chaque étape jusqu'à convergence.
- 2^{ème} ingrédient: Utiliser l'hypothèse Markovienne pour **décomposer** le calcul de β .

On a en effet:

$$\left\{ \begin{aligned} \beta_k^\varphi &= U_k^\varphi \times D_k^\varphi, \\ \text{où } U \text{ (Up) et } D \text{ (Down) sont définis récursivement par :} \\ U_k^\varphi(x_k) &= \int_E \alpha_{k-1,k}(y_{k-1}, x_k) \bar{p}_{k-1}(\varphi_{k-1}(y_{k-1})) \\ &\quad U_{k-1}^\varphi(y_{k-1}) dy_{k-1}, \\ D_k^\varphi(x_k) &= \int_E \alpha_{k,k+1}(x_k, y_{k+1}) \bar{p}_k(\varphi_{k+1}(y_{k+1})) \\ &\quad D_{k+1}^\varphi(y_{k+1}) dy_{k+1}, \\ \text{Initialisation :} \\ U_1^\varphi(x_1) &= 1 \text{ et } D_T^\varphi(x_T) = 1. \end{aligned} \right.$$

La description de l'algorithme est maintenant complète.

5. Application au problème de recherche d'information

Dans cette section, nous allons nous intéresser à l'optimisation de l'effort de recherche d'information. La fonctionnelle objectif est cette fois liée à l'information que l'on peut déduire du déploiement de moyens de recherche. Elle est relativement simple puisqu'elle est essentiellement reliée à la localisation de la cible. On se place ici dans un contexte discrétisé et on utilise les notations suivantes :

Notations et contexte : $\mathbf{P} = (p_1, \dots, p_n)$ est le vecteur de la distribution *a priori* de la cible; $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ est l'effort de recherche ($\sum_{i=1}^n x_i = \Phi$). On considérera alors les problèmes de complexité croissante :

- Cible fixe.
- Cible mobile.
- Optimisation bilatérale.

On définit alors la fonctionnelle d'information (Nakai) $I(\mathbf{X}, \mathbf{P})$ par :

$$I(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = H(\mathbf{P}) - [D_{\mathbf{X}} H_{\text{det}} + (1 - D_{\mathbf{X}}) H(T_{\mathbf{X}}\mathbf{P})]. \quad (5.1)$$

où :

- $H(\mathbf{P})$ est l'entropie *a priori* ($H(\mathbf{P}) \triangleq -\sum_{i=1}^n p_i \ln p_i$),
- $D_{\mathbf{X}}$ est la probabilité de détecter (et localiser) en utilisant l'effort \mathbf{X} ,
- H_{det} est l'entropie relative à une cible détectée; *i.e.* 0^4 ,
- $T_{\mathbf{X}}\mathbf{P} = ((T_{\mathbf{X}}\mathbf{P})_1, \dots, (T_{\mathbf{X}}\mathbf{P})_n)$ est le vecteur représentant la distribution *a posteriori* de la cible, de distribution initiale \mathbf{P} , en la supposant non détectée par la recherche de vecteur \mathbf{X} ,
- $H(T_{\mathbf{X}}\mathbf{P})$ est son entropie associée.

Ainsi, le terme entre crochets de (5.1) est l'espérance du gain d'information apportée par la stratégie \mathbf{X} .

5.1. Cas d'une cible fixe

Sous l'hypothèse d'une fonction de non-détection exponentielle, on est ramené à considérer le problème (d'optimisation) suivant ($f(\mathbf{X}) \triangleq -I(\mathbf{X}, \mathbf{P})$) :

$$\mathcal{P} \left\{ \begin{array}{l} \min_{\mathbf{X}} f(\mathbf{X}) \text{ avec :} \\ f(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n p_i \exp(-w_i x_i) \ln \left[\frac{\sum_{k=1}^n p_k \exp(-w_k x_k)}{p_i \exp(-w_i x_i)} \right], \\ \text{sous les contraintes :} \\ \sum_{i=1}^n x_i = \Phi, x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \end{array} \right. \quad (5.2)$$

4. Pour une cible *détectée* l'entropie est nulle puisqu'aucune incertitude ne subsiste sur la position de la cible.

La différence essentielle avec le problème «classique» est que la fonctionnelle objectif (*i.e.* $f(\mathbf{X})$) n'est plus séparée relativement aux x_i . L'optimisation devient alors significativement plus complexe. Pour résoudre ce problème on a alors utilisé l'algorithme des plans sécants :

Algorithme des plans sécants :

- **Initialisation :**

$$\mathbf{X}_0 \text{ tel que } x_0(i) \geq 0, i = 1, \dots, n \text{ et } \sum_{i=1}^n x_0(i) = \Phi.$$

- **Master programm :**

Résoudre le problème de *programmation linéaire* :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max z, \\ \text{tel que : } z \leq f(\mathbf{X}_j) - \sum_{i=1}^n (u_i x_{i,j}) + v h(\mathbf{X}_j) \\ \text{pour } j = 0, \dots, k-1, \\ u_1 \geq 0, \dots, u_n \geq 0, \\ h(\mathbf{X}_j) = \sum_{i=1}^n x_{i,j} - \Phi. \end{array} \right. \quad (5.3)$$

Seconde étape :

Master programm \rightarrow nouveau vecteur \mathbf{u}_k, v_k (k index itération).

Ce qui amène à considérer le problème *non-constraint* :

$$\min_{\mathbf{X}} \left\{ f(\mathbf{X}) - \sum_{i=1}^n (u_{i,k} x_i) + v_k : h(\mathbf{X}) \right\}. \quad (5.4)$$

\rightarrow un nouveau vecteur \mathbf{X}_k est obtenu et ajouté à la liste $[(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{k-1}), \mathbf{X}_k]$. **Retour au Master Programm.**

On s'est donc ramené à la résolution d'un problème d'optimisation *non constraint* (*cf* seconde étape). Tandis que la résolution du *Master programm* ne constitue pas une réelle difficulté même pour un grand nombre de variables, il n'en est pas de même de l'algorithme de descente utilisé pour résoudre la seconde étape (non contrainte). Cet algorithme fonctionne convenablement pour un nombre de variables allant jusqu'à quelques centaines. Au-delà, il devient nécessaire de penser à d'autres types d'algorithme (*e.g.* de type points intérieurs). Quoiqu'il en soit, il est suffisant pour considérer un problème d'optimisation *multi-périodes* (cible mobile).

5.2. Le cas d'une cible mobile

À nouveau, on considère que la cible évolue dans un nombre fini de cellules et que sa trajectoire est décrite par le vecteur $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_T) \in \Omega \subset E^T$, tandis que $g(\omega)$ est la probabilité que la cible «prenne» la trajectoire ω . Durant la t -ième période, le chercheur dispose de la ressource Φ_t (indéfiniment divisible). Ainsi, la répartition des efforts de recherche à la période t est décrite par un vecteur X_t , de composantes $x(c, t)$. En supposant que les résultats de la recherche sont indépendants d'une période à une autre, la probabilité pour qu'une cible demeure indétectée au bout des T périodes de recherche s'écrit :

$$1 - D_{\mathbf{X}} = \sum_{\omega \in \Omega} g(\omega) \exp \left[- \sum_{t=1}^T w_{\omega_t, t} x_{\omega_t, t} \right],$$

et on a donc :

$$T_{\mathbf{X}}(\mathbf{P}) = \frac{g(\omega) \exp \left[- \sum_{t=1}^T w_{\omega_t, t} x_{\omega_t, t} \right]}{\sum_{\omega \in \Omega} g(\omega) \exp \left[- \sum_{t=1}^T w_{\omega_t, t} x_{\omega_t, t} \right]}. \quad (5.5)$$

On est alors amené à considérer la fonctionnelle d'information suivante :

$$f(\mathbf{X}) = \sum_{\omega \in \Omega} g(\omega) \exp \left[- \sum_{t=1}^T w_{\omega_t, t} x_{\omega_t, t} \right] \ln[t_{\omega}(\mathbf{X})],$$

où :

$$t_{\omega}(\mathbf{X}) = \frac{\sum_{\omega \in \Omega} g(\omega) \exp \left[- \sum_{t=1}^T w_{\omega_t, t} x_{\omega_t, t} \right]}{g(\omega) \exp \left[- \sum_{t=1}^T w_{\omega_t, t} x_{\omega_t, t} \right]}, \quad (5.6)$$

et notre problème est de minimiser $f(\mathbf{X})$ sous les contraintes suivantes :

$$\{x(c, t) \geq 0, \forall t, \forall c\} \text{ et } \sum_{c_t \in E_t} x(c_t, t) \leq \Phi_t.$$

Alors, il est utile de considérer la «factorisation» suivante de $f(\mathbf{X})$:

$$f(\mathbf{X}) = \sum_c \left[\sum_{\omega \in \Omega: \omega_t=c} g(\omega) \exp \left(- \sum_{t=1}^T w_{\omega_t, t} x_{\omega_t, t} \right) \ln(t_{\omega}(\mathbf{X})) \right] \quad (5.7)$$

où (hypothèse markovienne) :

$$g(\omega) = g_1(\omega_1) t(\omega_1, \omega_2) \cdots t(\omega_{T-1}, \omega_T) g_T(\omega_T), \quad (5.8)$$

et $t(\omega_t, \omega_{t+1})$ est la probabilité élémentaire de transition.

Résolution du problème d'optimisation

La difficulté tient à nouveau au très grand nombre de trajectoires $\{\omega_1, \dots, \omega_T\}$, ainsi qu'à la considération d'une fonctionnelle non-séparable. La méthode de résolution s'inspire largement de l'algorithme de Brown et est résumée ci-dessous :

Toutes les étapes du plan de recherche sont fixées, *sauf* pour l'étape τ (not. $\tilde{\mathbf{X}}_{\tau}$, ce plan), et définir les quantités Forward (F) et Backward (B) :

$$\left\{ \begin{array}{l} F(c, \tilde{\mathbf{X}}_{\tau}) = \sum_{\omega_1=c} g_1(\omega_1) t(\omega_1, \omega_2) \cdots t(\omega_{\tau-1}, c) \\ \quad \exp \left(- \sum_{t=1}^{\tau-1} w_t(\omega_t) x_{\omega_t, t} \right), \\ B(c, \tilde{\mathbf{X}}_{\tau}) = \sum_{\omega_1=c} g_T(\omega_T) t(\omega_T, \omega_{T-1}) \cdots t(\omega_{\tau+1}, c) \\ \quad \exp \left(- \sum_{t=\tau+1}^T w_t(\omega_t) x_{\omega_t, t} \right). \end{array} \right. \quad (5.9)$$

On peut alors décomposer les calculs de la manière suivante.

$$f(\mathbf{X}_{\tau}) = \sum_{c \in C_{\tau}} F(c, \tilde{\mathbf{X}}_{\tau}) B(c, \tilde{\mathbf{X}}_{\tau}) \exp(-w_{c, \tau} x_{c, \tau})$$

$$\ln \left[\sum_{c \in C_{\tau}} F(c, \tilde{\mathbf{X}}_{\tau}) B(c, \tilde{\mathbf{X}}_{\tau}) \exp(-w_{c, \tau} x_{c, \tau}) \right], \quad (5.10)$$

$$- \sum_{c \in C_{\tau}} F(c, \tilde{\mathbf{X}}_{\tau}) B(c, \tilde{\mathbf{X}}_{\tau}) \ln \left[F(c, \tilde{\mathbf{X}}_{\tau}) B(c, \tilde{\mathbf{X}}_{\tau}) \exp(-w_{c, \tau} x_{c, \tau}) \right].$$

avec les récursions Forward et Backward :

$$\left\{ \begin{array}{l} F(c, \tilde{\mathbf{X}}_i) = \sum_{d \in E} F(d, \tilde{\mathbf{X}}_{i-1}) \\ \quad \exp(-w_{d, i-1} x_{d, i-1}) t(d, c), \\ B(c, \tilde{\mathbf{X}}_i) = \sum_{d \in E} B(d, \tilde{\mathbf{X}}_{i+1}) \\ \quad \exp(-w_{d, i+1} x_{d, i+1}) t(d, c). \end{array} \right.$$

5.3. Résultats

L'a priori sur la localisation de la cible (fixe) est :

$$p(x, y) = \exp \left(- \frac{1}{2} [(x-1)^2 + (y-1)^2] \right) + \exp \left(- \frac{1}{2} [(x-5)^2 + (y-5)^2] \right)$$

tandis que le facteur de visibilité est donné par $w(x, y) = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$. Ces valeurs sont discrétisées sur une grille 10×10 : le nombre total de cellules est donc égal à 100. Pour $\Phi = 60$ et 50 itérations, les contraintes sont satisfaites ($\sum_{i=1}^{100} x_{i,0} = 59.43$, $x_{i,0} \geq 0$) et on obtient la répartition suivante des efforts de recherche (cf figure 2).

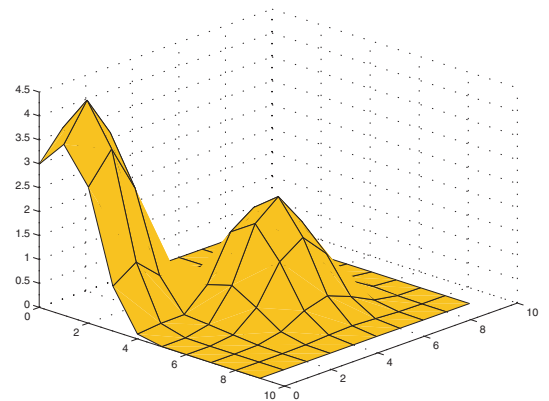


Figure 2. Répartition optimale des efforts de recherche d'information, $\Phi = 60$.

Conditions de KKT

Dans la figure 3, on vérifie que les conditions de KKT à l'optimum sont satisfaites :

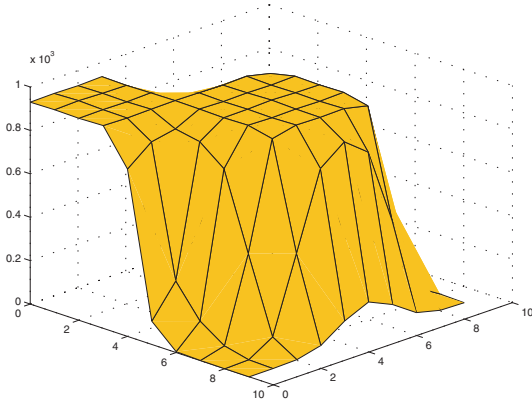


Figure 3. KKT conditions, valeurs des dérivées partielles $L_i(\mathbf{X}_0)$.

5.4 Jeu de recherche d'information

Jusqu'à présent, nos efforts ont été quasiment exclusivement orientés vers l'optimisation de la stratégie du chercheur. Pour de nombreux problèmes d'intérêt pratique, le comportement de la cible n'est pas neutre et un des moyens les plus simples pour considérer l'influence des stratégies de la cible est d'examiner ce problème dans un cadre de type « jeu ». On peut aussi constater que le simple fait de considérer ce formalisme est que la résolution du problème d'optimisation peut s'en trouver sensiblement simplifiée.

Ainsi dans le cadre de la « search theory » classique (cible fixe), le problème d'optimisation est relativement simple [20]. Cette simplicité est certainement due à la nature séparable des problèmes d'optimisation, ce qui signifie que toutes les variables de stratégie (chercheur et cible) interviennent de façon séparable. On montre alors que les stratégies du chercheur et de la cible sont proportionnelles; *i.e.* telles que le produit $x_i^* p_i^*$ demeure constant.

Pour le jeu de recherche d'information, la fonctionnelle de détection est remplacée par celle d'information *i.e.* $\mathcal{I}(\mathbf{P}, \mathbf{X}) = (1 - D_{\mathbf{X}}(\mathbf{P})) H(T_{\mathbf{X}}(\mathbf{P}))$. Le problème élémentaire consiste à déterminer les vecteurs \mathbf{P}^* et \mathbf{X}^* , solutions du problème min-max suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{I}(\mathbf{P}^*, \mathbf{X}) \leq \mathcal{I}(\mathbf{P}^*, \mathbf{X}^*) \leq \mathcal{I}(\mathbf{P}, \mathbf{X}^*), \\ \forall (\mathbf{X}, \mathbf{P}) : \sum_i p_i = 1, \sum_i x_i = \Phi. \end{cases} \quad (5.12)$$

On voit donc que le couple $\{\mathbf{P}^*, \mathbf{X}^*\}$ est un point selle pour la fonctionnelle $\mathcal{I}(\mathbf{P}, \mathbf{X})$. Les conditions de KKT s'obtiennent aisément (*cf* [20]) et sont relativement informatives pour les stratégies optimales cible-chercheur. Notons qu'elles impliquent deux scalaires positifs qui sont des multiplicateurs de Lagrange associés (ξ et μ) :

$$\begin{cases} K_i(\mathbf{P}^*, \mathbf{X}^*) : \begin{cases} = \xi & \text{si } p_i^* = 0 \\ < \xi & \text{si } p_i^* > 0 \end{cases} \\ p_i^* w_i K_i(\mathbf{P}^*, \mathbf{X}^*) : \begin{cases} = \mu & \text{si } x_i^* > 0 \\ < \mu & \text{si } x_i^* = 0 \end{cases} \end{cases} \quad (5.13)$$

où :

$$K_i(\mathbf{P}, \mathbf{X}) = \exp(-w_i x_i) \ln [t_i(\mathbf{X}, \mathbf{P})] .$$

Bien que ces conditions soient très générales, il est préférable d'en donner une présentation plus propice au développement d'un algorithme de résolution [20].

- Si $p_i^* = 0$, alors $x_i^* = 0$.

- Si $p_i^* > 0$, alors deux cas doivent être considérés suivant les valeurs de x_i^* . Si $x_i^* > 0$, alors on a $p_i^* w_i = \frac{\mu}{\xi}$.

Si $x_i^* = 0$, alors $\ln [\sum_{k=1}^n p_k^* \exp(-w_k x_k^*)] = \xi p_i^*$. Ainsi, on voit que p_i^* est indépendant de l'indice i .

Ainsi, on voit que p_i^* est soit égal à αw_i^{-1} (si $x_i^* > 0$), ou à une constante β (si $x_i^* = 0$). Notons que β peut être nul. Cela nous donne [20] la forme générale des vecteurs \mathbf{P}^* and \mathbf{X}^* :

$$\begin{cases} \text{(sans perte de généralité) supposons que :} \\ w_1 \geq w_2 \cdots w_n, \text{ alors :} \\ \mathbf{P}^* = (\alpha w_1^{-1}, \dots, \alpha w_l^{-1}, \beta, \dots, \beta), \\ \mathbf{X}^* = (x_1^*, \dots, x_l^*, 0, \dots, 0), \end{cases} \quad (5.14)$$

sous les contraintes :

$$\sum_{i=1}^l x_i^* = \Phi, \text{ et } : (n-l)\beta + \alpha \sum_{i=1}^l w_i^{-1} = 1 .$$

Ainsi, pour déterminer complètement \mathbf{P}^* , il reste un seul paramètre indéterminé. L'optimisation est donc relativement simple. Cette approche peut alors être étendue au cas de cibles Markoviennes, etc.

6. Recherche d'une cible évoluant dans un réseau

Nous allons maintenant considérer que le problème est fortement contraint par la nature des évolutions de la cible. Plus précisément, on considère dans cette section qu'elle évolue sur un réseau.

6.1. Le formalisme des tpozg (Two-Person Zero Sum Games) et son application en search theory

Le formalisme des jeux s'avère parfaitement adapté pour remédier à la nécessité d'un *a priori* fort (et toujours contestable) sur la localisation de la cible [22]. Dans ce cadre, la cible *et* l'observateur ont des stratégies aléatoires (ou du moins randomi-

sées). Dans cet esprit, on note a_{ij} le coût pour le joueur 1 de choisir la ligne i , tandis que le joueur 2 choisit la colonne j . Un «two-person zero-sum game» (désigné comme **tpzg** pour la suite) est un *jeu matriciel*. Si, dans un jeu matriciel $A = (a_{ij})$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, il existe un couple (i^*, j^*) tel que l'on ait :

$$\forall i \text{ and } \forall j, a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j},$$

alors le couple (i^*, j^*) est un point selle d'une **stratégie pure** et on a :

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = a_{i^*j^*}.$$

Une stratégie *mixte* pour le joueur 1 est un m -uple noté $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ où les $\{x_i\}$ sont tous positifs et de somme égale à 1 (probabilités). On définit de même une stratégie mixte pour le joueur 2, *i.e.* un n -uple noté $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ avec $y_j \geq 0 \forall j$ et $\sum_j y_j = 1$.

Le sens du vecteur \mathbf{x} est le suivant : le joueur 1 choisit la stratégie pure i avec une probabilité x_i . Similairement, le joueur 2 choisit la stratégie pure j avec la probabilité y_j ; le coût total étant $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i y_j a_{ij} = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}$. Il a été prouvé (Von Neuman)

que tous les jeux matriciels ont un point selle pour des stratégies mixtes; *i.e.* il existe toujours des vecteurs \mathbf{x}^* et \mathbf{y}^* tels que :

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}} \min_{\mathbf{y}} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y} &= \min_{\mathbf{y}} \max_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y} = (\mathbf{x}^*)^T \mathbf{A} \mathbf{y}^* = v, \\ x_i &\geq 0 \text{ et } \sum_i x_i = 1; \quad y_j \geq 0 \text{ et } \sum_j y_j = 1, \end{aligned} \quad (6.1)$$

où v est appelée la valeur du jeu. De façon équivalente, une solution $\{\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*\}$ est caractérisée par :

$$\begin{aligned} \sum_i a_{ij} x_i^* &\geq v \quad j = 1, \dots, n, \\ \sum_j a_{ij} y_j^* &\leq v \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (6.2)$$

La première condition établit que \mathbf{x}^* assure au moins un gain v au joueur 1 quelle que soit la stratégie (pure) du joueur 2; idem pour les gains du joueur 2. Tout jeu matriciel peut être décrit (et résolu) par le problème d'optimisation *linéaire* ci-dessous (joueur 1, problème primal) :

$$\begin{cases} \max_{(x_1, \dots, x_m, x_0)} & x_0, \\ \text{sous les contraintes :} & \\ \sum_{i=1}^m x_i a_{ij} - x_0 & \geq 0 \quad j = 1 \dots n, \\ \sum_{i=1}^m x_i & = 1, \\ x_i & \geq 0 \quad i = 1 \dots m. \end{cases}$$

Le dual de ce problème est le point de vue du joueur 2, *i.e.* :

$$\begin{cases} \min_{(y_1, \dots, y_n, y_0)} & y_0, \\ \text{sous les contraintes :} & \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j - y_0 & \leq 0 \quad i = 1 \dots m, \\ \sum_{j=1}^n y_j & = 1, \\ y_j & \geq 0 \quad j = 1 \dots n. \end{cases} \quad (6.4)$$

Les deux problèmes donnent la même valeur (du jeu) v .

Venons en maintenant à l'application du formalisme **tpzg** à l'optimisation de l'effort de recherche. On présente tout d'abord la définition du problème :

- Un chemin dans le réseau est défini par: $\omega = \{j(t), t = 1, 2, \dots, n\}$, $j(t)$ cellule occupée par la cible à l'instant t .
- Les efforts de recherche disponibles à chaque période: $\{C(t)\}_{t=1}^n$, supposés indéfiniment divisibles. L'effort de recherche alloué à la cellule j , au temps t est noté $\varphi(j, t)$. La probabilité conditionnelle de détection associée est: $f(j, \varphi(j, t)) = 1 - \exp[-\alpha(j)\varphi(j, t)]$,
- Le nombre de chemins possibles est fini (limité).

On a donc l'expression ci-dessous de la probabilité conditionnelle de non-détection si le chercheur utilise la stratégie Φ ($\Phi = \{\varphi(j, t)\}$) et si la cible suit le chemin $\omega \in \Omega$, $g(\omega, \Phi)$:

$$g(\omega, \Phi) = \exp \left[- \sum_t \alpha(T_t(\omega)) \varphi(T_t(\omega), t) \right]. \quad (6.5)$$

où $T_t(\omega)$ est la cellule occupée par la cible au temps t , pour le choix du chemin ω .

Les effets des efforts de recherche étant séparés, la stratégie optimale de recherche est pure. Définissons alors la stratégie mixte de cible $\mathbf{P} = \{p_\omega : \omega \in \Omega\}$ ($p_\omega \geq 0$, $\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$), on considère alors la fonctionnelle $G(\mathbf{P}, \Phi)$:

$$G(\mathbf{P}, \Phi) = \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega g(\omega, \Phi),$$

et le problème min-max associé :

$$\begin{cases} \min_{\Phi} \max_{\mathbf{P}} g(\mathbf{P}, \Phi) = \max_{\mathbf{P}} \min_{\Phi} g(\mathbf{P}, \Phi) = v, \\ \text{sous les contraintes :} & \\ \sum_j \varphi(j, t) & \leq C(t) \forall t \text{ et } \varphi(j, t) \geq 0, \forall t \forall j \in E, \\ \sum_{\omega} p_\omega & = 1 \text{ et } p_\omega \geq 0 \forall \omega \in \Omega. \end{cases} \quad (6.6)$$

Soit $\mathbf{P}^* = \{p_\omega^*\}$, (respectivement) $\Phi^* = \{\varphi^*(j, t)\}$ les stratégies optimales de la cible et (respectivement) du chercheur et soit $\mu_0 = \max_{\omega \in \Omega} g(\omega, \Phi^*)$.

Les conditions d'optimalité suivantes de KKT prennent alors la forme suivante :

Optimisation des efforts de recherche :

Si $p_{\omega}^* > 0$ alors $\exp(-\sum_t \alpha(T_t(\omega))\varphi^*(T_t(\omega),t)) = \mu_0$,

Si $p_{\omega}^* = 0$ alors $\exp(-\sum_t \alpha(T_t(\omega))\varphi^*(T_t(\omega),t)) \leq \mu_0$,

(6.7)

Stratégie (mixte) optimale cible :

Si $\varphi^*(j,t) > 0$ alors $\alpha(j) \sum_{\omega \in \Omega(j,t)} p_{\omega}^* = \frac{\lambda_t}{\mu_0}$,

Si $\varphi^*(j,t) = 0$ alors $\alpha(j) \sum_{\omega \in \Omega(j,t)} p_{\omega}^* \leq \frac{\lambda_t}{\mu_0}$,

où $\Omega(j,t) \triangleq \{\omega \mid T_t(\omega) = j\}$ et λ_t multiplicateur de Lagrange. La valeur du jeu est: $G = \mu_0$. L'obtention de ces conditions sera détaillée dans l'annexe A [13], [15].

On peut alors remarquer que μ_0 est caractérisé par:

$$\mu_0 = \min_{\varphi} \left\{ \mu : \sum_t \alpha(T_t(\omega))\varphi(T_t(\omega),t) \geq -\ln(\mu), \forall \omega \in \Omega \right\} \quad (6.8)$$

Aussi, en notant $z = -\ln(\mu)$, la stratégie optimale du chercheur est obtenue par résolution d'un simple programme linéaire:

$$\begin{cases} \text{maximiser } z \text{ tel que :} \\ \sum_t \alpha(T_t(\omega))\varphi(T_t(\omega),t) - z \geq 0 \quad \forall \omega \in \Omega, \\ \sum_j \varphi(j,t) \leq c_t \quad \forall t, \\ \varphi(j,t) \geq 0 \quad \forall j \quad \forall t. \end{cases} \quad (6.9)$$

La stratégie optimale du chercheur est donc obtenue par résolution du programme linéaire ci-dessus relativement à $[z; \{\varphi(j,t)\}_{j,t}]$. Ce qui est effectué par l'utilisation d'un algorithme de programmation linéaire de type Simplex. La stratégie cible en est déduite par résolution d'un simple système linéaire décrivant les contraintes de chemin.

6.2. Un exemple

Il s'agit d'un jeu élémentaire à 3 cellules ($m=3$), 3 périodes ($n=3$) and 4 chemins ($K=4$).

Les chemins sont définis de la façon suivante: $\omega_1 = (1,1,1)$, $\omega_2 = (1,2,2)$, $\omega_3 = (2,2,1)$, $\omega_4 = (3,2,2)$, tandis que le coefficient de visibilité est pris constant et que les contraintes d'efforts disponibles sont les suivantes: $C(1) = 0.9$, $C(2) = 0.3$, $C(3) = 0.6$. Appliquant l'algorithme du simplexe on est à même de résoudre le problème précédent et on obtient qu'à l'optimum les efforts de recherche sur les 3 périodes se répartissent ainsi:

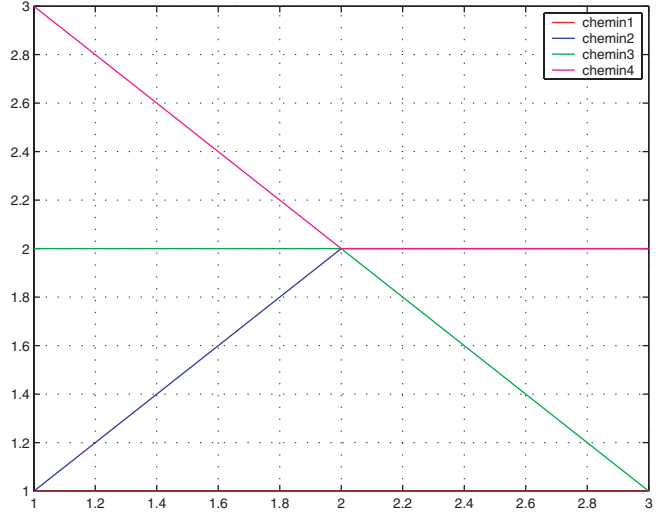


Figure 4. Réseau.

On obtient la valeur suivant du jeu $\mu_0 = 0.4274$; tandis que les stratégies optimales du chercheur et du joueur sont données ci-dessous:

	t=1	t=2	t=3				
j=1	0.4000	0	0.4500	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
j=2	0.1000	0.3000	0.1500	0.1667	0.1667	0.3333	0.3333
j=3	0.4000	0	0			p_{ω}^*	
		$\varphi^*(j,t)$					

La stratégie de la cible a été, pour sa part, obtenue par résolution d'un simple système linéaire (KKT):

$$\begin{cases} p_{\omega_1} + p_{\omega_2} - \lambda_1/\mu = 0 & \text{pour : } j = 1, t = 1, \\ p_{\omega_1} + p_{\omega_3} - \lambda_3/\mu = 0 & \text{pour : } j = 1, t = 3, \\ p_{\omega_3} - \lambda_1/\mu = 0 & \text{pour : } j = 2, t = 1, \\ p_{\omega_2} + p_{\omega_3} + p_{\omega_4} - \lambda_2/\mu = 0 & \text{pour : } j = 2, t = 2, \\ p_{\omega_2} + p_{\omega_4} - \lambda_3/\mu = 0 & \text{pour : } j = 2, t = 3, \\ p_{\omega_4} - \lambda_1/\mu = 0 & \text{pour : } j = 3, t = 1, \\ p_{\omega_1} + p_{\omega_2} + p_{\omega_3} + p_{\omega_4} = 1. \end{cases} \quad (6.10)$$

Le résultat n'est pas trop surprenant. Il n'est guère intéressant de chercher la cellule 2 au temps 1. Par contre, le principal de l'effort à la période 3 est porté sur la cellule 1, où aboutissent deux chemins. On se reportera aux tableaux ci-dessus pour analyser plus finement les stratégies de la cible et du chercheur.

On considère maintenant un exemple plus complexe: i.e. 4 cellules ($m=4$), et 6 périodes ($n=6$), ainsi que 5 chemins ($K=5$): $\omega_1 = (3,4,4,3,4,3)$, $\omega_2 = (3,3,3,4,3,3)$, $\omega_3 = (3,2,2,3,2,3)$, $\omega_4 = (3,2,1,1,2,3)$, $\omega_5 = (3,4,3,2,3,3)$.

De nouveau on suppose le coefficient de visibilité constant i.e. $\alpha(j) = 1 \quad \forall j$ et les contraintes temporelles suivantes $C(1) = 0.8$, $C(2) = 0.7$, $C(3) = 0.9$, $C(4) = 0.4$, $C(5) = 0.6$ et $C(6) = 0.5$.

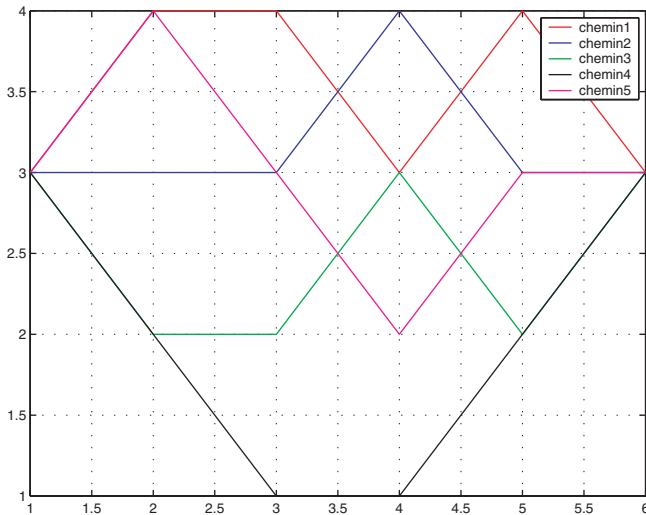


Figure 5. Le réseau.

Appliquant à nouveau l'algorithme du simplexe on voit que la valeur du jeu est 0.2307 et que les stratégies optimales du chercheur et de la cible sont données par les tables ci-dessous :

	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=6
j=1	0	0	0	0.2000	0.6000	0.5000
j=2	0	0.4667	0	0	0	0
j=3	0.8000	0.1167	0.5500	0.2000	0	0
j=4	0	0.1167	0.3500	0	0	0
			$\varphi^*(j,t)$			

ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
0.3333	0.3333	0.0000	0.3333	0.0000
		$p^*\omega$		

6.3. Jeu d'interdiction de réseau

On considère encore un jeu de recherche dans un réseau [34], mais cette fois les efforts de recherche ne sont pas supposés indéfiniment divisibles. À chaque période, la cible transite d'un nœud s à un nœud adjacent t . Simultanément, le chercheur choisit un arc k dans le réseau et l'inspecte. Si la cible passe par cet arc k , alors elle est détectée avec une probabilité p_k . Ces probabilités de détection sont supposées connues à la fois de la cible et du chercheur. Le but du chercheur est de déterminer la stratégie d'inspection du réseau qui maximise la probabilité de détection de la cible. À l'opposé, la cible souhaite (bien évidemment) la minimiser. Par conséquent, ce problème peut être vu dans un cadre $tpzg$.

Essayons de formaliser ce problème. Soit $G = (N, A)$, un réseau où N désigne les nœuds du réseau and A l'ensemble des arcs. Un chemin dans G , partant du nœud i_0 et se terminant au nœud i_m est défini comme une séquence de nœuds et d'arcs de la forme $i_0, (i_0, i_1), i_1, (i_1, i_2), \dots, i_{m-1}, (i_{m-1}, i_m), i_m$. La matrice D d'incidence du graphe est définie par: $d_{k,l} = 1$ si le chemin l inclut l'arc k et égal 0 sinon. La l -ème colonne de la matrice D (noté $d(l)$) est le vecteur d'incidence du chemin l .

Notre but est de résoudre un $tpzg$ Q pour lequel la stratégie pure du chercheur est de choisir un chemin l , du nœud s au nœud t . Définissons encore le vecteur z par: $z_k = 1$ si le chercheur inspecte l'arc k et $z_k = 0$ sinon. Alors, la fonction de coût V relative à Q est définie par: $V(z, l) = \sum_{k \in A(l)} p_k z_k$, ce qui est la *probabilité pour que le chercheur détecte la cible*. L'espérance de $V(z, l)$ est notée ψ et est la probabilité d'interdiction de la cible. Pour le chercheur l'objectif est de maximiser ψ , et c'est bien sûr le contraire pour la cible.

Soit x_k la probabilité. que le chercheur inspecte le k -ième arc et y_l la probabilité. que la cible choisisse le chemin l . Les vecteurs \mathbf{x} (respectivement) \mathbf{y} représentent les stratégies mixtes du chercheur, (respectivement) de la cible et on considère la fonctionnelle d'évaluation :

$$\psi = E(V(z, l)) = \sum_{k \in A} \sum_{l \in L} x_k p_k d_{kl} \cdot y_l = \mathbf{xPDy} . \quad (6.11)$$

On a donc modélisé de façon globale le processus de détection (\mathbf{xPD}). Le problème d'optimisation correspondant s'écrit aussi :

$$\begin{cases} \max_{\mathbf{x}} \min_{\mathbf{y}} \mathbf{xPDy} , \\ \text{sous les contraintes :} \\ \sum_{i=1}^k x_i = 1 \quad \sum_{j=1}^l y_j = 1 , \\ x_i \geq 0 \quad \forall i , \quad y_j \geq 0 \quad \forall j . \end{cases} \quad (6.12)$$

Qui peut être résolu par programmation linéaire, *i.e.* :

$$\begin{cases} \nu^* = \min_{(\mathbf{y}, \nu)} \nu , \\ \text{sous les contraintes :} \\ \mathbf{PDy} - \mathbf{1}\nu \leq \mathbf{0} , \\ \sum_{j=1}^l y_j = 1 \quad y_j \geq 0 \quad \forall j . \end{cases} \quad (6.13)$$

Ce qui donne la stratégie optimale de la cible. La stratégie optimale du chercheur est obtenue en dualisant le problème précédent, *i.e.* :

$$\begin{cases} \nu^* = \max_{(\mathbf{x}, \nu)} \nu , \\ \text{sous les contraintes :} \\ (\mathbf{PD})^T \mathbf{x} - \mathbf{1}\nu \leq \mathbf{0} , \\ \sum_{i=1}^k x_i = 1 \quad x_i \geq 0 \quad \forall i . \end{cases} \quad (6.14)$$

Résultats

Le réseau et les chemins possibles sont décrits ci-après :

Chemin 1 : $l_1 = \{1, 2, 3, 4\}$,

- Chemin 2 : $l_2 = \{1,2,6\}$,
- Chemin 3 : $l_3 = \{1,2,9,10\}$,
- Chemin 4 : $l_4 = \{5,3,4\}$,
- Chemin 5 : $l_5 = \{5,6\}$,
- Chemin 6 : $l_6 = \{5,9,10\}$,
- Chemin 7 : $l_7 = \{7,8,3,4\}$,
- Chemin 8 : $l_8 = \{7,8,6\}$,
- Chemin 9 : $l_9 = \{7,8,9,10\}$.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors, les stratégies optimales du chercheur et de la cible sont :

$$\begin{cases} \mathbf{x} = (0 & 0 & 0.3200 & 0 & 0.3600 \\ & 0 & 0.3200 & 0 & 0.2880)^T \\ \mathbf{y} = (0 & 0 & 0.1086 & 0 & 0.1600 \\ & 0.2000 & 0.2114 & 0 & 0.3200)^T . \end{cases} \quad (6.15)$$

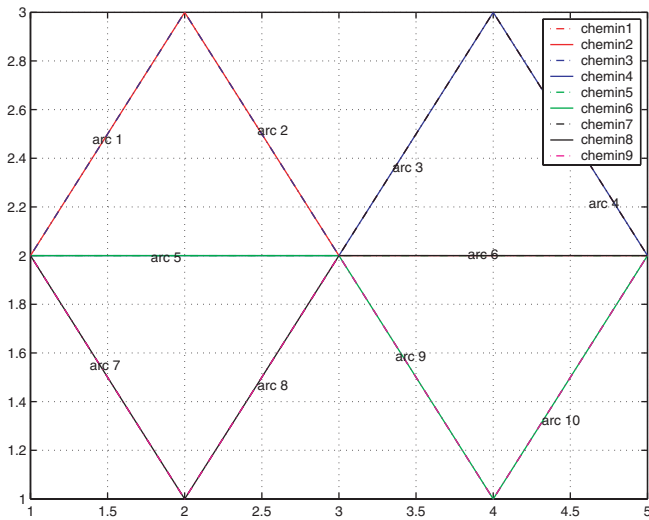


Figure 6. Le réseau.

7. Jeu de recherche dynamique

On considère un jeu dans lequel chacun des deux joueurs (un observateur et une cible) peut se déplacer sur une grille divisée en cellules. La cible commence à se déplacer au temps 0 à partir d'une cellule connue des deux concurrents. Le chercheur,

quant à lui, ne commence le jeu qu'au temps $\tau \geq 0$, à partir d'une autre cellule qui est également connue des deux joueurs. À chaque étape du jeu, chaque joueur se déplace sur une cellule et le chercheur tente de détecter la cible. Cette dernière est libre de se déplacer instantanément sur n'importe quelle cellule de la grille. Si le chercheur inspecte suffisamment près de la cible, il peut alors la détecter. Cet événement provoque la fin du jeu. Sinon, chacun des deux joueurs se déplace à nouveau sur une cellule, la cible ayant à sa disposition toute l'information sur les précédentes recherches. Cette information détenue par la cible est une caractéristique des jeux de recherche dynamique. L'objectif pour le chercheur est de détecter la cible avant qu'un temps t^* fixé au début du jeu ne se soit écoulé [28].

7.1. Cas général

On se donne un ensemble S de N cellules ainsi que deux fonctions réelles T et P définies sur $S \times S \times [0, \infty[$. $T(i, j, t)$ est le plus petit temps du jeu au bout duquel le chercheur peut atteindre la cellule j s'il est dans la cellule i au temps t . On a donc $T(i, j, t) > t$. On ne considèrera que des $T(i, j, t)$ discrétisés.

$P(j, k, t)$ est la probabilité que la cible soit détectée dans la cellule k au temps t par le chercheur se trouvant dans la cellule j . Le cas particulier où l'on a $P(j, k, t) = 0$ si et seulement si $j \neq k$ est le cas du jeu unitaire qui sera considéré par la suite.

$Q(i, t)$ est la valeur du jeu, c'est-à-dire la probabilité qu'aucune des recherches futures ne détecte la cible si les deux adversaires jouent optimalement et que le chercheur est en i au temps t . $Q(i, t)$ est une probabilité de non-détection. Ainsi, le chercheur est le joueur qui souhaite minimiser la valeur du jeu alors que la cible est le joueur qui souhaite la maximiser. De manière évidente, on a $Q(i, t) = 1$ pour tout $t > t^*$.

$\mathbf{x} = (x_j)_{j=1..N}$ est la stratégie mixte du chercheur pour un état initial (i, t) donné.

$\mathbf{y} = (y_k)_{k=1..N}$ est la stratégie mixte de la cible pour un état initial (i, t) donné.

Pour chaque état (i, t) , $Q(i, t)$, \mathbf{x} et \mathbf{y} sont les inconnues du problème. Le jeu se déroule comme suit :

- 1) Après avoir pris connaissance de la cellule i où se trouve le chercheur au temps t , la cible choisit une cellule $k \in S$ où elle se cache. Sans connaître k , le chercheur choisit une nouvelle cellule $j \in S$ à inspecter.
- 2) Si $T(i, j, t) > t^*$, la cible gagne. Sinon, elle est détectée avec la probabilité $P(j, k, T(i, j, t))$ et le chercheur gagne. Si la cible n'est pas détectée, on remplace i par j et t par $T(i, j, t)$ et on réitère 1).

La valeur du jeu vérifie donc l'équation suivante :

$$Q(i, t) = \min_y \max_x \sum_j x_j \{ 1 - \sum_k y_k P(j, k, T(i, j, t)) \} \quad (7.1)$$

où $P(i, j, T(i, j, t))$ est nulle si $T(i, j, t) > t^*$. On pose $Q_j = Q(j, T(i, j, t))$ et $P_{jk} = P(j, k, T(i, j, t))$. L'équation (1) est encore équivalente à l'équation suivante :

$$Q(i,t) = \min_x \max_y \left\{ \sum_j x_j Q_j - \sum_k y_k \sum_j x_j Q_j P_{jk} \right\} \quad (7.2)$$

La maximisation va «prendre» le plus petit des termes $\sum_j x_j Q_j P_{jk}$ (indexés par k). L'équation précédente est donc encore équivalente à :

$$\begin{cases} Q(i,t) &= \min_x (\sum_j x_j Q_j - z) , \\ z &= \min_k \sum_j x_j Q_j P_{jk} . \end{cases} \quad (7.3)$$

Par conséquent, $Q(i,t)$ est la fonction objectif du problème de programmation linéaire défini ci-dessous, avec $N + 1$ variables positives et $N + 1$ contraintes :

$$\begin{cases} \min_{(x_1, \dots, x_N, z)} \sum_j x_j Q_j - z \\ \text{sous les contraintes suivantes :} \\ \sum_j x_j Q_j P_{jk} - z \geq 0 \quad \forall k \in S , \\ \sum_j x_j = 1 \text{ et } : x_j \geq 0 \quad j = 1 \dots N . \end{cases} \quad (7.4)$$

La détermination de la valeur du jeu est réalisée par un algorithme itératif où le temps décroît de δ à chaque itération et où la détermination de $Q(i,t)$ requiert la solution de ce problème pour chaque état (i,t) (algorithme du Simplexe).

Il est également possible de considérer le problème du point de vue de la cible plutôt que du point de vue du chercheur. Dans ce cas, on obtient $Q(i,t)$ comme la fonction objectif du problème linéaire suivant, dual du précédent et qui donne la stratégie mixte $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$ de la cible pour chaque état (i,t) :

$$\begin{cases} \max_{(y_1, \dots, y_N, u)} u \\ \text{sous les contraintes suivantes :} \\ Q_j (1 - \sum_k y_k P_{jk}) - u \geq 0 \\ \forall j \in S , \sum_k y_k = 1, \text{ et } : y_k \geq 0 \quad k = 1 \dots N . \end{cases}$$

7.1.1. Résultats

Pour considérer le cas de cellules alignées, on prend les données suivantes du problème :

$$\begin{cases} T_i(i,j) = t + |i - j| + 1, \text{ et si } T_i(i,j) > t^* \text{ alors } T_i(i,j) = t^* , \\ P_i(i,j) = 1/(1 + |i - j|t) , P_i^*(i,j) = 0 . \end{cases}$$

Ces données tiennent compte du fait que plus deux cellules sont distantes l'une de l'autre, plus le temps pour aller de l'une à l'autre va être grand. De plus, les $T_i(i,j)$ ne peuvent pas dépasser le temps limite du jeu qui est de t^* . Inversement, plus la distance entre deux cellules est grande, plus la probabilité de détection va être faible. C'est pourquoi, on place $|i - j|$ au dénominateur dans l'expression de la probabilité de détection. De plus, on considère que les probabilités de détection décroissent au cours du temps et on place donc également t au dénominateur. $Q(i,1)$ pour $t = 1$ est la probabilité qu'aucune des recherches qui vont avoir lieu au cours du jeu ne va détecter la cible si les deux adversaires jouent optimalement, et en supposant que le chercheur parte de la cellule k . Plus cette probabilité est faible

et plus le jeu que l'on considère sera favorable au chercheur. On remarque en effet que plus on prend un faible nombre de cellules, plus on donne un avantage au chercheur et, de ce fait, plus la valeur de $Q(i,1)$ est faible quel que soit i . Dans le cas d'un jeu à une seule cellule par exemple, on trouve des valeurs du jeu toujours nulles quel que soit le nombre d'étapes. C'est un des cas où le chercheur est certain de détecter la cible au cours du jeu. On donne également un avantage au chercheur si on augmente le nombre d'étapes du jeu ou bien si on change les données en prenant de plus fortes probabilités de détection ou un temps de déplacement plus rapide pour le chercheur.

L'algorithme considéré précédemment fournit les résultats suivants :

Valeurs du jeu $Q(i,t)$
Cas de 4 cellules et de 4 étapes.

	t = 1	t = 2	t = 3	t = 4
i=1	0.3839	0.4842	0.5724	0.6578
i=2	0.3172	0.4361	0.5491	0.6578
i=3	0.3172	0.4361	0.5491	0.6578
i=4	0.3839	0.4842	0.5724	0.6578

On peut s'attendre à ce que $\lim_{t \rightarrow \infty} Q(i,t) = 0$ dans un jeu de recherche dynamique en pensant que, en laissant assez de temps au chercheur, il finira par détecter la cible quel que soit le nombre de cellules. Ce n'est pas nécessairement le cas même si $P(i,k,t) > 0 \quad \forall i,k,t$. Le théorème suivant [28] montre que la limite peut être supérieure à 0, même si $P(i,k,t)$ approche vite de 0.

Proposition 3. Si on suppose que $P(i,j,t)$ décroît avec t pour tout i et j et si, de plus, on note $Q(t) \triangleq \min_i Q(i,t)$ et $P(t) \triangleq \min_x \max_j \sum_k x_k P(j,k,t)$ alors :

$$Q(t) \geq \prod_{k=1}^{(t^*-t)/\delta} (1 - P(t+k\delta)) . \quad (7.7)$$

Corollaire Si $P(t)$ peut être considérée comme une fonction décroissante sur $[0, \infty)$ pour laquelle $I(t) = \int_t^\infty P(u)du$ existe, alors :

$$Q(t) \geq (1 - P(t))^{I(t)/(P(t)\delta)} \quad (7.8)$$

On en déduit que si les probabilités de détection sont faibles, il se peut que même au bout d'un temps infini de jeu, le chercheur ne trouve jamais la cible.

7.2. Cas unitaire

Dans le cas *unitaire*, le chercheur doit se trouver dans la même cellule que la cible pour avoir une chance de la détecter. Ce cas particulier [32] permet de résoudre le problème analytiquement. On considère les données suivantes :

- N le nombre de cellules ,
- $t(k,i)$ le temps nécessaire au chercheur pour aller de k en i ,
- $t(k)$ le temps moyen nécessaire au chercheur pour aller de k à une cellule quelconque,
- t le temps moyen nécessaire au chercheur pour aller d'une cellule quelconque à une autre cellule quelconque,
- n le nombre limite de recherches au cours du jeu,
- $T(k,n)$ la valeur d'un jeu limité dans le temps où le chercheur part de la cellule k ,
- $T(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(k,n)$ la valeur d'un jeu non limité dans le temps où le chercheur part de la cellule k ,
- $p = (p_1, \dots, p_N)$ la stratégie mixte pour le chercheur,
- $q = (q_1, \dots, q_N)$ la stratégie mixte pour la cible.

Le jeu pour lequel le nombre maximal de recherches est $n + 1$ peut être décomposé comme suit :

Si le chercheur choisit d'aller de la cellule k à la cellule i , alors le temps du jeu sera :

1) $t(k,i) + T(i,n)$ si la cible choisit une autre cellule que i et si les deux concurrents jouent optimalement.

2) $t(k,i)$ si la cible choisit la cellule i .

Si on suppose que p et q sont les stratégies mixtes pour respectivement le chercheur et la cible dans un jeu limité dans le temps à $n + 1$ recherches, alors :

$$T(k,n+1) = \min_p \max_q \left\{ \sum_i p_i \{t(k,i) + T(i,n)(1 - q_i)\} \right\} \quad (7.10)$$

Si l'expression de droite est une fonction linéaire de q , alors il existe une stratégie pure q (l'un des $q_i = 1$) pour tout p et l'équation précédente peut alors s'écrire :

$$T(k,n+1) = \min_p \left\{ \sum_i p_i \{t(k,i) + T(i,n)\} - \min_i (p_i T(i,n)) \right\} \quad (7.11)$$

Soit p est une stratégie pure, soit $p_i T(i,n)$ est constant pour tout i [32]. Le résultat de l'expression de droite dans l'équation est noté $F_k(T(1,n), T(2,n), \dots, T(N,n)) = F_k(T(.,n))$, où $F_k(x)$ est défini pour un vecteur x à N dimensions par :

$$F_k(x) = \left\{ \sum_i t(k,i)/x_i + N - 1 \right\} / \left\{ \sum_i 1/x_i \right\} \quad (7.12)$$

$$T(k,n+1) = \min \left\{ \min_i \{t(k,i) + T(i,n)\}, F_k(T(.,n)) \right\} \quad (7.13)$$

Ces deux équations permettent de réaliser un algorithme simple, ne nécessitant pas l'utilisation de l'algorithme du Simplexe et donnant les valeurs $T(k,n)$ du jeu (cf Annexe B). À titre d'exemple, on considère un problème à trois cellules où $t(k,i) = |k - i| + 1$.

Le tableau ci-dessous présente les valeurs du jeu $T(k,n)$ pour $n \leq 10$

Valeurs du jeu $T(k,n)$ pour $N = 3$.

n	k = 1	k = 2	k = 3
1	1.0000	1.0000	1.0000
2	2.0000	2.0000	2.0000
3	3.0000	3.0000	3.0000
4	4.0000	3.6667	4.0000
5	4.5882	4.2353	4.5882
6	4.9762	4.6248	4.9762
7	5.2355	4.8857	5.2355
8	5.4090	5.0601	5.4090
9	5.5250	5.1767	5.5250
10	5.6025	5.2546	5.6025

8. Conclusions

Le but de cet article est de donner quelques aperçus relatifs aux méthodes d'optimisation de l'effort de recherche (détection) d'une cible. Même si ces développements peuvent paraître quelque peu disparates, on voit qu'ils ont cependant d'importants points communs. Tout d'abord, il faut constater l'importance du concept « macroscopique » de détection et, corrélativement, de la notion de système. Ensuite, c'est le rôle joué par l'optimisation qui est ici central. On voit que l'optimisation et la modélisation sont deux étapes très étroitement reliées. La modélisation doit être capable de prendre en compte des problèmes réalistes tout en conduisant à des méthodes d'optimisation d'une complexité raisonnable.

Ensuite, on voit aussi que les connaissances *a priori* constituent toujours un point faible. Une façon d'y remédier est de recourir à une formulation de type jeux. On cherche alors à optimiser pour le pire cas. Une autre voie serait, bien sûr, d'essayer d'apprendre et de s'adapter à ces paramètres. Il faut noter que ce type de problèmes sont suffisamment difficiles pour n'avoir été résolus jusqu'à présent que pour des cas extrêmement simples (e.g. multi-armed bandits).

Annexe A: les conditions de KKT

Plus généralement, on considère la fonctionnelle $G(\mathbf{P}, \Phi)$ définie par :

$$G(\mathbf{P}, \Phi) = \sum_{\omega \in \Omega} p_{\omega} \prod_{t \in T} f [T_t(\omega), \varphi(T_t(\omega))] , \quad (8.1)$$

où f représente la fonctionnelle de probabilité de non-détection. On doit alors considérer le problème suivant : déterminer \mathbf{P}^* (cible) et Φ^* tels que :

$$G(\mathbf{P}, \Phi^*) \leq G(\mathbf{P}^*, \Phi^*) \leq G(\mathbf{P}^*, \Phi) \quad \forall \mathbf{P}, \forall \Phi . \quad (8.2)$$

Pratiquement, on doit donc considérer la résolution de deux sous-problèmes distincts.

8.1. Premier sous-problème

$$G(\mathbf{P}, \Phi^*) \leq G(\mathbf{P}^*, \Phi^*) .$$

On doit tout d'abord trouver les conditions nécessaires pour la résolution du problème :

$$\left| \begin{array}{l} \min_{\mathbf{P}} -G(\mathbf{P}, \Phi^*) , \\ \text{sous la contrainte :} \\ \sum_{\omega \in \Omega} p_{\omega} = 1 , p_{\omega} > 0 \quad \forall \omega \in \Omega . \end{array} \right. \quad (8.3)$$

Le Lagrangien associé ($\nu_{\omega} \geq 0 \quad \forall \omega \in \Omega$) s'écrit donc :

$$\mathcal{L}(\lambda, N) = -G(\mathbf{P}, \Phi^*) + \lambda \left(\sum_{\omega \in \Omega} p_{\omega} - 1 \right) - \sum_{\omega \in \Omega} \nu_{\omega} p_{\omega} . \quad (8.4)$$

On doit alors considérer deux sous-cas :

a) - **Premier sous-cas** : $p_{\omega}^* > 0$;

$$\left| \begin{array}{l} \text{KKT} \rightarrow - \prod_{t \in T} f [T_t(\omega), \varphi^*(T_t(\omega))] + \lambda = 0 , \\ \text{soit encore, notant } P(\omega, \Phi^*) = \prod_{t \in T} f [T_t(\omega), \varphi^*(T_t(\omega))] , \\ P(\omega, \Phi^*) = \text{cst} , \text{ si } : p_{\omega}^* > 0 , \forall \omega \in \Omega \end{array} \right. \quad (8.5)$$

b) - **Second sous-cas** : $p_{\omega}^* = 0$;

Alors on déduit des conditions de KKT $-\prod_{t \in T} f [T_t(\omega), \varphi^*(T_t(\omega))] + \lambda - \nu_{\omega} = 0$. Ainsi, dans le cas exponentiel on obtient bien les conditions (6.7).

8.2. Second sous-problème

Le problème que l'on doit résoudre est le suivant :

$$\left| \begin{array}{l} \min_{\Phi} G(\mathbf{P}^*, \Phi) , \\ \mathcal{C} : \sum_{j \in E} \varphi(j, t) = C_t , \varphi(j, t) \geq 0 . \end{array} \right. \quad (8.6)$$

Le Lagrangien associé prend alors la forme suivante :

$$\mathcal{L}(\Lambda) = \sum_{j \in E} \left\{ \sum_{\omega \in \Omega} p_{\omega}^* \prod_{t \neq t_0} f (\varphi(T_t(\omega))) \right\} f(\varphi(j, t_0)) + \Lambda^T \left(\sum_t \varphi(j, t) - C_t \right) + \text{pos.}(\varphi(j, t)) .$$

Notant $G(j, t_0) \triangleq \left\{ \sum_{\omega \in \Omega} p_{\omega}^* \prod_{t \neq t_0} f (\varphi(T_t(\omega))) \right\}$ et faisant l'hypothèse que $\varphi^*(j, t_0) > 0$, on a (KKT) :

$G(j, t_0) f'(\varphi^*(j, t_0)) + \lambda_{t_0} = 0$. Ce qui se ramène pour une loi de non-détection exponentielle aux conditions suivantes :

$$\sum_{\omega \in \Omega(j, t_0)} \left\{ p_{\omega}^* \prod_t f(\varphi^*(T_t(\omega))) \right\} = \frac{\lambda_{t_0}}{\alpha_j} , \quad (8.8)$$

où $\Omega(j, t_0)$ désigne l'ensemble des chemins passant par la cellule j , au temps t_0 .

Maintenant, on rappelle que des conditions de KKT du premier sous-problème, on a $\prod f(\varphi^*(T_t(\omega))) = \text{cst} > 0$ s'il existe $\omega \in \Omega(j, t_0)$ tel que $p_{\omega}^* > 0$. Pour ce cas, on a donc :

$$\sum_{\omega \in \Omega(j, t_0)} p_{\omega}^* = \text{cst} > 0 . \quad (8.9)$$

Si ce n'est pas le cas ; i.e. si $p_{\omega}^* = 0, \forall \omega \in \Omega(j, t_0)$, alors :

$$\sum_t \alpha(T_t(\omega)) \varphi^*(T_t(\omega)) \leq \mu_0 , \quad \forall \omega \in \Omega(j, t_0) ,$$

de telle sorte que, finalement, on a établi les conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi^*(j, t_0) > 0 \rightarrow \sum_{\omega \in \Omega(j, t_0)} p_{\omega}^* = \lambda_{t_0} , \\ \varphi^*(j, t_0) = 0 \rightarrow \sum_{\omega \in \Omega(j, t_0)} p_{\omega}^* \leq \lambda_{t_0} . \end{array} \right. \quad (8.10)$$

Références

- [1] S.J. BENKOVSKI, M.G. MONTICINO and J.R. WEISINGER, "A Survey of the Search Theory Literature". Naval Research Logistics, vol. 38, pp.469-491, 1991.
- [2] S.S. BROWN, Optimal Search for a Moving Target in Discrete Time and Space. Operations Research, vol. 28, n° 6, Nov.-December 1980, pp. 1275-1289.
- [3] F. DAMBREVILLE, *Optimisation de la gestion des capteurs et des informations pour un système de détection*. Thèse de doctorat de l'université de Rennes 1, novembre 2001.
- [4] F. DAMBREVILLE and J.-P. LE CADRE, Optimal Distribution of Continuous Search Effort for Detection of a Target in a Min-Max Game Context. ISIF Conference Fusion 2001, Montreal Can., Aug. 2001.
- [5] F. DAMBREVILLE and J.-P. LE CADRE, Detection of a Markovian Target with Optimization of the Search Efforts under Generalized Linear Constraints. Naval Research Logistics 49 (2), pp 117-142, 2002.

- [6] F. DAMBREVILLE and J.-P. LE CADRE, Spatio-temporal multi-mode information management for moving target detection. *Journal of Information Fusion*, vol. 5, pp 169-178, 2004.
- [7] E. DUFLOS, M. de VILMORIN et P. VANHEEGHE, Détermination de stratégies de gestion dynamique optimale pour un radar à balayage électronique. *Traitement du Signal* 2002, vol. 19, no. 2, pp. 59-73.
- [8] J.N. EAGLE, Estimating the Probability of a Diffusing Target Encountering a Stationary Sensor. *Naval Research Logistics*, Vol. 34, pp. 43--51, 1987.
- [9] S. GAL, *Search Games*. Academic Press, New-York, 1980.
- [10] A. GARNAEV, "Search Games and Other Applications of Game Theory". *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*. Springer Verlag 2000.
- [11] J. de GUENIN, Optimum Distribution of Effort: an Extension of the Koopman Basic Theory. *Operations Research*, Jan-Feb. 1961, pp 1-7.
- [12] K. IIDA, Optimal Search Plan Minimizing the Expected Risk of the Search for a Target with Conditionally Deterministic Motion. *Naval Research Logistics*, vol.36, pp. 596-613, 1989.
- [13] K. IIDA, R. HOHZAKI and S. FURUI, A Search Game for a Mobile Target with the Conditionnally Deterministic Motion Defined by Paths. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, vol. 39, n° 4, pp. 501-511, Dec. 1996.
- [14] K. IIDA, *Studies on the Optimal Search Plan*. *Lecture Notes in Statistics*, vol. 70, Springer-Verlag, 1992.
- [15] R. HOHZAKI, K. IIDA , "A search game when a search path is given". *European Journal of Operational Research* 124, pp 114-124, 2000.
- [16] B.O. KOOPMAN, *Search and Screening. General Principles with Historical Applications*. MORS Heritage Series, Alexandria, Virginia, 1999.
- [17] I. MOSKOWITZ and J. SIMMEN, Asymptotic Results in Search Theory. *Naval Research Logistics*, Vol. 36, pp. 577-596, 1989.
- [18] J.-P. LE CADRE and G. SOURIS, Seaching Tracks. *IEEE Trans. on Aerospace & Electr. Systems*, vol. 36, no. 4, pp. 1149-1166.
- [19] M. MUSKAT, The flow of Compressible Fluids through Porous Media and Some Problems in Heat Combustion. *Physics*, vol. 5, pp. 71-94, 1934.
- [20] T. NAKAI, Search Models with Continuous Effort Under Various Criteria. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, vol. 31, n° 3, pp. 335 351, Sept. 1988.
- [21] D.H. WAGNER, W. CHARLES MYLANDER and T.J. SANDERS, *Naval Operations Analysis, 3rd edition*. Naval Institute Press, Annapolis, MD, 1999.
- [22] M. SAKAGUCHI, "A two-Sided resource Allocation Game in Search for a Stationary Object". *Math. Japonica*, vol. 32, n° 6, pp. 979-991, 1987.
- [23] M. SISLIOGLU, *A Mathematical Model for Calculating Detection Probability of a Diffusive Target*. Master's Thesis, Naval Postgraduate School, Monterey, CA, 1984.
- [24] G. SOURIS et J.-P. LE CADRE, *Un panorama des méthodes d'optimisation de l'effort de recherche en détection*. *Traitement du Signal* 1999-Volume 16, n° 6, pp 404-424.
- [25] L.D. STONE, *Theory of Optimal Search*, 2nd ed. Operations Research Society of America, ORSA Books, Arlington, VA, 1989.
- [26] W.R. STROMQUIST and L.D. STONE, Constrained Optimization of Functionals with search Theory Applications. *Mathematics of Operations Research*, vol. 6, n° 4, pp. 518-529, Nov. 1981.
- [27] L.D. STONE, Necessary and Sufficient Conditions for Optimal Search Plans for Moving Targets. *Mathematics of Operations Research*, vol. 4, n° 4, Nov. 1979, pp. 431-440.
- [28] L.C. THOMAS and A.R. WASHBURN, "Dynamic Search Games". *Operations Research*, vol. 39, no. 3, pp 415-422, May-June 1991.
- [29] A.R. WASHBURN, *Search and Detection*, 2nd ed. Operations Research Society of America, ORSA Books, Arlington, VA, 1989.
- [30] A.R. WASHBURN, *Two Persons Zero-Sum Games*, 2nd ed. Topics in Operations Research, INFORMS, 1994.
- [31] A.R. WASHBURN, Search for a Moving Target: the FAB algorithm. *Operations Research*, vol. 31, n° 4, July-Aug., 1983, pp. 739-751.
- [32] A.R. WASHBURN and K. WOOD, Two-person Zero-Sum Games for Network Interdiction. *Operations Research*, vol. 43, n° 2, May-April, 1995, pp. 243-251.
- [33] A.R. WASHBURN, *Search and Detection*. MAS ORSA Books, Arlington VA, 1989.
- [34] R.K. Wood, "Deterministic Network Interdiction". *Mathl. Comput. Modelling*, Vol. 17, n° 2, pp 1-18, 1993.

Jean-Pierre Le Cadre

Après des études de mathématiques, Jean-Pierre Le Cadre a soutenu une thèse de 3^{ème} cycle, puis de doctorat d'État; toutes deux en traitement du signal et à l'INPG. De 1980 à 1989, ses travaux portent essentiellement sur le traitement d'antenne, dans le cadre de systèmes sonar et sont effectuées au GERDSM (DCN Toulon). Depuis 1989, il est affecté à l'IRISA en temps que chercheur CNRS (chargé de recherche puis directeur de recherche). Ses thèmes de recherche se sont réorientés d'une part vers les thèmes liées à l'analyse du mouvement et en particulier les problèmes de poursuite et d'extraction multipistes; et d'autre part vers l'étude et l'analyse de systèmes de détection d'un point de vue opérationnel (planification et gestion de capteurs).