

Sur un test temps-fréquence de stationnarité

On a time-frequency test of stationarity

Jun Xiao^{1,2}, Pierre Borgnat¹ et Patrick Flandrin^{1,*}

¹Université de Lyon, École Normale Supérieure de Lyon,
Laboratoire de Physique, UMR 5672 CNRS, 46 allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07 France.

²College of Information, Science and Technology, East China Normal University,
N°500, Rd. Dongchuan, 200433, Shanghai, Chine
E-mail : jun.xiao,pborgnat,flandrin@ens-lyon.fr

Manuscrit reçu le 5 mars 2008

Résumé et mots clés

On propose un nouveau test de stationnarité auquel l'utilisation de substituts temps-fréquence permet de donner un sens statistique précis. Le test est relatif à une durée d'observation et peut s'appliquer à des bandes de fréquence, donnant un cadre à ce qui est souvent fait en pratique. Un degré de non-stationnarité peut être attaché au test, ainsi que, le cas échéant, une échelle caractéristique de la non-stationnarité détectée.

Temps-fréquence, stationnarité, test, substituts.

Abstract and key words

Introduction

Whereas the usual concept of stationarity is a stochastic one that is well-defined (as the strict invariance of statistical properties with respect to some absolute time), its practical use is somewhat different, taking often into account – though implicitly – observation scales or frequency bands, as well as accommodating for periodicities in deterministic signals. As for the notion of dimension that may vary depending on the observation scale [3], it thus turns out that the very same signal can be considered as stationary or not, depending on the way we look at it. A typical example is given by speech that is usually considered as nonstationary (resp. stationary) at the scale of some seconds (resp. tens of milliseconds), while turning again to nonstationary at the scale of a few milliseconds within voiced segments. Recognizing this situation calls therefore for an operational framework aimed at making of stationarity a *relative* concept by incorporating the observation scale in its definition, while encompassing in a common perspective stochastic and deterministic descriptions. Revisiting this way the concept of stationarity, the purpose of this paper is to go further by designing a meaningful test for its assessment.

General framework

The rationale of the proposed approach is based on the fact that, in both stochastic and deterministic contexts, a signature of "stationarity" is that a well-defined time-varying spectrum just reduces to the the ordinary spectrum at all time instants [1].

Time-frequency

The first ingredient is therefore a suitable time-varying spectrum, here chosen as the Wigner-Ville spectrum estimated by means of multitaper spectrograms, see eq.(1), for a sake of variance reduction without some extra time averaging that would possibly smooth out nonstationarities [6,7].



Surrogates

Given an observation scale, the basic idea is to characterize stationarity as the identity between *local* features (frequency slices) of the time-varying spectrum and *global* ones obtained by marginalization [2,4,5]. In practice, the difference will never be zero and, to give it a statistical significance, it is proposed to create *from the data itself* a stationarized reference. This is achieved by the technique of surrogate data [8,9,10] that essentially amounts to scramble the spectrum phase (in which possible nonstationarities are coded) of the signal under test while keeping its magnitude unchanged, see Figure 1.

Distances

Differences between local and global spectral properties are quantified by means of a dissimilarity measure [11], see eq.(2). A companion study has evidenced that a good choice is to mix a Kullback-Leibler divergence with a log-spectral deviation [12].

Stationarity test

Principle

The stationarity test itself is described in eqs.(3)-(6), with the threshold γ derived from the empirical distribution attached to the surrogates features.

Null hypothesis of stationarity

An experimental study shows that the above mentioned distribution can be fairly well approximated by a Gamma distribution (see Figure 2), allowing for a parametric approach. As evidenced in Figures 3 and 4 for various window lengths, the maximum likelihood estimation of the two Gamma parameters converge quickly to an asymptotic value when the number of surrogates J is increased. As a rule-of-thumb, the value $J \sim 50$ can be retained for a good trade-off between complexity and accuracy. Recalling that surrogates are supposed to define the null hypothesis of stationarity, it is worth checking that, in a stationary situation, the test behaves as expected from the viewpoint of the imposed false alarm rate fixed by the threshold. This is illustrated in Figure 5 (Monte-Carlo simulation with an AR(2) model), with a result that is slightly pessimistic, the observed false alarm being of about 6.5% for a confidence level fixed to 5%.

Index and scale of nonstationarity

Beyond its binary nature, the test defined in eq.(6) also allows for a quantified measure of a *degree of nonstationarity* according to eq.(7). Moreover, since the overall procedure is dependent on the spectrogram window length, it is also possible to conduct the test for a family of such window lengths, ending up with a typical *scale of nonstationarity* as in eq.(8).

Example

Figure 6 provides an example aimed at supporting the effectiveness of the proposed approach. The analyzed signal consists in the superimposition of two components, one of which being a tone that can be considered as stationary whatever the observation scale is whereas the second one is a sinus FM whose (non) stationary character depends on the observation scale. Running the test in the two corresponding subbands as a function of both the observation length N_x and the relative analysis scale N_h/N_x ends up with results in clear agreement with physical interpretation.

Conclusion

A new approach has been proposed for testing stationarity relatively to an observation scale. The approach operates in the time-frequency plane by comparing local and global features, the null hypothesis of stationarity being characterized by surrogate data directly derived from the data under test. The method reported here is basically based on distances but it allows for a number of variations, such as the recourse to machine learning methods (one-class SVM [13]) by considering the family of surrogates as a learning set.

Time-frequency, stationarity, test, surrogates.

Remerciements

Cette étude entre dans le cadre du Projet ANR-07-BLAN-0191-01 « StaRAC ». Le travail de Jun Xiao a été réalisé dans le cadre d'un Programme Doctoral de collaboration entre les ENS (France) et l'ECNU (Shanghai, Chine).

1. Introduction

Dans l'introduction à sa première monographie sur les « fractales » [3], B. Mandelbrot reconsidère la notion de dimension en lui donnant un caractère explicitement *relatif* :

«[...] la dimension physique a inévitablement une base pragmatique, donc subjective, elle est affaire de degré de résolution. Comme confirmation, montrons qu'[...] une pelote de 10 cm de diamètre, faite de fil de 1 mm de diamètre, possède, de façon en quelque sorte latente, plusieurs dimensions physiques distinctes. Au degré de résolution de 10 mètres, elle apparaît comme un point, donc comme une figure zéro-dimensionnelle ; au degré de résolution de 10 cm, c'est une boule, donc une figure tridimensionnelle ; au degré de résolution de 10 mm, c'est un ensemble de fils, donc une figure unidimensionnelle ; au degré de résolution de 0,1 mm, chaque fil devient une sorte de colonne, et le tout redevient une figure tridimensionnelle ; au degré de résolution de 0,01 mm, chaque colonne se résout en fibres filiformes, et le tout redevient une figure unidimensionnelle, et ainsi de suite, la valeur de la dimension ne cessant de sautiller.»

Ce qui est dit ici de la dimension a en fait une portée plus générale, et c'est en particulier le cas pour le concept de *stationnarité*. En effet, alors que la stationnarité usuelle est classiquement bien définie comme une invariance de propriétés statistiques par rapport à un temps absolu, dire d'un signal qu'il est stationnaire ou non n'a en pratique de sens que relativement à un horizon d'observation et/ou un domaine de fréquences d'intérêt. Par analogie avec l'exemple cité précédemment, il n'est que de considérer un signal de parole qui, vu à long terme à l'échelle de quelques secondes, est souvent cité comme un prototype de signal non stationnaire, avec une succession de segments (voisés, non-voisés, silences, etc.) aux caractéristiques différentes. Le même signal cependant, si on le regarde à plus court terme à l'échelle de quelques dizaines de millisecondes sera volontiers considéré comme stationnaire (en particulier dans ses parties voisées) et justiciable de méthodes d'analyse et de codage (analyse spectrale, prédiction linéaire, etc.) reposant sur une telle hypothèse. Mais que l'on « zoome » encore sur ce même signal et qu'on l'observe à l'échelle de la milliseconde, et c'est de nouveau une interprétation non stationnaire qui l'emporte en mettant l'accent sur le caractère transitoire des oscillations dont la périodicité assurait à plus grande échelle une forme de permanence temporelle. Tout comme pour la dimension dont la valeur n'avait de sens que relativement à une échelle d'observation, on voit sur cet exemple que l'idée de stationnarité est elle aussi

assujettie à des considérations relatives, un même signal étant décrit comme stationnaire à une échelle mésoscopique et non stationnaire à des échelles macroscopique ou microscopique.

Il apparaît ainsi que le concept standard de stationnarité n'est pas *opérationnel* au sens où sa considération pratique doit s'assortir d'aménagements heuristiques s'appuyant sur une notion de localité qui, dans le principe, s'oppose à la notion de permanence associée à l'idée de stationnarité.

De plus, l'interprétation empirique de la stationnarité s'affranchit alors du cadre théorique des signaux stochastiques en mettant dans un même ensemble les signaux aléatoires et déterministes stationnaires. Dès lors qu'il se révèle être la répétition d'un certain motif — qu'il soit aléatoire ou non — ne présentant pas trop de variabilité tout au long de l'observation, un signal sera probablement dit stationnaire. Enfin, qu'un signal soit stationnaire ou non, une certaine variabilité locale est attendue ; déduire d'une telle variabilité temporelle l'indice d'une non-stationnarité nécessite de pouvoir justifier que celle-ci est statistiquement significative. Tester la stationnarité d'un signal observé est ainsi une question qui mérite d'être précisée en lui donnant à la fois un sens relatif et un sens statistique.

C'est cette double question de re-considérer qualitativement l'idée de stationnarité dans une perspective relative et de la tester quantitativement qui fait l'objet de cet article. À cette fin, celui-ci s'attache à fixer le cadre général d'une méthode opérant dans le plan temps-fréquence par comparaison de spectres locaux et globaux, l'originalité étant de construire une référence « stationnarisée » permettant, le cas échéant, de rejeter l'hypothèse nulle de stationnarité. Cette référence est obtenue à partir des données elles-mêmes sous la forme d'un ensemble de *substituts* préservant le spectre global tout en supprimant la structuration temporelle représentative de la non-stationnarité. On discutera plus particulièrement de la façon d'obtenir un ensemble convenable de tels substituts et d'en déduire une statistique de décision à base de « distances » temps-fréquence. Sur la base d'un exemple simple mettant en jeu une (ou des) échelle(s) connue(s) de non-stationnarité, on montrera enfin que, dans le cas où l'hypothèse de stationnarité est rejetée, il est possible de définir un *indice de non-stationnarité* et d'estimer la (ou les) échelle(s) caractéristique(s) de cette dernière.

2. Cadre général

La voie que l'on se propose de suivre pour tester la stationnarité d'un signal observé est de type temps-fréquence. Elle est basée

sur le fait que, dans le cas stationnaire, un « bon » spectre non stationnaire [1] est identique à tout instant au spectre moyen, et donc que la marginalisation de celui-là se réduit à celui-ci. Il est alors naturel, même si l'idée n'est pas neuve [2,4,5], d'imaginer un test de stationnarité basé sur une comparaison de statistiques locales et globales dans le plan temps-fréquence, relativement à un domaine temps-fréquence choisi.

Définir la stationnarité par la comparaison de statistiques dans le plan temps-fréquence a de plus l'intérêt de pouvoir proposer une cadre unifié de la stationnarité, que celle-ci soit comprise dans un sens stochastique ou déterministe. Cette dernière est en effet liée à la répétition d'un motif déterministe au cours du temps, c'est-à-dire à une périodicité. Les propriétés des représentations temps-fréquence vont alors, du moment que la fenêtre d'analyse choisie ne sera pas de longueur trop petite par rapport à ce motif, représenter cette périodicité comme une constance de la distribution temps-fréquence du signal déterministe. Les signatures temps-fréquence de la périodicité et de la stationnarité de signaux aléatoires se révèlent alors identiques en se traduisant par la constance du spectre local au cours du temps.

2.1 Temps-fréquence



Le premier ingrédient nécessaire au test est une représentation temps-fréquence susceptible de se prêter de façon robuste aux traitements ultérieurs. Par souci de simplicité, le choix se portera ici sur un *spectrogramme multi-fenêtres*, celui-ci présentant l'avantage d'être un bon estimateur (au sens d'une variance réduite sans lissage temporel additionnel tendant à gommer les non-stationnarités) du spectre théorique de Wigner-Ville [6, 7]. D'une façon plus précise, on calcule la quantité :

$$S_{x,K}(t, f) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K S_x^{(h_k)}(t, f), \tag{1}$$

celle-ci s'interprétant comme une moyenne des K spectrogrammes

$$S_x^{(h_k)}(t, f) = \left| \int x(s) h_k(s - t) e^{-i2\pi fs} ds \right|^2$$

calculés chacun sur le signal $x(t)$ en prenant pour fenêtres à court-terme les termes successifs $h_k(t)$ d'une base (orthonormée) de fonctions d'Hermite. En pratique, la moyenne (1) porte sur un nombre réduit de fenêtres, typiquement entre 5 et 10 (on pourra se reporter à [6, 7] pour plus de détails).

Le choix de la représentation temps-fréquence basée sur la technique multi-fenêtres est guidé par le besoin de réduire au mieux les fluctuations locales du spectre non stationnaire dues à la variabilité stochastique. Dans notre contexte d'estimation non stationnaire, les méthodes alternatives telles que celles basées sur des moyennes dans le temps seraient moins satisfaisantes dans la mesure où le lissage temporel sur lequel elles sont construites tend à lisser aussi les non-stationnarités éventuelles.

Un autre élément essentiel de toute analyse à fenêtres est bien sûr la taille de ces dernières, indépendamment de leur forme. Dans le contexte présent, la possibilité de varier cette taille offre un degré de liberté intrinsèque à la méthode en ce qu'elle permet de régler l'horizon de l'analyse locale relativement à l'échelle de temps globale fixée par la durée totale d'observation. L'exploitation de ce degré de liberté sera détaillée plus avant en Section 3.3.

2.2 Substituts

L'idée du test est d'identifier la notion de stationnarité avec l'équivalence de propriétés spectrales globales et locales. En pratique, même si le signal étudié est stationnaire, les caractéristiques globales et locales ne seront jamais identiques et la question est de savoir si les différences observées sont significatives. Afin de disposer d'une base de comparaison quantifiable, l'approche proposée est d'associer au signal observé une référence « stationnarisée » de façon à pouvoir rejeter le cas échéant l'hypothèse de stationnarité. Pour ce faire, on utilise l'interprétation selon laquelle, pour un même spectre moyen, un signal non stationnaire se distingue d'un homologue stationnaire par une *structuration* temporelle dont la signature se retrouve dans la phase spectrale. Ainsi, étant donné un seul signal observé $x(t)$, il est possible de lui associer une batterie de *substituts* (*surrogates* en anglais [8, 9]) $\{s_j(t); j = 1, \dots, J\}$ ayant chacun même spectre de puissance que le signal original mais un contenu temporel stationnarisé: il suffit pour cela de remplacer la phase originale du spectre par une phase aléatoire. Notons que pour garder la génération des substituts aussi simple que possible, c'est ici directement la phase de la transformée de Fourier du signal (une estimation du spectre, quoique pauvre) qui est remplacée par une phase i.i.d. uniforme dans $[0, 2\pi[$. Une illustration du principe de stationnarisation par substituts est donnée en Figure 1.

De par leur structure, les substituts obtenus sont stationnaires et sont donc des candidats naturels pour quantifier statistiquement ce que doit être le comportement d'un signal stationnaire. Notons que la méthode admet plusieurs variations. En particulier des procédures itératives permettent de ne pas seulement attribuer le même spectre global du processus aux différents substituts, mais aussi de conserver sa loi de distribution empirique [9]. Une telle amélioration n'est pas nécessaire ici car les statistiques finales étant construites sur des attributs issus de transformations temps-fréquence non linéaires et mélangeantes, elles ne sont que peu sensibles à cette distribution.

La technique des substituts a été originellement proposée comme une manière de tester expérimentalement des propriétés de non-linéarité de systèmes (*via* les signaux qui en sont issus) dans le domaine de la physique non linéaire [8]. De tels substituts ne semblent pas avoir été utilisés jusqu'ici dans un objectif d'estimation de la stationnarité de signaux. Seule une approche récente [10] s'est intéressée aux substituts en lien avec des propriétés de

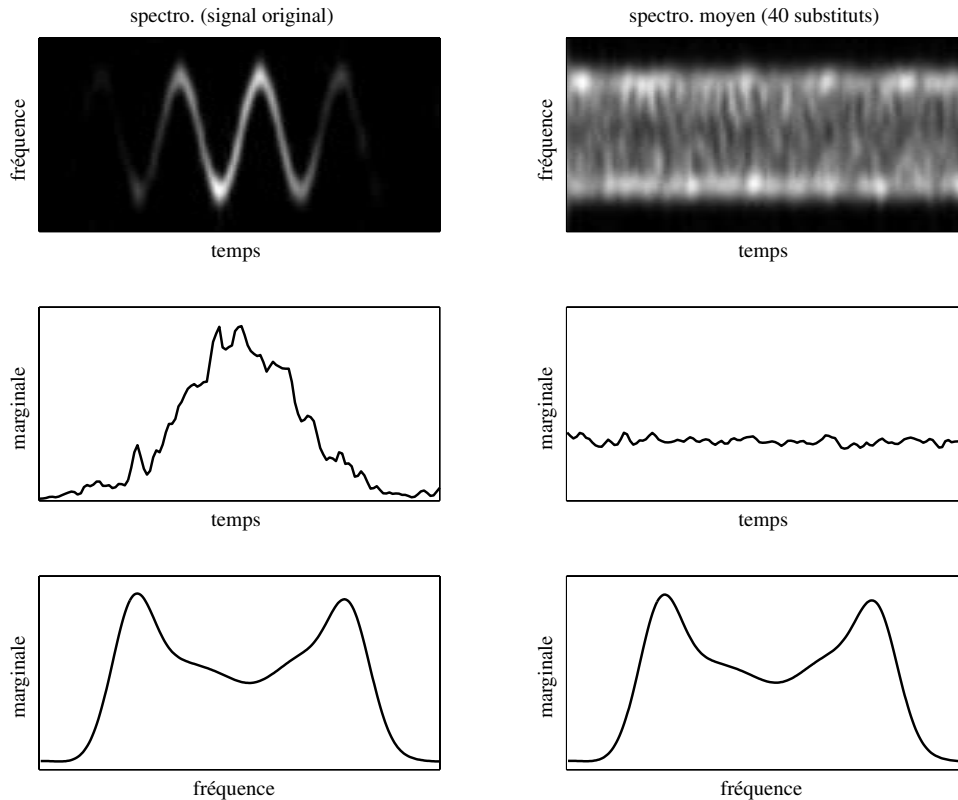


Figure 1. Stationnarisation par substitués — La colonne de gauche présente un spectrogramme (en haut) et ses distributions marginales en temps (au milieu) et en fréquence (en bas), dans le cas d'un signal « non stationnaire » (AM-FM + bruit). La colonne de droite présente de la même façon le spectrogramme moyen calculé sur 40 substitués du même signal et les distributions marginales associées. Ces différentes distributions mettent en évidence une « stationnarisation » au sens où, pour un même spectre marginal, le comportement temporel local a perdu la forte structuration (AM-FM) du signal original.



non-stationnarité, s'attachant à conserver l'évolution temporelle de la moyenne et de la variance dans la construction des substitués. Cette technique est cependant orthogonale à ce que nous proposons ici puisque notre objectif est, à l'aide des substitués, de faire justement disparaître cette évolution temporelle.

2.3 Distances

En se plaçant comme choisi dans une perspective temps-fréquence, l'idée est de comparer les spectres locaux au spectre global. On définit pour cela les quantités marginalisées en temps

$$\langle S_{y,K}(t_n, f) \rangle_n = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N S_{y,K}(t_n, f),$$

tant pour le signal ($y(t) = x(t)$) que pour les J substitués ($y(t) = s_j(t); j = 1, \dots, J$), les différents spectres temps-fréquence n'étant évalués qu'en N instants t_n distants d'une fraction (typiquement la moitié) de la largeur équivalente des fenêtres à court-terme. On en déduit les $J + 1$ « distances » entre spectres locaux et celui global

$$\{c_n^{(y)} := \kappa(S_{y,K}(t_n, \cdot), \langle S_{y,K}(t_n, \cdot) \rangle_n), n = 1, \dots, N\} \quad (2)$$

au moyen d'une mesure de dissimilarité $\kappa(\dots)$ qu'il convient de choisir.

La question du choix d'une mesure de dissimilarité entre spectres a fait l'objet de nombreuses études [11]. Dans un premier temps, et sans prétendre à l'optimalité, il est possible d'adopter une attitude pragmatique consistant à envisager les « distances » les plus simples ayant déjà fait leurs preuves dans des contextes similaires. Ce faisant, une étude complémentaire à ce travail a montré [12] qu'un bon choix de mesure, relatif à deux spectres $G(f)$ et $H(f)$, était de la forme

$$\kappa(G, H) := \kappa_{KL}(\tilde{G}, \tilde{H}) \cdot (1 + \kappa_{LSD}(G, H)),$$

combinant la divergence de Kullback-Leibler

$$\kappa_{KL}(\tilde{G}, \tilde{H}) := \int_{\Omega} (\tilde{G}(f) - \tilde{H}(f)) \log \frac{\tilde{G}(f)}{\tilde{H}(f)} df$$

(appliquée aux spectres normalisés $\tilde{G}(f)$ et $\tilde{H}(f)$ issus de $G(f)$ et $H(f)$) et la déviation log-spectrale

$$\kappa_{LSD}(G, H) := \int_{\Omega} \left| \log \frac{G(f)}{H(f)} \right| df.$$

C'est dans ce cadre que l'on se placera ici.

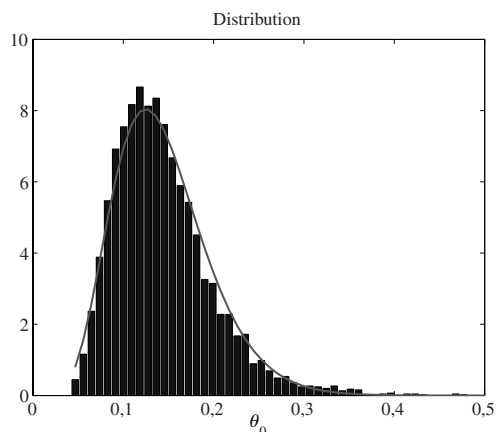


Figure 2. Caractérisation statistique de l'hypothèse nulle de stationnarité 1. — Le diagramme présente un histogramme asymptotique ($J = 5000$) typique des Θ_0 relatifs aux substituts stationnarisés (cf. eq. (5)) et son ajustement par une loi Gamma (courbe superposée). Conditions expérimentales : $x(t) =$ bruit blanc de $N_x = 2048$ points modulé en amplitude avec une période de $T = 256$ points, $K = 5$ fenêtres et 5000 réalisations.

$$L(g, h) := \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (g_n - h_n)^2, \tag{3}$$

on calcule ainsi les quantités

$$\Theta_1 = L(c^{(x)}, \langle c^{(x)} \rangle_n) \tag{4}$$

pour le signal testé $x(t)$ et

$$\Theta_0(j) = L(c^{(s_j)}, \langle c^{(s_j)} \rangle_n), \quad j = 1, \dots, J, \tag{5}$$

pour les J substituts $s_j(t)$; $j = 1, \dots, J$.

Si l'on suppose connue la loi de la distribution basée sur les substituts, il est facile d'en déduire un seuil γ permettant de rejeter l'hypothèse nulle de stationnarité avec une confiance spécifiée, le test se réduisant alors à une comparaison de Θ_1 à ce seuil.

$$\begin{cases} \Theta_1 > \gamma & : \text{« non-stationnarité »;} \\ \Theta_1 \leq \gamma & : \text{« stationnarité ».} \end{cases} \tag{6}$$

Pour mettre en œuvre de façon effective un tel test, il est donc nécessaire de caractériser l'hypothèse nulle de stationnarité.

3. Test de stationnarité



3.1 Principe

La stationnarité étant supposée correspondre à une égalité entre les spectres locaux et le spectre global, on peut mesurer un écart éventuel à celle-ci *via* les fluctuations en temps des distances $c_n^{(-)}$ évaluées précédemment selon (2). Choissant de faire usage de la distance quadratique

3.2 Hypothèse nulle de stationnarité

Faute de disposer d'une analyse théorique explicite, la distribution empirique basée sur les substituts (histogramme des $\Theta_0(j)$) permet de caractériser l'hypothèse nulle de stationnarité et d'en déduire de façon contrôlée un seuil auquel comparer la statistique de test Θ_1 pour une confiance donnée. Une étude expérimentale montre que cette distribution est bien décrite par une loi Gamma, ce qui peut se justifier par la nature quadratique de la mesure (3) des fluctuations (cf. Figure 2, montrant le bon accord

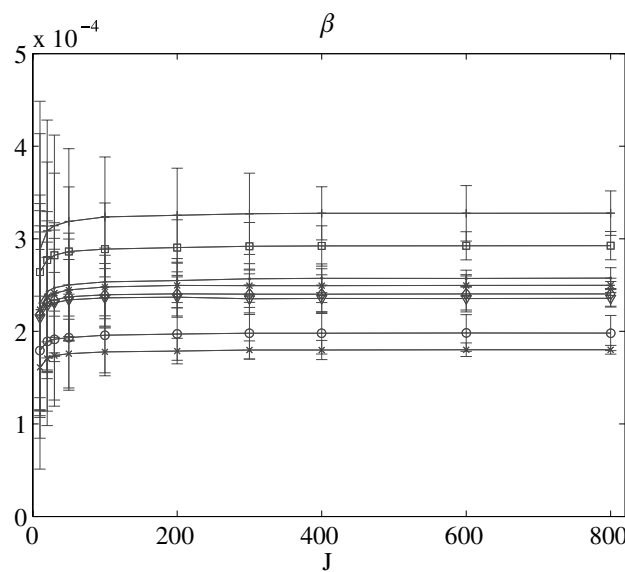
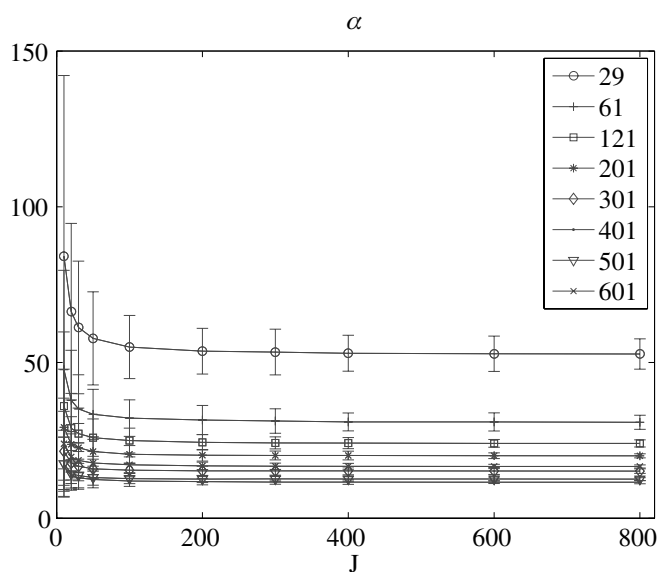


Figure 3. Caractérisation statistique de l'hypothèse nulle de stationnarité 2. — Les diagrammes de gauche et de droite présentent respectivement les résultats d'estimation des paramètres $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ relatifs à la loi Gamma de la Figure 2 en fonction du nombre J de substituts et de la taille des fenêtres N_h (indiquée dans le cadre).

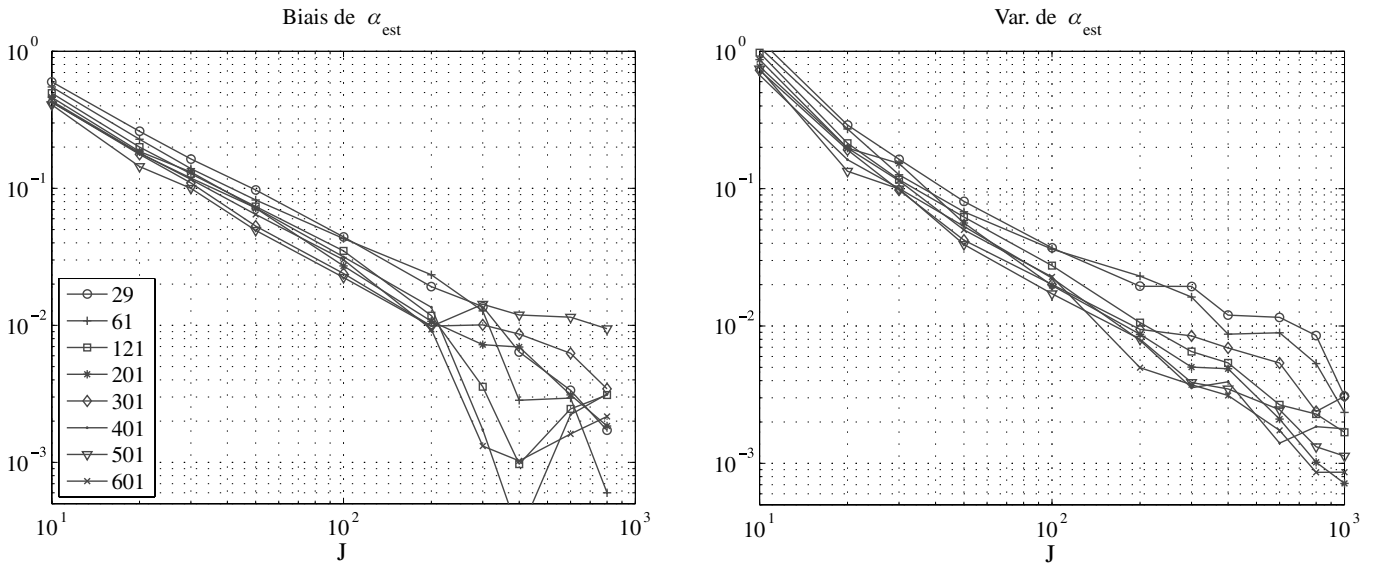


Figure 4. Caractérisation statistique de l'hypothèse nulle de stationnarité 3. — Le biais normalisé (à gauche) et la variance normalisée (à droite) relatifs aux estimateurs des paramètres $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ de la loi supposée Gamma des Θ_0 sont tracés en fonction du nombre J de substitués et de la taille des fenêtres N_h (mêmes conditions expérimentales qu'en Figures 2 et 3).

entre l'histogramme effectif dans le régime asymptotique ($J = 5000$ substitués) et l'ajustement Gamma correspondant). L'intérêt de cette modélisation est de ne nécessiter que l'estimation de 2 paramètres (α pour la forme et β pour l'échelle), ce qui peut être fait de façon directe par maximum de vraisemblance sur les données stationnarisées.

Comme illustré en Figure 3, l'étude du comportement des estimateurs $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ de ces paramètres en fonction du nombre de substitués J pour différentes largeurs de fenêtres N_h montre une convergence rapide vers le régime asymptotique (celle-ci étant cependant moins effective pour de faibles valeurs de N_h). Plus précisément, il apparaît (cf. Figure 4) que le biais et la variance (normalisés) sont très peu dépendants de N_h et décroissent, en fonction de J , avec une pente proche de -1 en unités logarithmiques de base 10. L'erreur devient ainsi inférieure à 5% pour J plus grand que 50: on pourra retenir ce nombre comme un bon compromis entre complexité et précision.

Il convient de plus de vérifier que le test reproduit bien l'hypothèse nulle de stationnarité. Deux éléments méritent attention à cet égard: le fait qu'un signal stationnaire quelconque sera vu comme non stationnaire avec une fréquence qui est directement imposée par le seuil de confiance — ce sera vérifié ci-dessous —, et le fait que les substitués suivent bien eux-aussi l'hypothèse nulle. Ce deuxième point n'est pas difficile car, nous venons d'étudier en quels sens leur distribution est justement décrite par ce modèle paramétrique en loi Gamma.

Partant d'un signal stationnaire, il est attendu que la décision prise grâce au test sera qu'il n'est pas stationnaire pour une proportion des cas étudiés qui devrait être la fréquence imposée par le seuil de confiance que l'on se fixe. Pour cela, se donnant un processus aléatoire stationnaire (ici de type AR), il est possible d'en prendre un ensemble de réalisations différentes et de mettre en action le test en construisant autant de collections de

substitués. Nous vérifions alors à l'aide de ces simulations Monte-Carlo (dont le résultat est illustré en Figure 5), que le résultat du test conduit à une fausse détection de non-stationnarité dans environ 6,5% des cas pour un niveau de confiance fixé a priori de 5%, dès lors qu'on emploie au moins 75 substitués. On retrouve un niveau acceptable de fausse détection, la diffé-

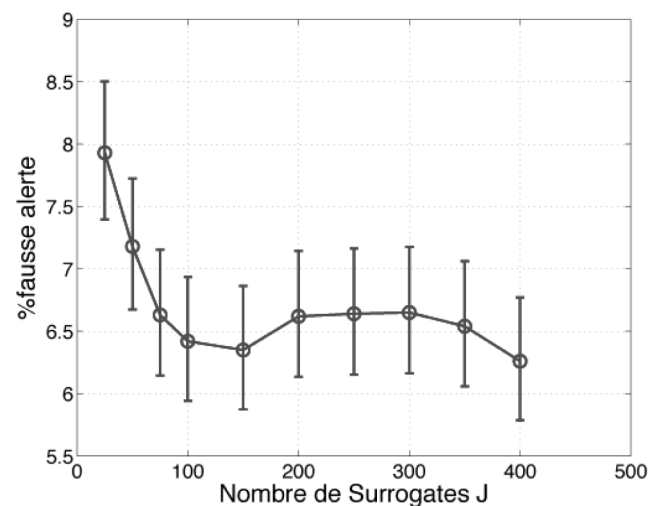


Figure 5. Vérification de l'hypothèse nulle de stationnarité — Un signal stationnaire de type AR(2) (pôle à la fréquence réduite 0,3 et à distance 0,8 de l'origine), avec 1024 points, est soumis au test décrit avec $K = 5$ fenêtres. On trace l'estimée Monte-Carlo (et l'intervalle de confiance à 95%, obtenu avec 10^4 réalisations indépendantes) du nombre de fois où est prise la mauvaise décision (« non stationnaire ») en fonction du nombre J de substitués utilisés; le niveau de confiance réel reste autour de 6,5% dès que $J \geq 75$, pour un niveau de confiance du test fixé a priori à 5%.

rence avec le niveau prescrit venant de ce que la modélisation en loi Gamma pour la distribution des substitués est une approximation commode — mais non pas un résultat justifié théoriquement. Les cas où cette loi échoue à parfaitement représenter la statistique des substitués vont donc augmenter les fausses détections de non-stationnarité par le test. En quelque sorte, on peut dire que le test est pessimiste quant à l’attribution de la stationnarité, puisqu’il rejette cette hypothèse un peu plus souvent que nécessaire.

3.3 Indice et échelle de non-stationnarité

Le test (6) permet de décider de la non-stationnarité éventuelle d’un signal au vu d’une réalisation. Dans le cas non stationnaire (celui où l’hypothèse nulle est rejetée), il est alors possible de définir un *indice* de non-stationnarité (INS) selon :

$$INS := \sqrt{\frac{\Theta_1}{\frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \Theta_0(j)}} \tag{7}$$

Par construction, le test est relatif à une échelle d’observation définie comme la durée N_x du signal analysé, mais il est aussi

fonctionnellement dépendant de la taille N_h des fenêtres à court-terme permettant de contraster les spectres locaux et le spectre global. Conduisant le test pour plusieurs tailles de fenêtres, il est alors possible de définir une *échelle* typique de non-stationnarité (ENS) selon :

$$ENS := \frac{1}{N_x} \arg \max_{N_h} \{INS(N_h)\} \tag{8}$$

4. Exemple

Afin d’illustrer le principe et la potentialité de la méthode proposée, la Figure 6 s’intéresse au cas particulier d’un signal à deux composantes, dont l’une (fréquence pure) peut être considérée comme stationnaire, la stationnarité de l’autre (FM sinusoïdale) dépendant de l’échelle d’observation, pour une période de modulation donnée. L’application du test et l’évaluation des indices (7)-(8) correspondants montre un bon accord avec ce que l’intuition attend d’une telle situation, la composante à hautes fréquences étant toujours détectée comme stationnaire, alors que l’hypothèse de stationnarité est rejetée pour la com-

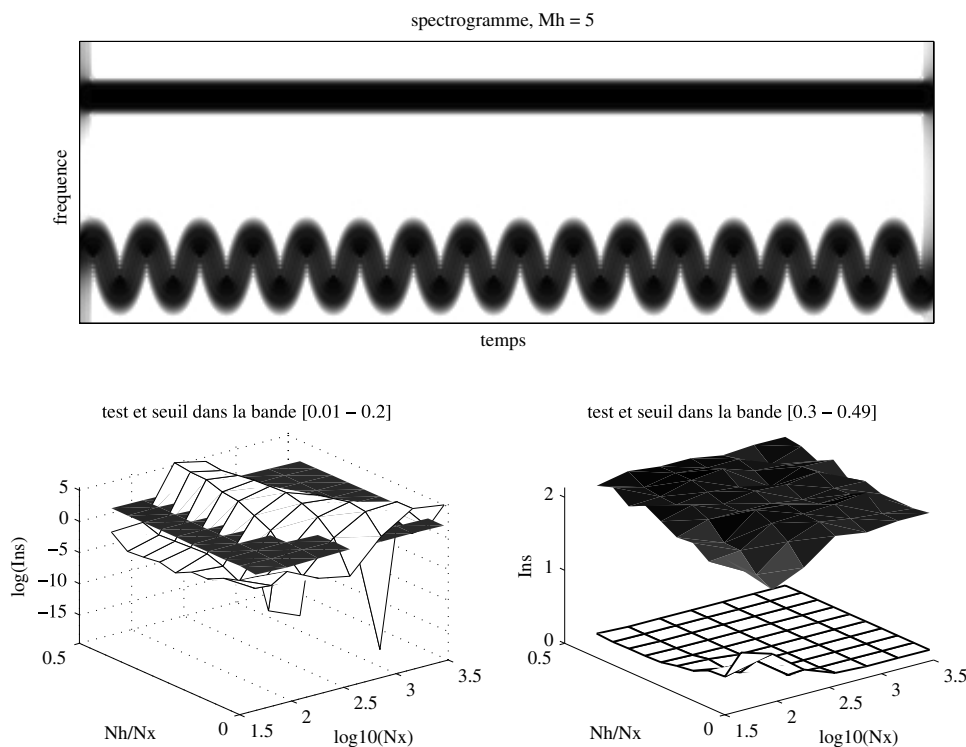


Figure 6. Exemple de test — Le diagramme du haut de la figure présente le spectrogramme d’un signal bi-composante, l’analyse portant sur la bande de fréquences réduites complète [0,0.5]. Les diagrammes du bas présentent les indices de non-stationnarité correspondants (surfaces blanches) dans les sous-bandes [0.01,0.2] (à gauche) et [0.3,0.49] (à droite). Dans les deux cas, les résultats sont tracés en fonction de la durée d’observation N_x du signal et de l’échelle relative d’analyse N_h/N_x , N_h étant la largeur de la fenêtre du spectrogramme. Les seuils déduits des substitués (pour une confiance à 95 %) sont matérialisés par les surfaces foncées, en accord avec l’interprétation selon laquelle le signal est stationnaire dans sa bande haute de fréquences et non stationnaire dans la bande basse lorsque la durée d’observation n’est ni grande ni petite devant la période de modulation.

posante à basses fréquences dans le domaine où la durée d'observation n'est ni grande ni petite devant la période de modulation.

5. Conclusion

On s'est intéressé ici à caractériser la stationnarité (de deuxième ordre) d'un signal relativement à un intervalle d'observation, en lui donnant un sens statistique associé à la construction d'une référence stationnarisée. L'approche opère dans le plan temps-fréquence avec l'idée que, sur un intervalle d'observation donné, un signal «non stationnaire» se distingue d'un signal «stationnaire» de même spectre moyen par une organisation temporelle structurée. Le test consiste alors à comparer classiquement des statistiques locale et globale, mais avec l'originalité qu'il s'appuie sur un ensemble de substituts stationnarisés servant à caractériser l'hypothèse nulle.

Les idées et principes de base de la méthode ont été décrits ici, mais de nombreuses variantes sont possibles pour le test proposé, que ce soit au niveau des représentations temps-fréquence utilisées (pour lesquelles l'usage de spectrogrammes réalloués multi-fenêtres [7] pourrait accroître la sensibilité du test) ou dans le choix des *distances* utilisées.

Une autre direction de recherche actuelle (*cf.* [13] pour de premiers résultats en ce sens) consiste à considérer le recours aux substituts comme une forme d'*apprentissage*, permettant ainsi de mettre en œuvre des outils dédiés (méthodes à noyaux, machines à vecteurs-supports, etc. [14]) pouvant s'appuyer sur des espaces d'attributs très généraux, et sans nécessité de caractériser de façon paramétrique l'hypothèse nulle de stationnarité.

Références

- [1] P. FLANDRIN, *Time-Frequency/Time-Scale Analysis*. San Diego: Academic Press, 1999.
- [2] H. LAURENT and C. DONCARLI, «Stationarity index for abrupt changes detection in the time-frequency plane,» *IEEE Signal Proc. Lett.*, Vol. 5, N°2, pp. 43-45, 1998.
- [3] B. MANDELBROT, *Les Objets Fractals — Forme, Hasard et Dimension*, Flammarion, 1975.
- [4] W. MARTIN, «Measuring the degree of non-stationarity by using the Wigner-Ville spectrum», in Proc. IEEE ICASSP-84, pp. 41B.3.1-41B.3.4, San Diego (CA), 1984.
- [5] W. MARTIN and P. FLANDRIN, «Detection of changes of signal structure by using the Wigner-Ville spectrum», *Signal Proc.*, Vol. 8, pp. 215-233, 1985.
- [6] M. BAYRAM and R.G. BARANIUK, «Multiple window time-varying spectrum estimation», in *Nonlinear and Nonstationary Signal Processing* (W.J. Fitzgerald *et al.*, eds.), pp. 292-316, Cambridge Univ. Press, 2000.
- [7] J. XIAO and P. FLANDRIN, «Multitaper time-frequency reassignment for nonstationary spectrum estimation and chirp enhancement», *IEEE Trans. on Signal Proc.*, Vol. 55, N°6 (Part 2), pp. 2851-2860, 2007.
- [8] J. THEILER, S. EUBANK, A. LONGTIN, B. GALDRIKIAN and JD FARMER, «Testing for nonlinearity in time series: the method of surrogate data», *Physica D*, Vol. 58, N°1-4, pp. 77-94, 1992.
- [9] T. SCHREIBER and A. SCHMITZ, «Improved surrogate data for nonlinearity tests», *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 77, N°4, pp. 635-638, 1996.
- [10] C.J. KEYLOCK, «Constrained surrogate time series with preservation of the mean and variance structure», *Phys. Rev. E*, vol. 73, pp. 030767.1-030767.4, 2006.
- [11] M. BASSEVILLE, «Distance measures for signal processing and pattern recognition», *Signal Proc.*, vol. 18, N°4, pp. 349-369, 1989.
- [12] J. XIAO, P. BORGNAT and P. FLANDRIN, «Testing stationarity with time-frequency surrogates», *Proc. EUSIPCO-07*, Poznan (PL), 2007.
- [13] J. XIAO, P. BORGNAT, P. FLANDRIN and C. RICHARD, «Testing stationarity with surrogates – A one-class SVM approach», *Proc. IEEE Stat. Sig. Proc. Workshop SSP-07*, Madison (WI), 2007.
- [14] B. SCHÖLKOPF and A.J. SMOLA, *Learning With Kernels: Support Vector Machines, Regularization, Optimization and Beyond*. MIT Press, 2001.





Jun Xiao

Jun Xiao est diplômée de l'East China Normal University (Shanghai, Chine) : B.E. en opto-électronique en 2002 et M.S. en optique (avec félicitations) en 2005. Elle a soutenu en 2008, à l'École Normale Supérieure de Lyon, une Thèse de Doctorat préparée dans l'équipe SISYPHE (« Signaux, Systèmes et Physique ») du Laboratoire de Physique.



Pierre Borgnat

Pierre Borgnat est Chargé de Recherche CNRS (section 07) au Laboratoire de Physique de l'ENSL Lyon (UMR CNRS 5672) depuis 2004. Né en 1974, il a fait des études de physique et traitement du signal à l'ENSL (prof. agrégé de physique en 1997, thèse de physique et traitement du signal en 2002) puis a travaillé l'ISR, IST (Lisbone, Portugal). Ses recherches portent sur le traitement statistique des signaux non-stationnaires (temps-fréquence, méthodes par anamorphoses, tests de stationarité) ou à lois d'échelle (temps-échelle, ondelettes) pour développer ces méthodologies en vue d'application à des systèmes complexes, en particulier issus de la physique. Il travaille aussi à la métrologie des réseaux, par le mesure et la modélisation du trafic internet, en particulier pour la classification de trafic et la sécurité informatique.



Patrick Flandrin

Ingénieur ICPI (aujourd'hui CPE Lyon) en 1978, Docteur-Ingénieur INP Grenoble en 1982 et Docteur d'État en 1987, Patrick Flandrin est actuellement Directeur de Recherche CNRS au Laboratoire de Physique de l'École Normale Supérieure de Lyon. Entre autres activités, il a été responsable de l'équipe SISYPHE au sein de ce laboratoire de 1991 à 2003 et du GdR ISIS de 2002 à 2005. Il est Président du Comité de Programme du Colloque GRETSI depuis 2001 et de l'École d'Été GRETSI de Peyresq depuis sa création en 2006. Lauréat du Prix Scientifique Philip Morris en 1991, du « SPIE Wavelet Pioneer Award » en 2001, du Prix Michel Monpetit de l'Académie des Sciences en 2001, il a été élu Fellow IEEE en 2002 et nommé Advisory Professor à l'East China Normal University de Shanghai en 2006. Centres d'intérêt : signaux et systèmes non stationnaires, méthodes temps-fréquence et temps-échelle, processus à lois d'échelle, systèmes complexes.