

# Approximation linéaire au sens large et circularité des signaux déterministes

## Widely linear approximation and circularity of deterministic signals

**Bernard Picinbono**

Laboratoire des Signaux et Systèmes, Supélec, Plateau de Moulon, 91190 Gif-sur-Yvette,  
bernard.picinbono@lss.supelec.fr

Manuscrit reçu le 24 novembre 2004

Résumé et mots clés

Les systèmes linéaires au sens large ont été introduits dans le contexte de l'estimation statistique des signaux aléatoires complexes. Dans ce cadre le concept de circularité s'introduit naturellement et joue un rôle fondamental dans diverses questions de traitement du signal. Le but de cet article est de montrer que les problèmes connus dans le domaine de l'estimation statistique se posent de manière similaire dans celui de l'approximation de signaux déterministes. On met en particulier en évidence l'avantage d'utiliser des systèmes linéaires au sens large au lieu de systèmes strictement linéaires. Ceci conduit à introduire la circularité de signaux déterministes et permet de donner un éclairage nouveau aux développements de Fourier.

Abstract and key words

Widely linear systems have been introduced in the context of statistical estimation of complex random signals. In this framework the concept of circularity appears naturally and plays an important role in many problems of signal processing. The purpose of this paper is to show that methods well known in estimation problems can be transposed for the approximation of deterministic signals. In particular it is shown that in many cases there is an advantage to use widely linear systems instead of classical strictly linear systems. For this analysis the concept of circularity is of great importance and it is introduced for non-random signals. This yields for example a new approach of Fourier expansions.

## 1. Introduction

L'approximation linéaire de signaux déterministes est courante en traitement du signal et le meilleur exemple est celui des séries de Fourier. Soit un signal  $y(t)$  et une suite de  $N$  signaux  $x_n(t)$  tous à support borné sur un intervalle  $\Delta T$  que l'on peut prendre sans restreindre la généralité égal à  $[0, 1]$ . Il est courant de remplacer  $y(t)$  par une approximation du type  $\hat{y}(t) = \sum_{n=1}^N c_n x_n(t)$ , les coefficients  $c_n$  étant déterminés en minimisant une certaine erreur. L'intérêt principal de ce développement est de remplacer un signal à temps continu  $y(t)$  par

une suite de nombres  $c_n$  fournissant approximativement la même information. Cela permet d'appliquer aux signaux toutes les méthodes bien connues d'algèbre linéaire et ce développement est encore plus intéressant quand les  $x_n(t)$  sont fonctions propres de certains opérateurs linéaires particulièrement importants. C'est le cas des séries de Fourier utilisant les fonctions propres du filtrage linéaire.

Toutefois il n'y a en principe aucune raison de se limiter à une *approximation linéaire*. On peut alors poser le problème sous la forme suivante. Soit  $\mathcal{S}$  l'ensemble des signaux pouvant se mettre sous la forme  $s(t) = S[\mathbf{x}(t)]$ , où  $S$  représente l'action d'un système quelconque et  $\mathbf{x}(t)$  le vecteur non-aléatoire de

composantes  $x_k(t)$ . Il s'agit alors de trouver au moins un élément de  $\mathcal{S}$  dénommé  $\hat{y}(t)$  et minimisant une erreur arbitrairement introduite. La plus simple possible est l'erreur quadratique définie par

$$\varepsilon^2 = \int_0^1 |y(t) - \hat{y}(t)|^2 dt = \int_0^1 |y(t) - S[\mathbf{x}(t)]|^2 dt. \quad (1)$$

Posé sous cette forme très générale le problème est souvent singulier, dans le sens que l'on peut trouver une solution non-linéaire conduisant à une approximation parfaite, c'est-à-dire avec une erreur nulle.

Toutefois ces systèmes optimaux parfaits sont souvent difficiles à réaliser et l'on peut alors tenter de trouver une solution non-linéaire dans une classe plus limitée de systèmes. Parmi ceux-ci les plus simples sont les systèmes linéaires au sens large (SLL). Ils jouent un rôle important dans les problèmes d'estimation statistique de signaux aléatoires complexes [1]. Il est maintenant bien connu que ces systèmes permettent d'atteindre de meilleures performances que les systèmes linéaires au sens strict (SLS) sauf dans le cas où les signaux considérés sont *circulaires* [2][3][4]. Ainsi le concept de circularité apparaît comme un point central dans ces problèmes d'estimation. Il joue d'ailleurs un rôle important dans beaucoup d'autres questions concernant les signaux aléatoires.

Il existe une forte analogie entre l'estimation des signaux aléatoires et l'approximation des signaux déterministes. Dès lors il paraît naturel de transférer dans le domaine déterministe des propriétés connues dans le domaine aléatoire. Après avoir posé le problème, on indique comment trouver le SLL optimal d'approximation. Dans le cadre de cette recherche le concept de circularité, bien connu pour les signaux aléatoires, est défini pour les signaux déterministes. On montre en particulier que les signaux apparaissant dans les séries de Fourier ont bien la propriété de circularité et c'est pourquoi il n'y a pas d'avantage dans ce cas à utiliser les procédures linéaires au sens large. Toutefois les exponentielles complexes à la base des séries de Fourier ne sont de loin pas les seules fonctions permettant d'approximer un signal et l'on montre qu'il existe des fonctions qui ne sont pas circulaires et pour lesquelles les méthodes linéaires au sens strict ne sont pas optimales. Pour ceci on introduit une méthode permettant de calculer l'avantage des méthodes linéaires au sens large par rapport à celles au sens strict. Ce point est illustré par quelques exemples numériques confirmant bien cet avantage.

## 2. Système linéaire au sens large optimal

L'approximation linéaire (ou affine) au sens large peut s'exprimer sous la forme

$$\hat{y}(t) = \mathbf{u}^H \mathbf{x}(t) + \mathbf{v}^T \mathbf{x}^*(t) + w. \quad (2)$$

L'idée de base consiste à introduire le complexe conjugué dans la procédure d'approximation. Lorsque  $w = 0$  le système (2) est linéaire au sens de l'addition. Par contre si l'on multiplie l'entrée par un facteur  $\lambda$  complexe, la sortie n'a aucune raison d'être multipliée par ce facteur. C'est ce qui explique le terme de *linéarité au sens large*. L'approximation devient strictement linéaire (ou affine) lorsqu'on impose dans (2)  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

Dans certains cas étudiés ci-dessous l'introduction du complexe conjugué n'apporte aucun avantage. Comme on le verra, c'est en particulier le cas lorsque les composantes de  $\mathbf{x}(t)$  sont des exponentielles complexes, ce qui correspond aux séries de Fourier. Cependant ceci n'est pas général et notre objectif consiste à évaluer l'intérêt de (2) par rapport à l'approximation strictement linéaire qui est habituellement utilisée.

Comme dans le cas aléatoire le calcul des quantités  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  et  $w$  se fait en utilisant le principe d'orthogonalité qui, du point de vue géométrique, caractérise la projection. Il faut pour ceci introduire un produit scalaire de deux signaux complexes  $a(t)$  et  $b(t)$  définis sur  $[0, 1]$  et d'énergie finie. Celui qui est adapté à l'erreur (1) est évidemment

$$\langle a, b \rangle \triangleq \int_0^1 a(t)b^*(t)dt. \quad (3)$$

En effet avec ce produit scalaire l'erreur (1) devient le carré de la distance entre  $y(t)$  et  $\hat{y}(t)$ . Minimiser cette erreur revient donc à minimiser une distance et la méthode utilise alors le principe d'orthogonalité indiquant que le signal  $y(t) - \hat{y}(t)$  est orthogonal à tous les signaux du membre de droite de (2). Ceci signifie que  $\hat{y}(t)$  est la projection de  $y(t)$  sur le sous-espace de Hilbert engendré par le signal constant et les composantes des signaux  $\mathbf{x}(t)$  et  $\mathbf{x}^*(t)$ .

Pour faciliter l'écriture des relations d'orthogonalité on introduit les notations suivantes. Soit deux signaux vectoriels  $\mathbf{a}(t)$  et  $\mathbf{b}(t)$  respectivement de composantes  $a_i(t)$  et  $b_j(t)$ . La quantité  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}^T \rangle$  est la matrice carrée dont les éléments sont  $\langle a_i, b_j \rangle$ . Cette matrice est évidemment définie non négative. De même la matrice  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}^H \rangle$  est celle d'éléments  $\langle a_i, b_j^* \rangle = \int_0^1 a_i(t)b_j^*(t)dt$ . Enfin le vecteur  $\langle \mathbf{a}, y \rangle$  est le vecteur de composantes  $\langle a_i, y \rangle$ .

Les moyennes temporelles des signaux  $\mathbf{a}(t)$  et  $y(t)$  de (2) peuvent également se mettre sous forme de produits scalaires et l'on a

$$\mathbf{m}_x \triangleq \int_0^1 \mathbf{x}(t)dt = \langle \mathbf{x}, 1 \rangle, \quad m_y \triangleq \int_0^1 y(t)dt = \langle y, 1 \rangle. \quad (4)$$

L'orthogonalité entre l'erreur  $y - \hat{y}$  et tout signal constant, soit  $\langle y - \hat{y}, c \rangle = 0$  donne alors

$$w = m_y - \mathbf{u}^H \mathbf{m}_x - \mathbf{v}^T \mathbf{m}_x. \quad (5)$$

Ceci montre que si  $\mathbf{m}_x = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{m}_y = \mathbf{0}$ , c'est-à-dire si les signaux déterministes ont une moyenne temporelle nulle, on a  $w = 0$  et le terme d'approximation affine disparaît.

De même l'orthogonalité entre l'erreur  $y - \hat{y}$  et  $\mathbf{x}$  ou  $\mathbf{x}^*$  donne

$$\Gamma \mathbf{u} + \mathbf{C} \mathbf{v}^* = \mathbf{r} \quad , \quad \mathbf{C}^* \mathbf{u} + \Gamma^* \mathbf{v}^* = \mathbf{s}^* \quad , \quad (6)$$

expressions dans lesquelles les matrices et vecteurs introduits sont définis par

$$\Gamma = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}^T \rangle - \mathbf{m}_x \mathbf{m}_x^H \quad ; \quad \mathbf{C} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}^H \rangle - \mathbf{m}_x \mathbf{m}_x^T \quad (7)$$

$$\mathbf{r} = \langle \mathbf{x}, y \rangle - \mathbf{m}_x m_y^* \quad ; \quad \mathbf{s} = \langle \mathbf{x}, y^* \rangle - \mathbf{m}_x m_y \quad . \quad (8)$$

Les vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  solutions des équations (6) qui définissent l'approximation linéaire au sens large de  $y(t)$  en fonction de  $\mathbf{x}(t)$  se calculent aisément et l'on obtient

$$\mathbf{u} = [\Gamma - \mathbf{C} \Gamma^{-*} \mathbf{C}^*]^{-1} [\mathbf{r} - \mathbf{C} \Gamma^{-*} \mathbf{s}^*] \quad (9)$$

$$\mathbf{v} = [\Gamma - \mathbf{C} \Gamma^{-*} \mathbf{C}^*]^{-1} [\mathbf{s} - \mathbf{C} \Gamma^{-*} \mathbf{r}^*] \quad (10)$$

où  $\Gamma^{-*} = (\Gamma^{-1})^* = (\Gamma^*)^{-1}$ . On suppose dans toute la suite que la matrice  $\Gamma$  est de rang plein.

Calculons maintenant l'erreur d'approximation. Pour ceci il est préférable de retrancher au préalable les valeurs moyennes et de travailler avec des quantités centrées. Les signaux centrés associés à  $\mathbf{x}(t)$  et  $y(t)$  sont

$$\mathbf{x}_c(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{m}_x \quad , \quad y_c(t) = y(t) - m_y \quad . \quad (11)$$

Il résulte de (2) et (5) que

$$\hat{y}(t) = m_y + \mathbf{u}^H \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{v}^H \mathbf{x}_c^*(t) \quad . \quad (12)$$

En prenant la moyenne on déduit que  $m_y = m_{\hat{y}}$ , de sorte que

$$\hat{y}_c(t) = \mathbf{u}^H \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{v}^H \mathbf{x}_c^*(t) \quad . \quad (13)$$

En introduisant la quantité

$$d^2(y) \triangleq \langle y, y \rangle \quad (14)$$

qui est le carré de la norme (ou l'énergie) de  $y(t)$  on peut écrire l'erreur (1) sous la forme

$$\varepsilon^2 = d^2(y - \hat{y}) = d^2(y_c - \hat{y}_c) \quad . \quad (15)$$

Le principe d'orthogonalité utilisé dans les calculs précédents assure que  $y(t) - \hat{y}(t)$  est orthogonal à  $\hat{y}(t)$ . En retranchant les valeurs moyennes on déduit que  $y_c(t) - \hat{y}_c(t)$  est orthogonal à  $\hat{y}_c(t)$ . Il résulte alors de (13) que

$$\varepsilon^2 = d^2(y_c) - \langle \hat{y}_c, y_c \rangle \quad (16)$$

qui traduit d'ailleurs le théorème de Pythagore. En remplaçant dans (16)  $\hat{y}_c(t)$  par la valeur issue de (13) on déduit que l'erreur

d'approximation peut se mettre sous la forme

$$\varepsilon^2 = \sigma_y^2 - (\mathbf{u}^H \mathbf{r} + \mathbf{v}^T \mathbf{s}^*) \quad , \quad (17)$$

où  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  sont donnés par (9) et (10) et  $\sigma_y^2 = \langle y_c, y_c \rangle = \langle y, y \rangle - |m_y|^2$ .

Comparons maintenant les approximations linéaires au sens strict et au sens large. La première est, comme on l'a vu, un cas particulier de la seconde quand on introduit dans (2) la contrainte  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ . Dans ce cas l'équation (6) donne la solution classique  $\mathbf{u} = \Gamma^{-1} \mathbf{r}$ . En particulier quand  $\Gamma = \mathbf{I}$  on obtient  $\mathbf{u} = \mathbf{r}$  qui est utilisé par exemple dans les séries de Fourier. L'erreur d'approximation est donnée par (17) où  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{u} = \Gamma^{-1} \mathbf{r}$ , soit

$$\varepsilon_L^2 = \sigma_y^2 - \mathbf{r}^H \Gamma^{-1} \mathbf{r} \quad . \quad (18)$$

La différence  $\delta \varepsilon^2 = \varepsilon_L^2 - \varepsilon^2$  est une indication sur l'augmentation des performances lorsque l'on utilise l'approximation linéaire au sens large plutôt qu'au sens strict. Nous l'appellerons dans la suite le gain (absolu) de la méthode au sens large par rapport à celle au sens strict. On montre en appendice que ce gain peut se mettre sous la forme

$$\delta \varepsilon^2 = [\mathbf{s} - \mathbf{C} \Gamma^{-*} \mathbf{r}^*]^H [\Gamma - \mathbf{C} \Gamma^{-*} \mathbf{C}^*]^{-1} [\mathbf{s} - \mathbf{C} \Gamma^{-*} \mathbf{r}^*] \quad . \quad (19)$$

Cette quantité est une forme quadratique qui est non-négative parce que la matrice  $[\Gamma - \mathbf{C} \Gamma^{-*} \mathbf{C}^*]^{-1}$  est définie non-négative. Il est parfois plus intéressant d'utiliser le gain relatif  $\delta \varepsilon_r^2 = (1/\sigma_y^2) \delta \varepsilon^2$ .

## 2.1. Dégénérescence

Cette situation se produit quand  $\Gamma - \mathbf{C} \Gamma^{-*} \mathbf{C}^*$  n'est plus une matrice de rang plein, de sorte que son inverse n'existe pas. C'est en particulier le cas quand il y a une relation linéaire entre les vecteurs  $\mathbf{x}(t)$  et  $\mathbf{x}^*(t)$  telle que  $\mathbf{x}^*(t) = \mathbf{M} \mathbf{x}(t)$ , où  $\mathbf{M}$  satisfait évidemment  $\mathbf{M}^* \mathbf{M} = \mathbf{I}$ . Dans ce cas il y a une infinité de solutions au problème général mais toutes ces solutions sont de la forme  $(\mathbf{u}^H + \mathbf{v}^T \mathbf{M}) \mathbf{x}(t) + w$ , ce qui signifie qu'elles sont strictement linéaires (ou affines). Ainsi l'approximation au sens large est sans intérêt et  $\delta \varepsilon^2 = 0$ , même si (19) ne peut être utilisée. Présentons les exemples les plus significatifs d'une telle situation.

Le premier apparaît quand  $\mathbf{x}(t)$  est réel, de sorte que  $\mathbf{M} = \mathbf{I}$ . Dans ce cas il est évident que les deux équations (6) sont équivalentes car  $\Gamma = \mathbf{C}$  et  $\mathbf{r} = \mathbf{s}^*$ , ce qui donne la solution  $\mathbf{u} + \mathbf{v}^* = \Gamma^{-1} \mathbf{r}$ , ou  $\mathbf{v}^* = \Gamma^{-1} \mathbf{r} - \mathbf{u}$ . En utilisant cette valeur dans (2) on obtient  $\hat{y}(t) = \mathbf{r}^H \Gamma^{-1} [\mathbf{x}(t) - \mathbf{m}_x] + m_y$  qui est l'approximation linéaire classique. Une extension élémentaire de cette situation se produit quand  $\mathbf{x}(t) = \text{diag}\{\exp(j\phi_k)\} \mathbf{a}(t)$ , où  $\mathbf{a}(t)$  est réel.

La seconde situation intéressante apparaît quand  $\mathbf{M}$  est réelle et satisfait  $\mathbf{M}^2 = \mathbf{I}$ . C'est en particulier le cas des permutations symétriques et ceci se produit pour les développements en série

de Fourier avec des fréquences positives et négatives. En effet si les composantes de  $\mathbf{x}(t)$  sont  $\exp(jn\Omega t)$ ,  $-N \leq n \leq N$ , celles de  $\mathbf{x}^*(t)$  sont les mêmes mais simplement dans l'ordre inverse. Dans ce cas l'introduction de  $\mathbf{x}^*(t)$  ou la considération de l'approximation linéaire au sens large ne produit aucun avantage par rapport à celle au sens strict. Il est probable que le fait que les développements de Fourier soient les plus importants en théorie du signal explique pourquoi l'approximation au sens large a longtemps été ignorée.

## 2.2. Circularité

Cette situation est caractérisée par les relations  $\mathbf{C} = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ . Dans ce cas le problème n'est pas dégénéré parce que  $\Gamma - \mathbf{C}\Gamma^* \mathbf{C}^* = \Gamma$  qui est une matrice de rang plein. Cependant  $\delta\epsilon^2 = 0$ , comme ceci apparaît dans (19), et ainsi il n'y a aucun intérêt à utiliser l'approximation au sens large plutôt que celle au sens strict.

Le concept de circularité a été abondamment étudié dans le cas des *signaux aléatoires* [2, 3, 4]. Il est spécialement important pour les vecteurs aléatoires gaussiens [5] et il est relié au concept de vecteurs aléatoires dits « impropres » [6].

Pour les *signaux déterministes* il signifie que pour tout nombre complexe unimodulaire  $\alpha$ , les matrices définies par (7) et (8) pour les signaux  $\alpha x_n(t)$ ,  $\alpha y(t)$  et pour les signaux  $x_n(t)$ ,  $y(t)$  sont les mêmes. Ceci signifie aussi une invariance dans la multiplication par un facteur de phase, ou une invariance dans toute rotation du plan complexe.

Ceci conduit à discuter à nouveau le concept de linéarité de l'approximation (2) quand  $w = 0$ .

Dans l'approximation avec des méthodes linéaires au sens strict il est évident que le système optimum est invariant dans tout effet d'échelle par un nombre complexe  $\lambda$ . Ceci signifie que l'approximation de  $y(t)$  en fonction de  $x_n(t)$  ou celle de  $\lambda y(t)$  en fonction de  $\lambda x_n(t)$  conduisent au même système car le vecteur  $\mathbf{u} = \Gamma^{-1} \mathbf{r}$  ne change pas par effet d'échelle.

Considérons maintenant le cas de l'approximation linéaire au sens large. Dans l'opération de changement d'échelle  $\Gamma$  et  $\mathbf{r}$  sont multipliés par  $|\lambda|^2$  tandis que  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{s}$  sont multipliés par  $|\lambda|^2 \exp(2j\theta)$ , où  $\theta$  est l'argument de  $\lambda$ . En introduisant ces relations dans (9) et (10) on trouve que  $\mathbf{u}$  est inchangé tandis que  $\mathbf{v}$  est multiplié par  $\exp(2j\theta)$ . Il n'y a ainsi une invariance par changement d'échelle que si  $\theta = 0$  or  $\theta = \pi$ , c'est-à-dire si  $\lambda$  est réel. Par contre l'invariance d'échelle avec des nombres complexes  $\lambda$  apparaît dans le cas de signaux circulaires, parce que dans ce cas l'approximation optimale est strictement linéaire.

Il convient de noter que la circularité est une *propriété conjointe* de  $x_n(t)$  et  $y(t)$ . Il est parfaitement possible d'avoir  $\mathbf{C} = \mathbf{0}$  sans que l'on ait  $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ , ce qui correspond à la circularité de  $x_n(t)$  seul. Ce cas sera repris plus en détail ci-dessous.

Il est important de savoir si la circularité est une propriété courante. Nous allons voir qu'elle apparaît particulièrement dans le

cas de signaux dits *analytiques* qui sont caractérisés par le fait que leurs transformées de Fourier sont nulles pour les fréquences négatives [4]. Ils jouent un rôle très important dans la définition de l'amplitude et de la fréquence instantanée des signaux [8].

Comme les valeurs moyennes ne jouent aucun rôle dans la discussion qui suit, nous supposons qu'elles sont nulles. Considérons tout d'abord le cas de la matrice  $\mathbf{C}$  dont les éléments de matrice sont

$$c_{mn} = \int_0^1 x_m(t)x_n(t)dt.$$

Ces éléments de matrice peuvent aussi s'exprimer en fonction des transformées de Fourier  $X_m(\nu)$  de  $x_m(t)$  et l'on a

$$c_{mn} = \int X_m(\nu)X_n(-\nu)d\nu. \tag{20}$$

Si les signaux  $x_n(t)$  sont analytiques, le produit satisfait  $X_m(\nu)X_n(-\nu) = 0$ , ce qui donne  $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ . Le même argument peut être utilisé si  $y(t)$  est aussi analytique, ce qui donne  $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ . Cependant la circularité n'apparaît pas uniquement dans le cas des signaux analytiques. La propriété (20) n'implique nullement que  $X_m(\nu) = 0$  pour les fréquences négatives et peut être vérifiée par une grande variété de signaux. Il suffit par exemple que  $X_m(\nu)$  et  $X_n(-\nu)$  n'aient pas de fréquences communes, ce qui est bien entendu le cas des signaux analytiques, mais aussi de bien d'autres signaux qui ne sont pas analytiques.

Le même raisonnement peut être fait en utilisant les coefficients  $X_m[k]$  du développement en somme de Fourier du signal  $x_m(t)$ . Dans ce cas (20) est remplacé par  $\sum_k X_m[k]X_n[-k]$ .

Ceci est en particulier le cas des signaux  $x_m(t) = \exp(2\pi jmt)$  pour  $0 \leq t \leq 1$  et  $m > 0$ , utilisés dans l'approximation de Fourier. Pour de tels signaux les coefficients  $X_m[k]$  sont nuls pour  $k < 0$  et ceci implique que la matrice  $\mathbf{C}$  est nulle. Ils sont également orthogonaux et  $\Gamma = \mathbf{I}$ . Ainsi ces signaux sont circulaires et orthonormés.

## 3. Exemples

Dans ce paragraphe nous allons présenter et discuter quelques exemples d'application illustrant les résultats précédents.

Rappelons tout d'abord que si les signaux  $x_m(t)$  et  $y(t)$  sont réels il n'y a aucun intérêt à utiliser une approximation linéaire au sens large. Ceci est évident parce que  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*(t)$  et  $y^*(t) = y(t)$ . Ainsi dans la discussion qui suit nous supposons qu'au moins un de ces signaux est complexe et de plus que nous ne sommes pas dans le cas d'une dégénérescence discutée précédemment.

### 3.1. Approximation de signaux réels

Supposons que le signal  $y(t)$  dont on doit faire l'approximation soit réel. Dans notre présentation ceci est caractérisé par la relation  $\mathbf{r} = \mathbf{s}$ . Supposons également, pour simplifier, que les signaux  $x_n(t)$  soient orthonormaux, ce qui implique que  $\Gamma = \mathbf{I}$ . Dans ce cas on déduit de (9) et (10) que  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$  et de (12) que

$$\hat{y}(t) = m_y + 2\text{Re}\{\mathbf{u}^H[\mathbf{x}(t) - \mathbf{m}_x]\}. \quad (21)$$

Dans cette équation  $\mathbf{u}$  est encore donné par (9) qui devient ici

$$\mathbf{u} = (\mathbf{I} - \mathbf{C}\mathbf{C}^*)^{-1}(\mathbf{r} - \mathbf{C}\mathbf{r}^*).$$

L'erreur d'approximation est donnée par (17) qui peut s'écrire sous la forme

$$\varepsilon^2 = \sigma_y^2 - (\mathbf{u}^H \mathbf{r} + \mathbf{u}^T \mathbf{r}^*) = \sigma_y^2 - 2\text{Re}(\mathbf{u}^H \mathbf{r}).$$

Enfin le gain par rapport à l'approximation linéaire au sens strict donné par (19) devient

$$\delta\varepsilon^2 = (\mathbf{r} - \mathbf{C}\mathbf{r}^*)^H (\mathbf{I} - \mathbf{C}\mathbf{C}^*)^{-1} (\mathbf{r} - \mathbf{C}\mathbf{r}^*).$$

Appliquons ceci dans le cas où les signaux  $x_n(t)$  sont des exponentielles complexes. Nous avons vu qu'ils étaient normés et circulaires. Cependant  $y(t)$  étant réel ne peut être circulaire. Le vecteur  $\mathbf{u}$  de l'approximation (21) vaut  $\mathbf{r}$  et l'on voit que dans le cas centré l'approximation linéaire au sens large est tout simplement le double de la partie réelle de celle au sens strict. Quant au gain des performances il vaut  $\mathbf{r}^H \mathbf{r}$ .

### 3.2. Approximation avec des signaux circulaires

Supposons maintenant que les signaux  $x_m(t)$  sont circulaires, c'est-à-dire que  $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ , mais non conjointement circulaires avec  $y(t)$ , c'est-à-dire que  $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$ . Dans ce cas les deux équations (6) sont découplées ce qui donne

$$\mathbf{u} = \Gamma^{-1} \mathbf{r}, \quad \mathbf{v} = \Gamma^{-1} \mathbf{s}.$$

Ceci signifie que le vecteur  $\mathbf{u}$  est celui obtenu dans l'approximation strictement linéaire. Ainsi l'approximation linéaire au sens large peut se décomposer en deux approximations linéaires au sens strict, la première avec  $\mathbf{x}(t)$  et la seconde avec  $\mathbf{x}^*(t)$ .

Le gain est donné par (19) qui devient

$$\delta\varepsilon^2 = \mathbf{s}^H \Gamma^{-1} \mathbf{s}.$$

Cette expression apparaît dans l'erreur obtenue quand on fait l'approximation de  $y(t)$  à l'aide de  $\mathbf{x}^*(t)$  par une procédure strictement linéaire, ce qui donne une erreur similaire à (18).

Donnons deux exemples pour illustrer ce résultat. Considérons à nouveau les signaux exponentiels complexes  $x_n(t) = \exp(2\pi jnt)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $1 \leq n \leq N$ , qui sont à la base

des séries de Fourier. Supposons tout d'abord que l'on veuille les utiliser pour faire l'approximation du signal  $y(t) = \exp(2\pi jat)$ . Il est clair que la matrice  $\Gamma$  est la matrice unité et le gain  $\delta\varepsilon^2$  vaut  $\mathbf{s}^H \mathbf{s}$ . Comme les signaux  $x_n(t)$  sont de moyenne nulle, le vecteur  $\mathbf{s}$  vaut  $\langle \mathbf{x}, y^* \rangle$ . Ses composantes sont données par

$$s_n = \text{sinc}(a + n) \exp[\pi j(a + n)], \quad (22)$$

où  $\text{sinc}$  est la fonction sinus cardinal définie par  $\text{sinc}(x) = \sin(\pi x)/(\pi x)$ . Le gain  $\delta\varepsilon^2$  vaut donc  $\sum_{n=1}^N |s_n|^2$ . Comme les signaux  $y_a(t)$  ont une variance dépendant de  $a$  il est plus approprié d'utiliser le gain relatif  $\delta\varepsilon_r^2$  précédemment défini et obtenu en divisant  $\delta\varepsilon^2$  par la variance  $\sigma_y^2$  de  $y_a(t)$ . Celle-ci se calcule aisément et vaut  $1 - \text{sinc}^2(a)$ . Elle est égale à 1 lorsque  $a$  est entier ce qui est normal puisque dans ce cas  $y_a(t) = 1$  et  $m_y = 0$ .

On a représenté sur la figure 1 les valeurs de la variance  $\sigma_y^2$  et des gains  $\delta\varepsilon^2$  et  $\delta\varepsilon_r^2$  en fonction de  $a$  pour  $N = 16$ . Ces courbes appellent les remarques suivantes.

Comme indiqué ci-dessus la variance de  $y(t)$  vaut 1 pour les valeurs entières de  $a$ . Par contre pour ces mêmes valeurs le gain en performance  $\delta\varepsilon^2$  est nul. En effet si  $a$  est entier les signaux  $x_n(t)$  et  $y(t)$  sont circulaires dans leur ensemble et l'on se retrouve dans la situation évoquée ci-dessus où la linéarité au sens large n'apporte rien de plus que celle au sens strict. Ceci se voit évidemment aussi sur la formule (22) car les composantes  $s_n$  étant nulles le gain l'est aussi.

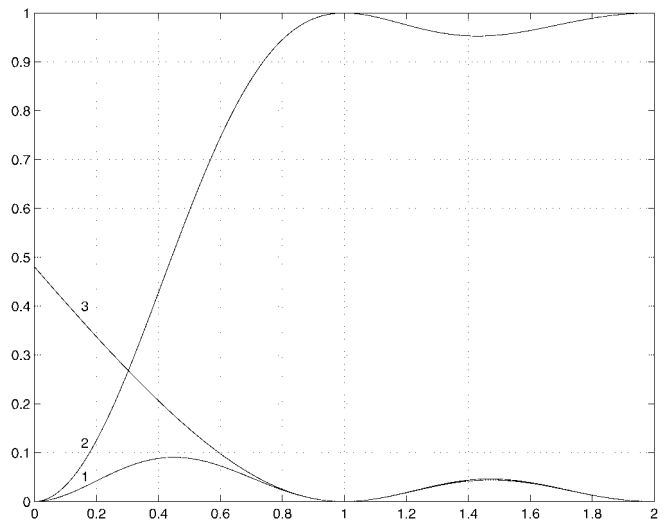


Figure 1. Approximation du signal  $\exp(2\pi jat)$   
1. gain absolu  $\delta\varepsilon^2$ , 2 : variance  $\sigma_y^2$ , 3 : gain relatif  $\delta\varepsilon_r^2$ .

Le gain relatif  $\delta\varepsilon_r^2$  est maximum pour  $a = 0$  et un calcul non présenté ici montre que pour cette valeur on a  $\delta\varepsilon^2/\sigma_y^2 = 0,480$ , ce que l'on retrouve bien sur la figure 1. Cette valeur tend d'ailleurs vers 0.5 quand  $N \rightarrow \infty$  et avec  $N = 16$  on n'est pas loin de la situation asymptotique dès que  $a > 1$ .



Dans le second exemple on cherche à estimer avec les mêmes signaux  $x_n(t)$  le signal  $y(t)$  valant  $a^{-1/2}\exp(2\pi jt)$  pour  $0 \leq t \leq a$  et 0 dans le cas contraire. Sa variance vaut  $1 - a \operatorname{sinc}^2(a)$  et les composantes  $s_n$  du vecteur  $\mathbf{s}$  sont données par

$$s_k = a^{1/2}\exp[\pi j(n + 1)a]\operatorname{sinc}[(n + 1)a]. \quad (23)$$

Les résultats apparaissent sur la figure 2. Le gain est évidemment nul pour  $a = 0$  et  $a = 1$  car les composantes  $s_k$  sont nulles. La variation de la variance étant assez faible, il n'y a pas de différence importante entre les gains absolu et relatif.

Ces deux exemples montrent l'intérêt des méthodes linéaires au sens large, en particulier quand  $a < 1/2$ .

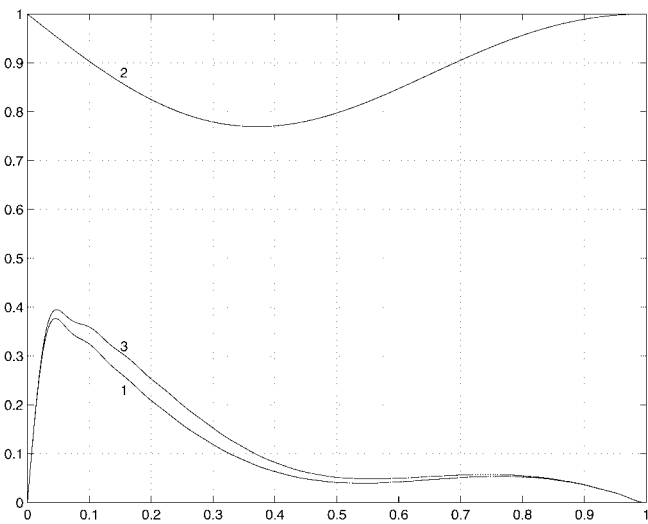


Figure 2. Approximation du signal  $a^{1/2}\exp(2\pi jt)$  limité à  $0 \leq t \leq a$ . 1 : gain absolu  $\delta\varepsilon^2$ , 2 : variance  $\sigma_y^2$ , 3 : gain relatif  $\delta\varepsilon_r^2$ .

### 3.3. Développements de Fourier

Examinons comment les développements de Fourier si importants en traitement du signal peuvent s'insérer dans le cadre de l'approximation linéaire au sens large. Nous avons vu que les signaux

$$x_m(t) = \exp(2\pi jmt) , 1 \leq m \leq N \quad (24)$$

sont orthonormés et circulaires, ce qui est caractérisé par  $\Gamma = \mathbf{I}$  et  $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ . Ceci donne  $\mathbf{u} = \mathbf{r}$  et  $\mathbf{v} = \mathbf{s}$ , qui sont les vecteurs des coefficients de Fourier. Si  $y(t)$  est réel (21) donne le développement classique en fonction des sinus et cosinus.

Il est clair qu'en raison de la structure exponentielle de  $x_m(t)$ , l'approximation linéaire au sens large est un développement qui fait intervenir les fréquences positives et négatives. Ceci signifie que le développement classique de Fourier qui utilise les valeurs de  $m$  satisfaisant  $-N \leq m \leq N$  est une approximation linéaire au sens large en fonction de (24). Le terme  $n = 0$  cor-

respond à  $w$  apparaissant dans (2) et il est relié à la valeur moyenne de  $y(t)$  parce que les signaux  $x_n(t)$  sont de moyenne nulle.

Comme on l'a déjà noté, si nous utilisons dès le début des fréquences négatives et positives, il n'y a pas d'intérêt à introduire l'approximation au sens large car le problème est dégénéré.

Cependant il y a des cas où l'approximation linéaire au sens large avec des signaux  $x_m(t)$  ne comprenant que des fréquences positives n'augmente pas les performances par rapport à celles obtenues par la méthode au sens strict. Ceci se produit quand  $x_m(t)$  et  $y(t)$  sont conjointement circulaires, ce qui est caractérisé par

$$\int_0^T x_m(t)y(t)dt = 0.$$

Ceci est un résultat évident parce que cette équation signifie que les coefficients de Fourier du développement de  $y(t)$  correspondant aux fréquences négatives sont nuls. Dans ce cas il est clair que la prise en compte des fréquences négatives, ce qui signifie l'approximation au sens large, n'introduit aucun avantage par rapport aux méthodes strictement linéaires.

### 3.4. Cas extrêmes

Ils correspondent aux cas où l'approximation au sens large est parfaite, ce qui signifie que l'erreur  $\varepsilon^2$  donnée par (17) est nulle, tandis que l'approximation linéaire au sens strict est nulle, ce qui signifie que  $\varepsilon_L^2$  donné par (18) vaut  $\sigma_y^2$ . Cette dernière situation est caractérisée par  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$  car  $\Gamma$  n'est pas singulière.

L'exemple le plus simple d'une telle situation est le suivant. Supposons que  $\mathbf{x}(t)$  soit circulaire, c'est-à-dire que  $\mathbf{C} = \mathbf{0}$  et que  $y(t) = \mathbf{a}^T \mathbf{x}^*(t)$ . L'approximation linéaire au sens large est caractérisée par  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  and  $\mathbf{v} = \mathbf{a}$ , et comme  $\hat{y}(t) = y(t)$ , l'erreur est nulle.

Par contre le vecteur  $\mathbf{r}$  défini par (8) est nul car  $\mathbf{x}(t)$  est circulaire et (18) donne  $\varepsilon_L^2 = \sigma_y^2$ , ce qui caractérise l'approximation linéaire au sens strict nulle. Il y a évidemment beaucoup d'exemples possibles d'une telle situation.

### 3.5. Cas scalaires

Supposons que l'intervalle de temps  $[0,1]$  soit divisé par une partition en  $N$  intervalles disjoints  $T_k$ , ( $T_k \cap T_l = \emptyset$ ). Soit aussi  $N$  signaux de moyenne nulle  $x_k(t)$ ,  $1 \leq k \leq N$  tels que  $x_k(t) = 0$  si  $t \notin T_k$ . Ceci introduit un ensemble de  $N$  signaux à support disjoints, situation courante dans les problèmes de communication tels que ceux utilisant la méthode de modulation TDMA (time division multiple access). En raison de leurs supports de tels signaux sont orthogonaux et la matrice  $\Gamma$  est diagonale. Mais il en est de même pour la matrice  $\mathbf{C}$ , ce qui simplifie considérablement le problème. Dans ce cas (9) et (10)

montrent que les composantes  $u_n$  et  $v_n$  de  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  ne dépendent que des composantes  $r_n$  et  $s_n$  de  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{s}$ . De plus les erreurs  $\varepsilon^2$  et  $\varepsilon_L^2$  sont des sommes de termes  $\varepsilon_n^2$  et  $\varepsilon_{Ln}^2$  provenant uniquement des composantes  $r_n$  et  $s_n$ . Ainsi le problème peut être résolu composante par composante, comme lorsque le vecteur  $\mathbf{x}$  est scalaire et on peut donc supprimer l'indice  $n$  dans toute la suite. Considérons en particulier la structure des erreurs. L'approximation au sens large est caractérisée par l'erreur donnée par (17), et dans le cas scalaire on peut l'écrire sous la forme

$$\varepsilon^2 = \sigma_y^2 - \frac{\gamma(|r|^2 + |s|^2) - 2\text{Re}(c^*rs)}{\gamma^2 - |c|^2} \quad (25)$$

où les quantités  $\gamma$ ,  $c$ ,  $r$  et  $s$  sont définies par les équations (7) et (8) appliquées quand  $\mathbf{x}$  est scalaire.

De même l'erreur dans l'approximation strictement linéaire est donnée par (18) qui prend la forme

$$\varepsilon_L^2 = \sigma_y^2 - \frac{|r|^2}{\gamma}. \quad (26)$$

À titre d'exemple considérons le signal particulier  $y_n(t) = t^n$  et son approximation à l'aide du signal  $x(t) = \exp(j2\pi t)$  pour  $0 \leq t \leq 1$  et 0 dans le cas contraire. Le choix de  $t^n$  est lié au fait que tout signal peut être approximé localement par un signal polynomial et celui considéré ici est le plus simple possible. Le signal  $x(t) = \exp(j2\pi t)$  est complexe, sa valeur moyenne est nulle et sa variance  $\gamma$  apparaissant dans (25) ou (26) vaut 1. De plus il est circulaire, ce qui implique que  $c = 0$ , et comme  $y(t)$  est réel, nous avons aussi  $r = s$ . Ceci simplifie beaucoup l'expression des erreurs (25) and (26). Le seul calcul qui reste est celui de  $r_n$  défini par

$$r_n = \int_0^1 \exp(j2\pi t) t^n dt.$$

Les valeurs de  $r_n$  satisfont la récurrence  $r_n = (2\pi j)^{-1} - n(2\pi j)^{-1}r_{n-1}$ . Pour  $n = 0$  on a  $r_0 = 0$ , et ceci entraîne que l'erreur correspondante vaut  $\sigma_y^2$ , ce qui caractérise l'approximation nulle. Ceci est évident car un signal constant ne peut être approximé avec une méthode linéaire ni au sens strict ni au sens large.

En utilisant la récurrence sur  $r_n$  et la valeur initiale  $r_0 = 0$  on peut calculer les valeurs de  $r_n$  qui suivent et ceci donne l'erreur  $\varepsilon^2$ . Comme la variance de  $y_n(t)$  vaut  $1/(2n+1)$  il faut aussi considérer le gain relatif  $\delta\varepsilon_r^2 = \varepsilon^2/\sigma_y^2$ . Les résultats apparaissent sur la figure 3 pour  $1 \leq n \leq 30$ .

Il convient de noter que le gain absolu est maximum pour  $n = 4$  où il prend la valeur 0,1769. Notons également que pour  $n = 1$  la variance vaut 1/3, ce qui sort des limites choisies pour la figure. Le fait marquant qu'elle montre est qu'après  $n = 4$  les gains décroissent régulièrement, mais le gain relatif est toujours nettement supérieur au gain absolu.

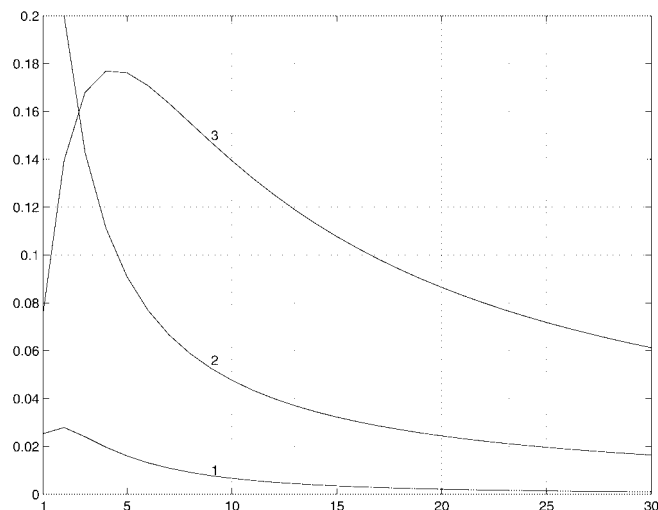


Figure 3. Approximation du signal  $t^n$ .  
1 : gain absolu  $\delta\varepsilon^2$ , 2 : variance  $\sigma_y^2$ , 3 : gain relatif  $\delta\varepsilon_r^2$ .

## 4. Conclusion

L'approximation linéaire des signaux complexes est une procédure bien connue dont l'exemple le plus courant est celui des séries de Fourier. Dans cet article on a introduit le principe de l'approximation au sens large qui consiste à tenir compte du complexe conjugué des signaux. Le calcul du système linéaire au sens large permettant l'approximation la meilleure a été réalisé et l'on a donné l'expression du gain réalisé par cette méthode par rapport aux résultats obtenus par une méthode strictement linéaire. Il existe pourtant des cas où les deux méthodes sont équivalentes et c'est en particulier ce qui arrive quand tous les signaux sont circulaires. Ce concept, bien connu dans le cas des signaux aléatoires a donc été étendu de manière naturelle à celui des signaux déterministes. Pour illustrer la méthode divers cas particuliers ont été examinés. Certains découlent de considérations purement théoriques, d'autres proviennent de calculs numériques. Dans de nombreux cas l'avantage de l'approximation linéaire au sens large est nettement mis en évidence.

## Appendice

Le gain absolu se déduit de (17) et (18) et s'écrit

$$\delta\varepsilon^2 = \mathbf{u}^H \mathbf{r} + \mathbf{v}^T \mathbf{s}^* - \mathbf{r}^H \Gamma^{-1} \mathbf{r}.$$

Il résulte de (6) que  $\mathbf{u} = \Gamma^{-1} \mathbf{r} - \Gamma^{-1} \mathbf{C} \mathbf{v}^*$ , ce qui donne

$$\mathbf{u}^H \mathbf{r} = \mathbf{r}^H \Gamma^{-1} \mathbf{r} - \mathbf{v}^T \mathbf{C}^H \Gamma^{-1} \mathbf{r},$$

de sorte que

$$\delta\varepsilon^2 = \mathbf{v}^T (\mathbf{s}^* - \mathbf{C}^H \Gamma^{-1} \mathbf{r}).$$

Mais on a vu que  $\mathbf{C}$  est une matrice symétrique de sorte que  $\mathbf{C}^* = (\mathbf{C}^T)^* = \mathbf{C}^H$ . On en déduit que

$$\delta\varepsilon^2 = \mathbf{v}^T (\mathbf{s}^* - \mathbf{C}^* \Gamma^{-1} \mathbf{r}).$$

Cette quantité étant réelle elle est égale à son complexe conjugué, de sorte que

$$\delta\varepsilon^2 = \mathbf{v}^H (\mathbf{s} - \mathbf{C} \Gamma^{-1} \mathbf{r}^*).$$

Il suffit alors de prendre la valeur de  $\mathbf{v}$  donnée par (10) pour obtenir (19).



Bernard Picinbono

Bernard Picinbono est né à Alger le 21 mars 1933. Il est professeur émérite à l'Université de Paris-sud et à l'École Supérieure d'Électricité. Il a été Président de l'Université de Paris-sud (1971-1975), Directeur de Laboratoire des Signaux et Systèmes (1975-1987), Directeur général de l'École Supérieure d'Électricité (1990-1995), Professeur invité aux Universités de Berkeley et San Diego.

Il est membre correspondant de l'Académie des Sciences, membre de l'Académie des Technologies, Fellow de l'I.E.E.E. (Institute of Electrical and Electronics Engineers) et a été président de la commission Signaux et Systèmes de l'Union Radioscientifique Internationale.

Ses travaux portent essentiellement sur le traitement du signal et plus spécifiquement sur ses aspects statistiques. Il a publié sur ce sujet plusieurs livres et un grand nombre d'articles dans des revues spécialisées.

## Références

- [1] B. PICINBONO and P. CHEVALIER, « Widely linear estimation with complex data », *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 43, pp. 2030-2033, 1995.
- [2] B. PICINBONO, « On circularity », *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 42, pp. 3473-3482, 1994.
- [3] J.-L. LACOUME, « Variables et signaux aléatoires complexes », *Traitement du Signal*, vol. 15, pp. 535-544, 1999.
- [4] B. PICINBONO, *Signaux aléatoires*. Paris : Dunod, 1994.
- [5] J. MASSEY, « Proper complex random processes with applications to information theory », *IEEE Trans. Information Theory*, vol. 39, pp.1293-1302, 1993.
- [6] P. SCHREIER and L. SCHARF, « Second-order analysis of improper complex random vectors and signals », *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 51, pp. 714-725, 2003.
- [7] L. SCHARF, *Statistical Signal Processing*. Reading, Addison-Wesley, 1991.
- [8] B. PICINBONO, « On instantaneous amplitude and phase of signals », *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 45, pp. 552-560, 1997.