
Identification de modèles de Volterra basée sur la décomposition PARAFAC de leurs noyaux et le filtre de Kalman étendu

Gérard Favier, Thomas Bouilloc

Laboratoire I3S /CNRS /UNS
2000, route des Lucioles – Les Algorithmes – bât. Euclide B
BP 121 – 06903 Sophia Antipolis Cedex
favier@i3s.unice.fr, bouilloc@i3s.unice.fr

RÉSUMÉ. Les modèles de Volterra sont très utilisés dans de nombreux domaines d'application du fait qu'ils permettent de représenter, avec une précision arbitraire, tout système non linéaire de mémoire finie. Ils possèdent de plus la propriété d'être linéaires vis-à-vis de leurs paramètres, les coefficients des noyaux. Le principal inconvénient de ces modèles est leur complexité paramétrique qui nécessite d'estimer un très grand nombre de paramètres. Cet article présente une nouvelle méthode permettant de réduire cette complexité paramétrique en considérant les noyaux de Volterra d'ordre supérieur à un comme des tenseurs symétriques et en les décomposant à l'aide de la décomposition PARAFAC. Les modèles de Volterra-Parafac ainsi obtenus peuvent être vus comme une série de modèles de Wiener mis en parallèle. En exploitant cette nouvelle formulation des modèles de Volterra, nous proposons un algorithme d'identification récursif basé sur le filtre de Kalman étendu. Des résultats de simulation illustrent le comportement de la méthode d'identification proposée, dans le cas de systèmes de Volterra cubiques.

ABSTRACT. Volterra models are widely used in various application areas. Their usefulness is mainly due to their ability to approximate with an arbitrary precision any fading memory nonlinear system, and their property of linearity with respect to parameters, the kernels coefficients. The main drawback of these models is their parametric complexity needing to estimate a huge number of parameters. Considering Volterra kernels as symmetric tensors, we use their PARAFAC decomposition to derive the Volterra-Parafac models inducing a substantial parametric complexity reduction. We show that these models can be viewed as a set of Wiener models in parallel. Then, we apply the extended Kalman filter for recursively identifying such Volterra-Parafac models. Some simulation results illustrate the effectiveness of the proposed identification method, in the case of cubic Volterra systems.

MOTS-CLÉS : modèles de Volterra, modélisation et identification de systèmes non linéaires, noyaux de Volterra, décomposition PARAFAC, filtre de Kalman étendu, tenseurs.

KEYWORDS: Volterra models, nonlinear system modeling and identification, Volterra kernels, PARAFAC decomposition, extended Kalman filter, tensors

DOI:10.3166/TS.27.27-51 © 2010 Lavoisier, Paris

Extended abstract

Finite-dimensional discrete-time Volterra models, also called truncated Volterra series expansions or non-recursive polynomial models, are now widely used in various fields of applications. Their usefulness is mainly due to their ability to approximate to an arbitrary accuracy any fading memory nonlinear system, and also to their property of linearity with respect to the parameters, the kernels coefficients. Moreover, they represent a nonlinear extension of the very popular finite impulse response (FIR) linear model, with guaranteed stability in the bounded-input bounded-output (BIBO) sense. They are interpretable in terms of multidimensional convolutions which makes easy the derivation of their z-transform and Fourier transform representations, and therefore their frequency-domain interpretation. The main drawback of these models concerns their parametric complexity implying the need to estimate a huge number of parameters. This number increases rapidly with the system nonlinearity order and memory.

There are two main approaches for reducing the number of free parameters in Volterra models. One approach consists in considering block-oriented nonlinear models constituted by a cascade of linear dynamic subsystems and memoryless (static) nonlinearities. Another approach consists in expanding the Volterra kernels onto orthonormal basis functions (OBFs) like Laguerre, Kautz or GOBF functions. Such kernel expansions can lead to parsimonious modeling when the basis functions are adequately chosen. However, the determination of such basis functions for a given system is a difficult task.

In this paper which is an extended version of our paper presented at GRETSI 2009, we consider a new approach for reducing the parametric complexity of Volterra models that consists in using the PARAFAC decomposition of the kernels viewed as symmetric tensors. This approach is briefly summarized hereafter.

Let us consider a P^{th} -order Volterra model for a causal, stable, finite memory, time-invariant, single-input single-output system, described by the following input-output relationship:

$$y_k = h_0 + \sum_{p=1}^P \sum_{m_1=1}^{M_p} \cdots \sum_{m_p=1}^{M_p} h_{m_1, \dots, m_p}^{(p)} \prod_{i=1}^p u_{k-m_i}$$

where $h_{m_1, \dots, m_p}^{(p)}$ is a coefficient of the p^{th} -order kernel $\mathbb{H}^{(p)} \in \mathcal{C}^{M_p \times \dots \times M_p}$.

As well known, the Volterra kernels of order greater than one can be put in a symmetric form. Considering the Volterra kernels as symmetric tensors, we use their symmetric PARAFAC decomposition for deriving the so-called Volterra-Parafac model. Such a decomposition consists in decomposing the p^{th} -order Volterra kernel, of memory M_p and rank r_p , into a sum of r_p symmetric rank-one tensors, i.e. a sum of r_p outer products of p identical vectors, these r_p vectors constituting the columns of the PARAFAC matrix factor $\mathbf{A}^{(p)} \in \mathcal{C}^{M_p \times r_p}$ of the kernel:

$$h_{m_1, \dots, m_p}^{(p)} = \sum_{r=1}^{r_p} \prod_{i=1}^p a_{m_i, r}^{(p)} \quad [1]$$

When the rank r_p of the kernel is small with respect to its memory M_p , that leads to a substantial complexity reduction since the number of parameters characterizing the p^{th} -order kernel is equal to $M_p r_p$ in the case of its symmetric PARAFAC decomposition when it is equal to M_p^p in its standard form and $C_p^{M_p+p-1}$ in its symmetric form.

Using the symmetric PARAFAC decomposition of the Volterra kernels leads to the following Volterra-Parafac model:

$$y_k = h_0 + \sum_{p=1}^P \sum_{r=1}^{r_p} \left(\mathbf{u}_k^{(p)T} \mathbf{A}_{.r}^{(p)} \right)^p \quad [2]$$

where $\mathbf{u}_k^{(p)} = [u_{k-1}, \dots, u_{k-M_p}]^T$ and $\mathbf{A}^{(p)} \in \mathcal{C}^{M_p \times r_p}$ is the matrix factor of the p^{th} -order kernel PARAFAC decomposition.

The idea developed in the paper consists in linearizing this input-output equation with respect to the parameters, and applying the Kalman filter for recursively estimating the PARAFAC parameters of the Volterra-Parafac model.

The rest of the paper is organized as follows. After the introduction in section 1, section 2 contains the required mathematical background on tensors and more particularly on the PARAFAC decomposition. In section 3, we introduce the Volterra model and we recall how its kernels can be put in a symmetric form. Then, in using the symmetric PARAFAC decomposition of the kernels, we derive the Volterra-Parafac model, and we establish the link with a parallel-cascade Wiener model. In section 4, we develop the equations of an extended Kalman filter for recursively estimating the PARAFAC parameters of such a model. Some Monte Carlo simulation results are provided in section 5 to illustrate the performance of the proposed adaptive estimation algorithm, in the case of cubic Volterra systems. Finally, the conclusions and some perspectives for future work are drawn in section 6.

1. Introduction

Les modèles de Volterra à temps discret, de dimension finie, appelés aussi développements en séries de Volterra tronqués ou encore modèles polynomiaux non récursifs, peuvent être utilisés pour représenter tout système non linéaire à mémoire évanouissante (Boyd *et al.*, 1985). Ces modèles ont fait l'objet de très nombreuses applications dans différents domaines, comme par exemple le codage de la parole (Mumolo *et al.*, 1993), la linéarisation de haut-parleur (Franck, 1995), (Kajikawa, 2008), l'annulation d'écho et de bruit (Agazzi *et al.*, 1982), (Tan *et al.*, 2001), (Zeller *et al.*, 2007), la modélisation, l'égalisation et la prédistorsion de canaux de communication non linéaires (Benedetto *et al.*, 1979), (Benedetto *et al.*, 1983), (Eun *et al.*, 1997), (Cheng *et al.*, 2001), (Redfern *et al.*, 2001b), (Redfern *et al.*, 2001a), (Kibangou *et al.*, 2009a), (Fernandes *et al.*, 2009a), (Mileounis *et al.*, 2009), la modélisation de systèmes biologiques et physiologiques (Korenberg *et al.*, 1996), (Chon *et al.*, 1998), (Marmarelis, 2004), ou encore la commande de processus chimiques (Maner *et al.*, 1996), (Doyle III *et al.*, 2002).

Les modèles de Volterra constituent une extension non linéaire du modèle linéaire à réponse impulsionnelle finie (RIF). Ces modèles sont linéaires vis-à-vis de leurs paramètres, les coefficients des noyaux, qu'il est ainsi possible d'estimer à l'aide de la méthode classique des moindres carrés. De plus, ces modèles sont stables au sens entrée bornée – sortie bornée, et ils sont interprétables en termes de convolutions multidimensionnelles, ce qui facilite la dérivation de leurs représentations à l'aide des transformées en z et de Fourier, et donc leur interprétation dans le domaine fréquentiel (Mathews *et al.*, 2000). Le principal inconvénient de ces modèles est leur grande complexité paramétrique en raison du très grand nombre de coefficients contenus dans les noyaux. Ce nombre augmente très rapidement avec l'ordre de non linéarité et la mémoire du système.

Il existe deux principales approches pour réduire cette complexité paramétrique. La première consiste à considérer des modèles non linéaires en blocs, constitués d'une cascade de filtres linéaires (L) et de non linéarités statiques dites sans mémoire (N). L'ordre des blocs définit une sous-classe de modèles. On distingue ainsi les modèles de Wiener (L-N) composés d'un sous-système dynamique linéaire suivi d'une non linéarité statique, les modèles de Hammerstein (N-L) obtenus en inversant l'ordre des blocs précédents, les modèles de Wiener-Hammerstein (L-N-L) constitués d'une non linéarité statique en sandwich entre deux sous-systèmes linéaires et les modèles de Hammerstein-Wiener du type N-L-N. Comparés aux modèles de Volterra, ces modèles non linéaires en blocs présentent l'avantage d'être caractérisés par un plus petit nombre de paramètres mais, à la différence des modèles de Volterra, la sortie d'un tel modèle est non linéaire vis-à-vis des paramètres, ce qui conduit à un problème d'estimation non linéaire. Ces modèles sont très utilisés en automatique (Haber *et al.*, 1999), (Doyle III *et al.*, 2002), et pour la modélisation de systèmes biologiques et physiologiques (Korenberg *et al.*, 1986), (Korenberg, 1991), (Marmarelis, 2004).

Une seconde approche, introduite pour la première fois par (Wiener, 1958), consiste à développer les noyaux de Volterra sur des bases de fonctions orthonormales (BFO) telles que les fonctions de Laguerre ou de Kautz qui sont caractérisées, respectivement, par un paramètre à valeurs réelles, le pôle de Laguerre, et une paire de pôles complexes conjugués. Ce type de développement a aussi été utilisé pour la modélisation de systèmes linéaires stables (Mäkilä, 1990), (Wahlberg, 1991), (Wahlberg, 1994), (Wahlberg *et al.*, 1996). Les fonctions de Laguerre et de Kautz sont bien adaptées pour modéliser des systèmes admettant une dynamique dominante du premier ou du second ordre, respectivement. Pour des dynamiques plus complexes, des fonctions de base rationnelles plus générales, appelées BFO généralisées (BFOG), ont été développées (Heuberger *et al.*, 1995), (Ninness *et al.*, 1997). Les modèles de Volterra-Laguerre ont été utilisés pour identifier des systèmes biologiques (Marmarelis, 1993), et pour la commande adaptative de systèmes non linéaires (Dumont *et al.*, 1993). Le développement des noyaux de Volterra sur des BFO conduit à une modélisation parcimonieuse quand les pôles des BFO rationnelles sont convenablement choisis. Plusieurs solutions ont été proposées pour l'optimisation des pôles des modèles de Volterra-Laguerre, de Volterra-Kautz et de Volterra-BFOG (Hacioglu *et al.*, 2001), (Campello *et al.*, 2006), (Campello *et al.*, 2004), (Kibangou *et al.*, 2005b), (Kibangou *et al.*, 2005a), (da Rosa *et al.*, 2007).

Dans cet article, en considérant les noyaux de Volterra d'ordre supérieur à un comme des tenseurs symétriques et en les décomposant à l'aide de la décomposition

PARAFAC (Harshman, 1970), appelée aussi CANDECOMP (Carroll *et al.*, 1970), nous dérivons les modèles de Volterra-Parafac. Cette approche a été introduite pour la première fois par (Khouaja *et al.*, 2004), sans prendre en compte la propriété de symétrie des noyaux, et avec l'utilisation d'un algorithme du type moindres carrés récursifs alternés pour l'estimation paramétrique. Les modèles de Volterra-Parafac peuvent être interprétés comme la mise en parallèle d'une série de modèles de Wiener simplifiés. Puis, en combinant cette nouvelle formulation des modèles de Volterra avec une linéarisation de l'équation entrée-sortie, nous proposons un algorithme d'identification récursif du type filtre de Kalman étendu pour estimer les paramètres des décompositions PARAFAC des noyaux.

Le reste de cet article qui constitue une version étendue de notre article présenté au GRETSI 2009 (Favier *et al.*, 2009a), est organisé comme suit. Dans la section 2, nous rappelons quelques définitions relatives aux tenseurs et décrivons la décomposition PARAFAC. Dans la section 3, nous présentons le modèle de Volterra et indiquons comment ses noyaux peuvent être mis sous forme symétrique. Puis, en utilisant la décomposition PARAFAC des noyaux, nous développons le modèle de Volterra-Parafac et établissons le lien avec un modèle parallèle-cascade de Wiener. Les équations du filtre de Kalman étendu sont décrites dans la section 4 pour l'estimation récursive d'un tel modèle. Des résultats de simulation sont fournis dans la section 5 pour illustrer le comportement de cet algorithme dans le cas de modèles de Volterra cubiques. Enfin, nous concluons l'article en indiquant quelques perspectives de ce travail.

NOTATIONS. — \mathcal{R} et \mathcal{C} dénotent les corps des nombres réels et des nombres complexes, respectivement. On désigne par des lettres minuscules (a, b, \dots) les scalaires, des lettres minuscules en gras ($\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$) les vecteurs, des lettres majuscules en gras ($\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots$) les matrices, et des lettres en relief ($\mathbb{A}, \mathbb{B}, \dots$) les tenseurs d'ordre supérieur à deux. \mathbf{A}^T , \mathbf{A}^H et \mathbf{A}^* représentent la transposée, la transconjuguée (transposée Hermitienne), et la conjuguée complexe de \mathbf{A} , respectivement. Le vecteur \mathbf{A}_i (resp. \mathbf{A}_j) représente la $i^{\text{ème}}$ ligne (resp. la $j^{\text{ème}}$ colonne) de \mathbf{A} . Les scalaires a_i , a_{ij} , (ou $a_{i,j}$), a_{i_1, \dots, i_p} dénotent la $i^{\text{ème}}$ composante de \mathbf{a} , le $(i, j)^{\text{ème}}$ élément de \mathbf{A} , et le $(i_1, \dots, i_p)^{\text{ème}}$ élément de \mathbb{A} , respectivement. \mathbf{I}_P est la matrice identité d'ordre P , et $\|\cdot\|_F$ dénote la norme de Frobenius. L'opérateur $\text{vec}(\cdot)$ forme un vecteur en empilant les colonnes de son argument matriciel. Le produit extérieur et le produit de Kronecker sont dénotés par \circ et \otimes respectivement.

– Pour $\mathbf{A}^{(p)} \in \mathcal{C}^{I_p \times R_p}$, $p = 1, 2, \dots, P$:

$$\bigotimes_{p=1}^P \mathbf{A}^{(p)} = \mathbf{A}^{(1)} \otimes \mathbf{A}^{(2)} \otimes \dots \otimes \mathbf{A}^{(P)} \in \mathcal{C}^{I_1 \dots I_P \times R_1 \dots R_P} \quad [3]$$

– Pour $\mathbf{u}^{(p)} \in \mathcal{C}^{I_p \times 1}$, $p = 1, 2, \dots, P$:

$$\bigcirc_{p=1}^P \mathbf{u}^{(p)} = \mathbf{u}^{(1)} \circ \mathbf{u}^{(2)} \circ \dots \circ \mathbf{u}^{(P)} \in \mathcal{C}^{I_1 \times \dots \times I_P} \quad [4]$$

avec

$$\left(\bigcirc_{p=1}^P \mathbf{u}^{(p)} \right)_{i_1, \dots, i_P} = \prod_{p=1}^P u_{i_p}^{(p)} \quad [5]$$

En particulier, pour $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^{I \times 1}$, $\mathbf{v} \in \mathcal{C}^{J \times 1}$ et $\mathbf{w} \in \mathcal{C}^{K \times 1}$, $\mathbf{u} \circ \mathbf{v} \circ \mathbf{w}$ est un tenseur d'ordre trois et de rang un, tel que :

$$\mathbf{u} \circ \mathbf{v} \circ \mathbf{w} \in \mathcal{C}^{I \times J \times K} \Leftrightarrow (\mathbf{u} \circ \mathbf{v} \circ \mathbf{w})_{ijk} = u_i v_j w_k$$

2. Quelques rappels sur les tenseurs

2.1. Définitions

Pour un tenseur $\mathbb{H} \in \mathcal{K}^{I_1 \times \dots \times I_P}$ d'ordre P , appelé aussi un tableau à P entrées, de dimensions $I_1 \times \dots \times I_P$, et d'éléments $h_{i_1, \dots, i_P} \in \mathcal{K}$, ($i_p = 1, 2, \dots, I_p$, pour $p = 1, 2, \dots, P$), chaque indice i_p est associé à une entrée, appelée aussi un mode, et I_p représente la dimension relative au mode- p . L'ensemble d'appartenance \mathcal{K} est \mathcal{R} ou \mathcal{C} selon que \mathbb{H} est un tenseur réel ou complexe. Le tenseur \mathbb{H} contient $\prod_{p=1}^P I_p$ éléments (composantes scalaires). Un vecteur est un tenseur d'ordre un, tandis qu'une matrice est un tenseur d'ordre deux. Les tenseurs d'ordre supérieur à deux sont appelés tenseurs d'ordre supérieur.

Le tenseur \mathbb{H} est dit hypercubique si tous les modes ont la même dimension I , *i.e.* $I_1 = \dots = I_P = I$. Un tenseur hypercubique est dit symétrique si ses éléments h_{i_1, \dots, i_P} ne sont pas modifiés par toute permutation de leurs indices. Ainsi, par exemple, un tenseur cubique $\mathbb{H} \in \mathcal{K}^{I \times I \times I}$ est symétrique si pour tout $i, j, k = 1, 2, \dots, I$, on a les égalités suivantes :

$$h_{ijk} = h_{jik} = h_{jki} = h_{ikj} = h_{kji} = h_{kij} \quad [6]$$

Le tenseur hypercubique $\mathbb{H} \in \mathcal{K}^{I \times \dots \times I}$ d'ordre P est diagonal si $h_{i_1, \dots, i_P} \neq 0$ seulement pour $i_1 = i_2 = \dots = i_P$. Le tenseur identité d'ordre P , dénoté \mathbb{I}_P , est un tenseur diagonal dont les éléments de la diagonale principale sont égaux à 1.

En découpant le tenseur $\mathbb{H} \in \mathcal{K}^{I_1 \times \dots \times I_P}$ le long de son mode- p , *i.e.* en fixant l'indice i_p , on obtient un tenseur d'ordre $P - 1$ et de dimensions $I_1 \times \dots \times I_{p-1} \times I_{p+1} \times \dots \times I_P$, appelé la $i_p^{\text{ème}}$ tranche du mode- p de \mathbb{H} et dénoté $\mathbb{H}_{\dots, i_p, \dots}$. Les vecteurs mode- p sont les vecteurs de dimension I_p obtenus en faisant varier l'indice i_p tout en maintenant les autres indices fixes.

Différentes matricisations, appelées aussi dépliements matriciels, de $\mathbb{H} \in \mathcal{K}^{I_1 \times \dots \times I_P}$ peuvent être obtenues. Par exemple, on définit le dépliement matriciel horizontal, relatif au mode- p , dénoté \mathbf{H}_p , comme la matrice de dimensions $I_p \times I_{p+1} \dots I_P \ I_1 \dots I_{p-1}$, dont les colonnes sont les vecteurs mode- p .

Dans le cas d'un tenseur $\mathbb{H} \in \mathcal{C}^{I \times J \times K}$ d'ordre trois, nous avons trois types de tranches matricielles dénotées \mathbf{H}_{\dots} , $\mathbf{H}_{\cdot j}$ et $\mathbf{H}_{\cdot k}$, de dimensions respectives $K \times J$, $I \times K$ et $J \times I$. En empilant sous forme de blocs-colonnes les tranches matricielles d'un même type, on obtient les trois dépliements matriciels horizontaux suivants :

$$\mathbf{H}_1 = [\mathbf{H}_{\cdot 1} \dots \mathbf{H}_{\cdot J}] \in \mathcal{C}^{I \times JK} \quad [7]$$

$$\mathbf{H}_2 = [\mathbf{H}_{\cdot 1} \dots \mathbf{H}_{\cdot K}] \in \mathcal{C}^{J \times KI} \quad [8]$$

$$\mathbf{H}_3 = [\mathbf{H}_{1\cdot} \dots \mathbf{H}_{I\cdot}] \in \mathcal{C}^{K \times IJ} \quad [9]$$

ce qui implique :

$$h_{ijk} = (\mathbf{H}_1)_{i,(j-1)K+k} = (\mathbf{H}_2)_{j,(k-1)I+i} = (\mathbf{H}_3)_{k,(i-1)J+j} \quad [10]$$

Il est à noter que toutes les représentations matricielles d'un tenseur donné sont différentes du point de vue de l'arrangement des éléments du tenseur, mais elles sont équivalentes en termes d'information contenue puisque chacune d'elles contient tous les éléments du tenseur.

2.2. Décomposition PARAFAC

Tout tenseur $\mathbb{H} \in \mathcal{C}^{I_1 \times \dots \times I_P}$ admet une décomposition PARAFAC qui s'écrit sous forme scalaire comme :

$$h_{i_1, \dots, i_P} = \sum_{r=1}^R \prod_{p=1}^P a_{i_p, r}^{(p)}, \quad i_p = 1, \dots, I_p \quad [11]$$

où $a_{i_p, r}^{(p)}$ est un élément du facteur matriciel $\mathbf{A}^{(p)} \in \mathcal{C}^{I_p \times R}$, $p = 1, \dots, P$.

En prenant la relation [5] en compte, la décomposition PARAFAC peut être écrite en termes de produits extérieurs des colonnes des matrices facteurs :

$$\mathbb{H} = \sum_{r=1}^R \left(\underset{p=1}{\overset{P}{\circ}} \mathbf{A}_r^{(p)} \right) \quad [12]$$

Cette écriture montre que PARAFAC correspond à la décomposition du tenseur \mathbb{H} d'ordre P en une somme de R tenseurs de rang un, *i.e.* une somme de R produits extérieurs de P vecteurs. Le nombre minimum R de tenseurs de rang un nécessaires pour générer \mathbb{H} est appelé le rang de \mathbb{H} , dénoté $\text{rang}(\mathbb{H})$, comme introduit par (Hitchcock, 1927), puis repris par (Kruskal, 1977) qui a établi des bornes inférieures pour le rang d'un tenseur d'ordre trois.

Pour un tenseur $\mathbb{H} \in \mathcal{C}^{I_1 \times \dots \times I_P}$ de rang un, [11] devient :

$$h_{i_1, \dots, i_P} = \prod_{p=1}^P a_{i_p}^{(p)}, \quad i_p = 1, \dots, I_p, \quad p = 1, \dots, P \quad [13]$$

où $a_{i_p}^{(p)}$ est un élément du facteur vectoriel $\mathbf{a}^{(p)} \in \mathcal{C}^{I_p \times 1}$, ce qui signifie qu'un tenseur \mathbb{H} d'ordre P est de rang un s'il s'exprime comme le produit extérieur de P vecteurs :

$$\mathbb{H} = \underset{p=1}{\overset{P}{\circ}} \mathbf{a}^{(p)}.$$

Un tenseur symétrique $\mathbb{H} \in \mathcal{C}^{I \times \dots \times I}$ d'ordre P , peut toujours être décomposé en une somme de produits extérieurs symétriques de la forme :

$$\mathbb{H} = \sum_{r=1}^{R_S} \underbrace{\mathbf{A}_r \circ \dots \circ \mathbf{A}_r}_{P \text{ copies}} \quad [14]$$

faisant intervenir un seul facteur matriciel $\mathbf{A} \in \mathcal{C}^{I \times R_s}$. Une telle décomposition sera appelée décomposition PARAFAC symétrique de \mathbb{H} . Quand R_s est minimal, il est appelé le rang symétrique de \mathbb{H} et il est noté $\text{rang}_s(\mathbb{H})$. Ainsi, tout tenseur symétrique peut être décomposé comme en [12] ou [14], avec l'inégalité suivante entre son rang R et son rang symétrique R_s (Comon *et al.*, 2008) :

$$\text{rank}(\mathbb{H}) \leq \text{rang}_s(\mathbb{H}) \tag{15}$$

Pour un tenseur symétrique $\mathbb{H} \in \mathcal{C}^{I \times \dots \times I}$, d'ordre P et de rang un, sa décomposition PARAFAC symétrique s'écrit en termes d'un facteur vectoriel unique $\mathbf{a} \in \mathcal{C}^{I \times 1}$:

$$\mathbb{H} = \underbrace{\mathbf{a} \circ \dots \circ \mathbf{a}}_{P \text{ copies}} \tag{16}$$

ou de façon scalaire :

$$h_{i_1, \dots, i_P} = \prod_{p=1}^P a_{i_p}, \quad i_p = 1, \dots, I, \quad p = 1, \dots, P \tag{17}$$

où a_{i_p} est la $i_p^{\text{ème}}$ composante du facteur \mathbf{a} .

REMARQUES

– Dans le cas d'un tenseur $\mathbb{H}^{I \times J \times K}$ d'ordre trois, la décomposition PARAFAC s'écrit sous forme scalaire comme :

$$h_{ijk} = \sum_{r=1}^R a_{ir} b_{jr} c_{kr}, \quad i = 1, \dots, I, \quad j = 1, \dots, J, \quad k = 1, \dots, K \tag{18}$$

Cette équation correspond à une décomposition trilinéaire de \mathbb{H} . Elle s'écrit aussi comme :

$$\mathbb{H} = \sum_{r=1}^R \mathbf{A}_{.r} \circ \mathbf{B}_{.r} \circ \mathbf{C}_{.r} \tag{19}$$

Chaque terme de la somme, appelé une triade, est un tenseur d'ordre trois et de rang un, *i.e.* le produit extérieur de trois vecteurs qui sont les colonnes $\mathbf{A}_{.r}$, $\mathbf{B}_{.r}$ et $\mathbf{C}_{.r}$ des trois facteurs matriciels $\mathbf{A} \in \mathcal{C}^{I \times R}$, $\mathbf{B} \in \mathcal{C}^{J \times R}$ et $\mathbf{C} \in \mathcal{C}^{K \times R}$. Cette décomposition est illustrée à l'aide de la figure 1.

– La décomposition PARAFAC peut être vue comme une généralisation aux ordres supérieurs (à deux) de la décomposition matricielle ACP (Analyse en Composantes Principales) qui s'écrit pour une matrice $\mathbf{H} \in \mathcal{C}^{I \times J}$ comme :

$$h_{ij} = \sum_{r=1}^R a_{ir} b_{jr}, \quad i = 1, \dots, I, \quad j = 1, \dots, J$$

ou de façon équivalente :

$$\mathbf{H} = \sum_{r=1}^R \mathbf{A}_{.r} \circ \mathbf{B}_{.r} = \mathbf{A} \mathbf{B}^T \tag{20}$$

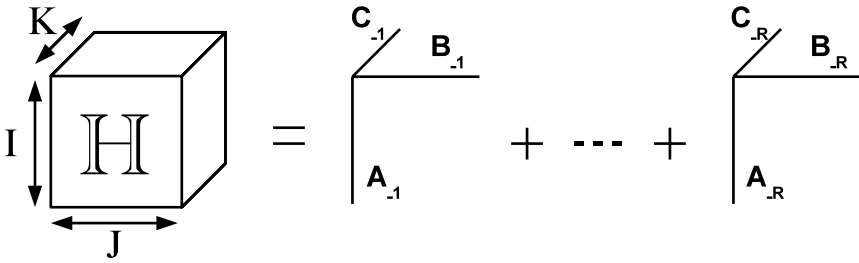


Figure 1. Décomposition PARAFAC d'un tenseur d'ordre trois

Cette équation correspond à une décomposition bilinéaire de \mathbf{H} au moyen de R composantes, chaque composante étant appelée une dyade et correspondant à une matrice de rang un. Cette décomposition ACP n'est pas unique, chaque facteur \mathbf{A} et \mathbf{B} étant défini à une matrice non singulière \mathbf{U} près, à l'exception du cas où \mathbf{H} est de rang un, puisque $\mathbf{H} = \mathbf{A}\mathbf{B}^T = \mathbf{A}\mathbf{U}(\mathbf{B}\mathbf{U}^{-T})^T$. L'unicité de cette décomposition peut être obtenue en imposant des contraintes sur les facteurs matriciels \mathbf{A} et \mathbf{B} (contraintes d'orthogonalité comme c'est le cas de la décomposition en valeurs singulières, ou contraintes de structures telles que Toeplitz ou Vandermonde, par exemple).

– Contrairement à la décomposition ACP, sous certaines conditions, initialement établies par (Harshman, 1972) et (Kruskal, 1977), (Kruskal, 1989) pour des tenseurs réels d'ordre trois, puis étendues aux cas des tenseurs d'ordre quelconque par (Sidiropoulos *et al.*, 2000a) et des tenseurs complexes par (Sidiropoulos *et al.*, 2000c), la décomposition PARAFAC est essentiellement unique, *i.e.* ses facteurs matriciels sont uniques à des permutations et des facteurs d'échelle près au niveau de leurs colonnes.

3. Les modèles de Volterra-Parafac

Le modèle de Volterra d'ordre P d'un système non linéaire, mono entrée - mono sortie, causal, stable, invariant dans le temps, à mémoire évanouissante et donc finie, est décrit à l'aide de la relation entrée-sortie suivante :

$$\begin{aligned}
 y_k &= h_0 + \sum_{p=1}^P \sum_{m_1=1}^{M_p} \cdots \sum_{m_p=1}^{M_p} h_{m_1, \dots, m_p}^{(p)} \prod_{i=1}^p u_{k-m_i} \\
 &= h_0 + \sum_{p=1}^P y_k^{(p)} \quad [21]
 \end{aligned}$$

où le scalaire h_0 représente l'offset, u_k et y_k dénotent respectivement les signaux d'entrée et de sortie à l'instant k , P est le degré de non linéarité du modèle, M_p est la mémoire du terme homogène d'ordre p noté $y_k^{(p)}$, et $h_{m_1, \dots, m_p}^{(p)}$ est un coefficient du noyau d'ordre p . Ce coefficient étant caractérisé par p indices, il peut être vu comme un élément d'un tenseur $\mathbb{H}^{(p)} \in \mathcal{K}^{M_p \times \dots \times M_p}$ d'ordre p , avec $\mathcal{K} = \mathcal{R}$ ou \mathcal{C} selon que

les coefficients des noyaux sont à valeurs réelles ou complexes. Le noyau d'ordre p est caractérisé par M_p^p coefficients.

Comme toute permutation des indices m_1, \dots, m_p ne modifie pas le produit $\prod_{i=1}^p u_{k-m_i}$ d'entrées retardées, on peut sommer tous les coefficients associés à ces permutations pour obtenir un noyau symétrique défini comme :

$$h_{m_1, \dots, m_p}^{(p, sym)} = \frac{1}{p!} \sum_{\pi(\cdot)} h_{m_{\pi(1)}, \dots, m_{\pi(p)}}^{(p)} \quad [22]$$

où $(\pi(1), \dots, \pi(p))$ dénote une permutation de $(1, \dots, p)$. Ainsi, dans la suite, sans perte de généralité, les noyaux de Volterra d'ordre $p \geq 2$ seront considérés sous forme symétrique. Le nombre de coefficients indépendants contenus dans le noyau symétrique d'ordre p est égal à $C_p^{M_p+1}$. Pour un noyau cubique de mémoire $M_3 = 10$, le nombre de coefficients est égal à $M_3^3 = 1000$ dans le cas non symétrique et $C_3^{12} = 220$ dans le cas symétrique, ce qui correspond à un taux de réduction de complexité de 78 %.

Le noyau d'ordre p est dit séparable s'il peut s'exprimer comme le produit de p noyaux d'ordre un :

$$h_{m_1, \dots, m_p}^{(p)} = \prod_{i=1}^p h_{m_i}^{(i)} \quad [23]$$

où $h_{m_i}^{(i)}$ représente le m_i ème élément du noyau d'ordre un $\mathbf{h}^{(i)}$. Si le noyau séparable est symétrique, alors les p noyaux d'ordre un sont identiques et [23] devient :

$$h_{m_1, \dots, m_p}^{(p)} = \prod_{i=1}^p h_{m_i} \quad [24]$$

En comparant [23] avec [13], on peut conclure qu'un noyau séparable est un tenseur de rang un.

L'utilisation de la décomposition PARAFAC symétrique [21] du noyau de Volterra d'ordre p , supposé de rang symétrique r_p et de facteur matriciel $\mathbf{A}^{(p)}$, permet de réécrire le terme homogène $y_k^{(p)}$ de [21] comme suit :

$$y_k^{(p)} = \sum_{m_1=1}^{M_p} \dots \sum_{m_p=1}^{M_p} h_{m_1, \dots, m_p}^{(p)} \prod_{i=1}^p u_{k-m_i} \quad [25]$$

$$= \sum_{m_1=1}^{M_p} \dots \sum_{m_p=1}^{M_p} \left(\sum_{r=1}^{r_p} \prod_{i=1}^p a_{m_i, r}^{(p)} \right) \prod_{i=1}^p u_{k-m_i} \quad [26]$$

En réorganisant l'ordre des sommations, on obtient :

$$y_k^{(p)} = \sum_{r=1}^{r_p} \prod_{i=1}^p \sum_{m_i=1}^{M_p} a_{m_i, r}^{(p)} u_{k-m_i} \quad [27]$$

et en définissant le vecteur de régression linéaire $\mathbf{u}_k^{(p)} = [u_{k-1}, \dots, u_{k-M_p}]^T$ associé au terme homogène d'ordre p , de mémoire M_p , l'équation précédente devient :

$$y_k^{(p)} = \sum_{r=1}^{r_p} \left(\mathbf{u}_k^{(p)T} \mathbf{A}_{\cdot r}^{(p)} \right)^p \quad [28]$$

Le terme homogène d'ordre p peut donc être réalisé en parallélisant r_p modèles de Wiener. Chacun de ces modèles est composé d'une non linéarité statique équivalant à une élévation à la puissance p , précédée d'un filtre linéaire RIF de mémoire M_p , dont les coefficients sont les composantes d'une colonne $\mathbf{A}_{\cdot r}^{(p)} \in \mathcal{C}^{M_p \times 1}$ du facteur matriciel $\mathbf{A}^{(p)}$ de la décomposition PARAFAC symétrique du noyau de Volterra d'ordre p . Par suite, la sortie [21] du modèle de Volterra peut être réécrite comme la somme du terme d'offset h_0 et des sorties de $\sum_{p=1}^P r_p$ modèles de Wiener en parallèle. Cette réalisation parallèle-cascade est illustrée à l'aide de la figure 2 pour un filtre de Volterra-Parafac cubique, où $\mathbf{A}_{\cdot 1}^{(1)} = [h_1^{(1)}, \dots, h_{M_1}^{(1)}]^T$ contient les coefficients du noyau linéaire, et $r_1 = 1$.

Il est à noter que le modèle de Volterra-Parafac conduit à une architecture modulaire et parallèle très attractive pour l'approximation et la simulation de systèmes non linéaires. Ce modèle est à comparer avec le modèle parallèle-cascade

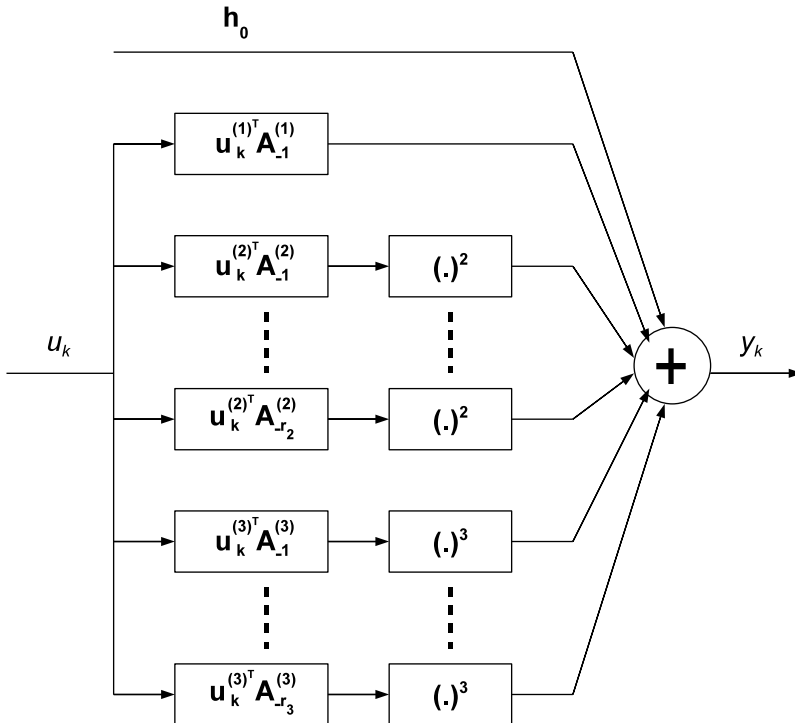


Figure 2. Réalisation parallèle-cascade d'un filtre de Volterra-Parafac cubique

de Wiener (PCW) décrit de façon générale à l'aide de l'équation entrée-sortie suivante :

$$y_k = \sum_{p=1}^P \mathcal{N}^{(p)} \left(\sum_{m=1}^M h_m^{(p)} u_{k-m} \right) \quad [29]$$

où $\mathbf{h}^{(p)}$ et $\mathcal{N}^{(p)}(\cdot)$ représentent, respectivement, le bloc linéaire RIF et la non linéarité statique de la $p^{\text{ème}}$ branche de Wiener. (Korenberg, 1991) a démontré qu'un tel modèle PCW, avec un nombre fini P de branches, permet d'approximer avec une précision arbitraire, tout système non linéaire de mémoire finie. Le modèle de Volterra-Parafac est un cas particulier du modèle PCW pour lequel les filtres linéaires RIF sont déduits des décompositions PARAFAC des noyaux de Volterra, tandis que les non linéarités statiques sont de simples puissances $(\cdot)^p$. Une méthode a été récemment proposée pour l'identification de modèles PCW à partir d'une diagonalisation conjointe des tranches matricielles du noyau de Volterra d'ordre trois associé au modèle PCW (Kibangou *et al.*, 2009b).

4. Estimation paramétrique des modèles de Volterra-Parafac basée sur le filtre de Kalman étendu

Dans ce qui suit, nous supposons que le système non linéaire à identifier est modélisé à l'aide du modèle de Volterra-Parafac déduit des équations [21] et [28] :

$$y_k = h_0 + \sum_{p=1}^P \sum_{r=1}^{r_p} \left(\mathbf{u}_k^{(p)T} \mathbf{A}_r^{(p)} \right)^p \quad [30]$$

où $\mathbf{u}_k^{(p)} = [u_{k-1}, \dots, u_{k-M_p}]^T$, $\mathbf{A}^{(p)}$ est le facteur matriciel de la décomposition PARAFAC symétrique du noyau d'ordre p , pour $p \geq 2$, et $r_1 = 1$. De plus, nous supposons que les signaux d'entrée-sortie sont à valeurs complexes comme cela est le cas pour certaines applications comme le traitement d'antenne ou les communications numériques pour lesquelles les symboles à transmettre sont le plus souvent modulés à l'aide des modulations PSK (phase shift keying) ou QAM (quadrature amplitude modulation).

Définissons le vecteur de paramètres :

$$\boldsymbol{\theta}^T = [h_0 \ \boldsymbol{\theta}^{(1)T} \ \dots \ \boldsymbol{\theta}^{(P)T}] \quad [31]$$

avec

$$\boldsymbol{\theta}^{(1)} = \mathbf{A}_{\cdot 1}^{(1)} = [h_1^{(1)}, \dots, h_{M_1}^{(1)}]^T \in \mathcal{C}^{M_1 \times 1} \quad [32]$$

$$\boldsymbol{\theta}^{(p)} = \text{vec}(\mathbf{A}^{(p)}) \in \mathcal{C}^{M_p r_p \times 1}, \text{ pour } p = 2, \dots, P. \quad [33]$$

La relation entrée-sortie [30] peut alors être réécrite comme :

$$y_k = f(k, \boldsymbol{\theta}) \quad [34]$$

Les équations du filtre de Kalman étendu sont obtenues en appliquant le filtre de Kalman à l'instant k après une linéarisation de $f(k, \boldsymbol{\theta})$ autour de la dernière valeur estimée $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}$:

$$y_k \approx f(k, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}) + \hat{\mathbf{g}}_k^T (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}) \quad [35]$$

où $\hat{\mathbf{g}}_k$ désigne le gradient de la fonction non linéaire $f(k, \boldsymbol{\theta})$ par rapport au vecteur de paramètres $\boldsymbol{\theta}$, calculé au point $\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}$:

$$\hat{\mathbf{g}}_k = \mathbf{g} \left(k, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} \right) = \left. \frac{\partial f(k, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}}$$

Le gradient $\hat{\mathbf{g}}_k$ peut être calculé de façon analytique à l'aide de la formule suivante :

$$\hat{\mathbf{g}}_k = \left[\hat{\varphi}_k^{(0)} \quad \hat{\varphi}_k^{(1)T} \quad \hat{\varphi}_k^{(2)T} \quad \dots \quad \hat{\varphi}_k^{(P)T} \right]^T \quad [36]$$

avec

$$\hat{\varphi}_k^{(0)} = 1, \quad \hat{\varphi}_k^{(1)} = \mathbf{u}_k^{(1)} \quad [37]$$

et pour $p = 2, \dots, P$:

$$\hat{\varphi}_k^{(p)} = \left. \frac{\partial f(k, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}^{(p)}} \right|_{\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}} = p \hat{\mathbf{v}}_k^{(p)} \otimes \mathbf{u}_k^{(p)} \quad [38]$$

avec

$$\hat{\mathbf{v}}_k^{(p)} = \left[\left(\hat{\alpha}_k^{(p,1)} \right)^{p-1}, \dots, \left(\hat{\alpha}_k^{(p,r_p)} \right)^{p-1} \right]^T \quad [39]$$

et

$$\hat{\alpha}_k^{(p,r)} = \mathbf{u}_k^{(p)T} \hat{\mathbf{A}}_r^{(p)}(k-1), \text{ pour } r = 1, \dots, r_p \quad [40]$$

$\hat{\mathbf{A}}_r^{(p)}(k-1)$ étant extrait du vecteur de paramètres estimés $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}$.

En notant que nous avons :

$$f \left(k, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} \right) = \hat{\boldsymbol{\psi}}_k^T \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} \quad [41]$$

avec

$$\hat{\boldsymbol{\psi}}_k^T = \left[\hat{\varphi}_k^{(0)} \quad \hat{\varphi}_k^{(1)T} \quad \frac{1}{2} \hat{\varphi}_k^{(2)T} \quad \dots \quad \frac{1}{P} \hat{\varphi}_k^{(P)T} \right] \quad [42]$$

le processus d'innovation associé à l'équation d'entrée-sortie linéarisée [35] est donné par :

$$\hat{e}_k = s_k - \left[f \left(k, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} \right) + \hat{\mathbf{g}}_k^T \left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} \right) \right] \quad [43]$$

$$= s_k - f \left(k, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} \right) = s_k - \hat{\boldsymbol{\psi}}_k^T \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} \quad [44]$$

où s_k est la sortie mesurée du système à identifier.

L'application du filtre de Kalman au modèle linéarisé [35] conduit à l'algorithme du filtre de Kalman étendu décrit dans le tableau 1, où λ désigne un facteur d'oubli.

Tableau 1. Filtre de Kalman étendu pour l'estimation paramétrique du modèle de Volterra-Parafac

<p>1) Initialiser aléatoirement $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0$, fixer $P_0 = \alpha \mathbf{I}$, où α est un scalaire, et $k = 0$.</p> <p>2) Incrémenter k et calculer $\hat{\mathbf{g}}_k$ et $\hat{\boldsymbol{\psi}}_k$ en utilisant (36)-(40) et (42), respectivement.</p> $\hat{e}_k = s_k - \hat{\boldsymbol{\psi}}_k^T \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} \quad [45]$ $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} + \mathbf{G}_k \hat{e}_k \quad [46]$ $\boldsymbol{\Sigma}_k = \hat{\mathbf{g}}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \hat{\mathbf{g}}_k^* + \sigma_e^2 \quad [47]$ $\mathbf{G}_k = \mathbf{P}_{k-1} \hat{\mathbf{g}}_k^* \boldsymbol{\Sigma}_k^{-1} \quad [48]$ $\mathbf{P}_k = \lambda^{-1} \left(\mathbf{P}_{k-1} - \mathbf{G}_k \boldsymbol{\Sigma}_k \mathbf{G}_k^H \right) \quad [49]$ <p>3) Retourner à l'étape 2 jusqu'à ce que $k = K$, où K est le nombre de données entrée-sortie traitées.</p>

REMARQUES

– Quand les paramètres PARAFAC varient lentement, on peut supposer qu'ils obéissent à un modèle de variation du type marche aléatoire défini comme :

$$\boldsymbol{\theta}_k = \boldsymbol{\theta}_{k-1} + \mathbf{w}_k \quad [50]$$

où $\{\mathbf{w}_k\}$ est une séquence de bruit blanc de covariance $\sigma_w^2 \mathbf{I}$. Ce modèle est aussi appelé mouvement brownien à temps discret. En prenant en compte ces équations d'état pour les variations de paramètres, la seule modification à apporter aux équations du filtre de Kalman étendu concerne l'équation [49] qui devient :

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k-1} - \mathbf{G}_k \boldsymbol{\Sigma}_k \mathbf{G}_k^H + \sigma_w^2 \mathbf{I} \quad [51]$$

– Le filtre de Kalman étendu décrit dans le tableau 1 peut être vu comme une extension de l'algorithme standard des moindres carrés récursifs au cas de l'équation entrée-sortie non linéaire [34], extension qui résulte de la linéarisation de cette équation. Comme il est bien connu, le filtre de Kalman étendu fournit de bonnes performances en termes de vitesse de convergence. Le principal inconvénient de cet algorithme réside dans sa charge de calcul principalement liée à l'équation de Riccati définie par les équations [47]-[49]. Un algorithme adaptatif plus simple du type LMS peut aussi être utilisé (Favier *et al.*, 2010).

5. Résultats de simulation

Dans ce paragraphe, nous présentons quelques résultats de simulations pour illustrer le comportement du filtre de Kalman étendu pour l'estimation paramétrique d'un modèle de Volterra-Parafac cubique dont les mémoires et les rangs des noyaux sont fixés à $M_1 = M_2 = M_3 = 10$ et $R_2 = R_3 = 3$. Cinquante modèles de Volterra ont été simulés ($M = 50$) à partir de la décomposition PARAFAC de leurs noyaux, les éléments des matrices facteurs étant générés selon une distribution gaussienne. Deux types d'entrée différents ont été utilisés :

- une séquence de bruit blanc réelle.
- une séquence de bruit blanc complexe.

Des simulations de type Monte Carlo ont été réalisées en ajoutant dix séquences de bruit différentes ($L = 10$) pour chaque modèle simulé, chacune d'elles étant une séquence de bruit blanc Gaussien réel ou complexe suivant la nature du signal d'entrée, pour un rapport signal sur bruit (RSB) fixé. Les résultats de simulation sont fournis en termes des critères de performance suivants : erreur quadratique moyenne normalisée (EQMN) sur la sortie d'une part et sur les noyaux estimés d'autre part :

$$\text{EQMN}_s = 10 \log_{10} \left(\frac{1}{LM} \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^M \frac{\|\mathbf{s}_{k,m,l} - \hat{\mathbf{s}}_{k,m,l}\|_2^2}{\|\mathbf{s}_{k,m,l}\|_2^2} \right) \quad [52]$$

où $\mathbf{s}_{k,m,l} = [s_{k-\tau+1,m,l} \cdots s_{k,m,l}]^T$ est le vecteur des sorties associé au $m^{\text{ème}}$ modèle simulé et à la $l^{\text{ème}}$ séquence de bruit, $\hat{\mathbf{s}}_{k,m,l} = [\hat{s}_{k-\tau+1,m,l} \cdots \hat{s}_{k,m,l}]^T$ est le vecteur des sorties calculées sur une fenêtre glissante de longueur $\tau = 2000$, en utilisant le modèle de Volterra-Parafac estimé à l'instant k , avec $\hat{s}_{t,m,l} = f(t, \hat{\theta}_{k,m,l})$ pour $t = k - \tau + 1, \dots, k$.

$$\text{EQMN}_{\mathbb{H}} = 10 \log_{10} \left(\frac{1}{LM} \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^M \frac{\left(\|\mathbb{H}_m^{(p)} - \hat{\mathbb{H}}_{m,l}^{(p)}\|_F^2 \right)}{\|\mathbb{H}_m^{(p)}\|_F^2} \right) \quad [53]$$

où $\mathbb{H}_m^{(p)}$ est le noyau de Volterra d'ordre p associé au $m^{\text{ème}}$ modèle simulé et $\hat{\mathbb{H}}_{m,l}^{(p)}$ est le noyau de Volterra d'ordre p , associé au $m^{\text{ème}}$ modèle simulé et à la $l^{\text{ème}}$ séquence de bruit, et reconstruit en utilisant les paramètres estimés de sa décomposition PARAFAC, pour $p = 2$ et 3 .

La figure 3 montre la convergence de l'algorithme d'estimation en fonction des itérations, pour une entrée de type bruit blanc réel, différentes valeurs du RSB et $R_2 = R_3 = 3$.

Les figure 4 et 5 représentent l'EQMN sur la sortie en fonction du RSB, d'une part pour $R_2 = R_3 = 3$, différentes valeurs du rang d'approximation R et une entrée de type bruit blanc réel, et d'autre part pour les deux entrées considérées et $R_2 = R_3 = 3$, respectivement. Enfin, l'EQMN sur les noyaux linéaire, quadratique et cubique estimés est tracée sur la figure 6 pour l'entrée de type bruit blanc réel, avec $R_2 = R_3 = 3$.

Dans le tableau 2, nous indiquons le nombre de paramètres qui caractérisent le modèle de Volterra cubique standard, pour des noyaux de mémoire

$M_1 = M_2 = M_3 = 10$, le modèle de Volterra cubique avec noyaux symétrisés, et le modèle de Volterra-Parafac associé lorsque le rang des noyaux quadratique et cubique est égal à $R_2 = R_3 = 3$. On constate que le modèle de Volterra-Parafac permet de réduire très fortement la complexité paramétrique.

Dans le tableau 3, nous donnons l'EQMN sur la sortie pour les deux entrées considérées et différentes valeurs du RSB, lorsque $R_2 = R_3 = 3$.

Tableau 2. Complexité paramétrique des trois modèles de Volterra cubiques

	Volterra standard	Volterra avec noyaux symétriques	Volterra-Parafac $R_2 = R_3 = 3$
Nombre de paramètres	1111	286	71

Tableau 3. EQMN sur la sortie pour des séquences d'entrée du type bruit blanc réel et complexe, différents RSB, et $R_2 = R_3 = 3$

Entrée \ RSB (dB)	0	10	20	30	40
Bruit Blanc Réel	2.58	-5.06	-15.08	-25.03	-35.23
Bruit Blanc Complexe	-0.25	-7.55	-17.06	-27.13	-37.16

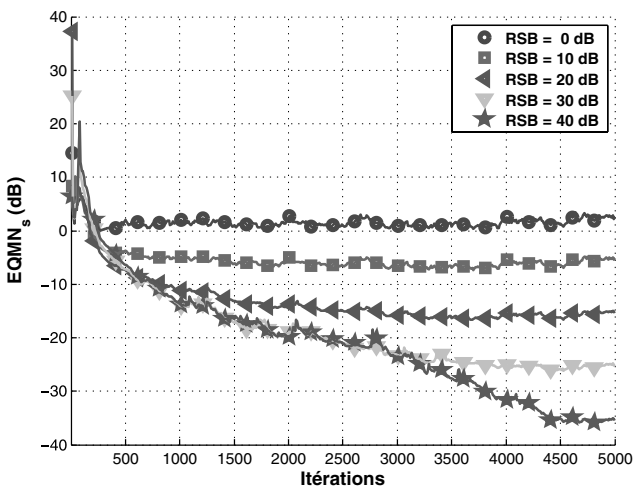


Figure 3. EQMN sur la sortie en fonction des itérations pour une entrée de type bruit blanc réel, différentes valeurs de RSB et $R_2 = R_3 = 3$

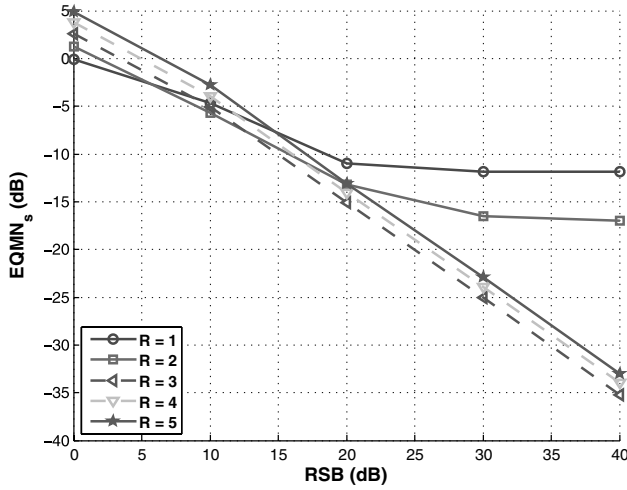


Figure 4. EQMN sur la sortie en fonction du RSB pour une entrée de type bruit blanc réel, $R_2 = R_3 = 3$ et différentes valeurs du rang d'approximation R

À partir des résultats de simulations, nous pouvons conclure que :

– La convergence de l'algorithme d'estimation dépend de manière assez sensible du RSB. Cette convergence est d'autant plus rapide que le RSB est plus faible, mais au prix d'une augmentation de l'EQMN sur la sortie à la convergence (voir figure 3).

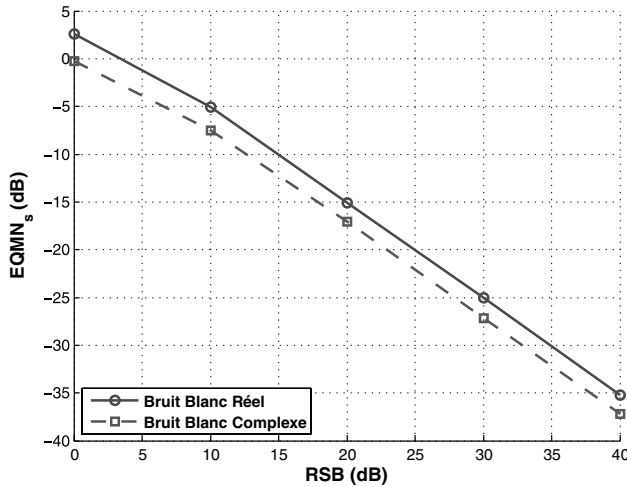


Figure 5. EQMN sur la sortie en fonction du RSB pour des séquences d'entrée du type bruit blanc réel et complexe, avec $R_2 = R_3 = 3$

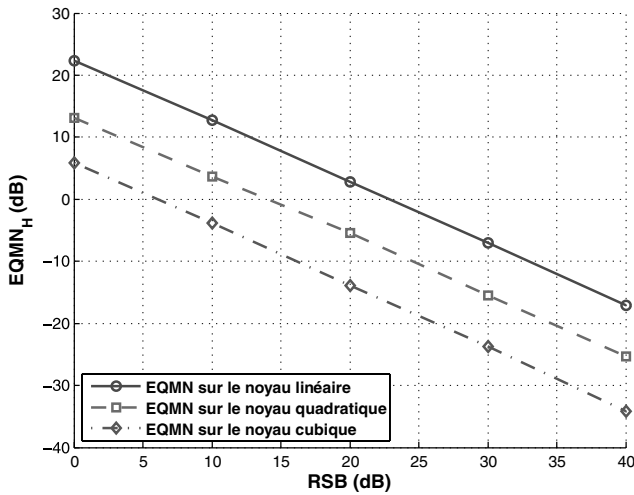


Figure 6. EQMN sur les noyaux en fonction du RSB pour une entrée de type bruit blanc réel et $R_2 = R_3 = 3$

– Pour un RSB supérieur ou égal à 20 dB, l’EQMN sur la sortie est minimale pour le rang exact des noyaux ($R = 3$) ; une sous-estimation de ce rang entraîne une augmentation sensible de l’EQMN sur la sortie, tandis qu’une surestimation du rang se traduit par une légère augmentation de l’EQMN sur la sortie (voir figure 4). Ces résultats mettent en évidence le fait que le rang des noyaux peut être déterminé à partir du calcul de l’EQMN sur la sortie.

– Comme attendu, l’EQMN sur la sortie est plus faible pour l’entrée de type bruit blanc complexe que pour l’entrée de type bruit blanc réel, avec une différence d’environ 2 dB, quelle que soit la valeur du RSB (voir figure 5 et tableau 3).

– L’estimation des noyaux quadratique et cubique est plus précise que celle du noyau linéaire (voir figure 6).

6. Conclusion

Dans cet article, nous avons présenté une nouvelle formulation du modèle de Volterra basée sur une décomposition PARAFAC de ses noyaux considérés comme des tenseurs symétriques. Le modèle de Volterra-Parafac ainsi obtenu peut être vu comme un modèle parallèle-cascade de Wiener simplifié. L’utilisation de la décomposition PARAFAC permet de réduire de façon très significative la complexité paramétrique du modèle de Volterra lorsque le rang des noyaux est faible par rapport à leur mémoire (Favier *et al.*, 2009b). Le filtre de Kalman étendu appliqué au modèle de Volterra-Parafac fournit un algorithme d’estimation paramétrique récursif facile à mettre en oeuvre et efficace comme l’illustrent les résultats de simulations présentés. Ces résultats ont mis en évidence que le rang des noyaux peut également être déterminé en temps réel par la mise en parallèle de plusieurs filtres de Kalman étendus, chaque filtre étant associé à une valeur différente du rang des noyaux.

L'inconvénient majeur de la solution proposée réside dans le volume de calcul nécessité par la résolution de l'équation de Riccati. Une solution alternative consiste à utiliser un algorithme du type LMS (Favier *et al.*, 2010). Parmi les autres perspectives de ce travail, nous envisageons de développer des algorithmes d'estimation adaptatifs avec mise à jour partielle sélective des coefficients Parafac comme cela a été proposé pour les filtres linéaires RIF standards (Douglas, 1997), (Dogaŋçay *et al.*, 2001). Une autre perspective de ce travail va consister à étendre le modèle de Volterra-Parafac aux modèles de Volterra utilisés pour la modélisation des systèmes de communication non linéaires à bande étroite, pour lesquels il n'y a pas de noyaux d'ordre pair et le terme homogène d'ordre impair égal à $(2p + 1)$ fait intervenir $(p + 1)$ entrées non conjuguées et p entrées conjuguées (Benedetto *et al.*, 1979), (Cheng *et al.*, 2001), ce qui induit une double symétrie au niveau de la décomposition PARAFAC des noyaux d'ordre impair.

En conclusion de cet article, nous pouvons dire que les tenseurs jouent un rôle sans cesse grandissant dans de nombreux domaines scientifiques. Une application directement liée aux travaux présentés ici concerne l'identification structurelle et l'estimation paramétrique de systèmes non linéaires en blocs (Kibangou *et al.*, 2009c), (Kibangou *et al.*, 2010), (Favier, 2009).

Nous listons ci-après les principales applications des tenseurs, avec une focalisation particulière sur les applications liées au traitement du signal et des images :

- L'analyse de données multidimensionnelles comme en phonétique (Harshman, 1970), en psychométrie (Carroll *et al.*, 1970), (Kroonenberg, 2007), ou encore en chimiométrie (Bro, 1997), (Smilde *et al.*, 2004).

- La séparation aveugle de sources, appelée aussi identification aveugle de mélanges instantanés ou convolutifs, sous-déterminés ou sur-déterminés, sujet qui depuis les travaux de pionnier de (Cardoso, 1990), (Cardoso, 1991) a donné lieu au développement de très nombreuses méthodes basées sur l'utilisation de tenseurs de statistiques (cumulants ou multispectres) d'ordre quatre (Ferréol *et al.*, 2005), (Acar *et al.*, 2006), (de Lathauwer *et al.*, 2007), (Fernandes *et al.*, 2008), (Fernandes *et al.*, 2009b) ou d'ordre plus élevé (Albera *et al.*, 2004), (Karfoul *et al.*, 2008), (Yu *et al.*, 2008).

- Le traitement d'antenne (Sidiropoulos *et al.*, 2000b) , (Salmi *et al.*, 2009).

- L'estimation aveugle et conjointe de canaux, de codes et de symboles pour les systèmes de communication tant linéaires (Sidiropoulos *et al.*, 2000b), (de Almeida *et al.*, 2007) que non linéaires (Fernandes *et al.*, 2009a).

- La modélisation et la conception de nouveaux systèmes de communication MIMO (de Almeida *et al.*, 2008), (de Almeida *et al.*, 2009a), (de Almeida *et al.*, 2009b).

- Le traitement d'images: synthèse, compression, analyse, ou encore reconnaissance et classification d'objets dans des images, comme des visages ou des silhouettes pour l'authentification biométrique (Vasilescu *et al.*, 2002), (Vasilescu *et al.*, 2007), (Lu *et al.*, 2008).

- La modélisation de données d'imagerie médicale telles que des données d'électroencéphalographie (EEG) et d'imagerie à résonance magnétique (IRM) (Acar *et al.*, 2007), (Morup *et al.*, 2008).

Bibliographie

- Acar E., Aykut-Bingol C., Bingol H., Bro R., Yener B. (2007). « Multiway analysis of epilepsy tensors », *Bioinformatics*, vol. 23, p. 10-18.
- Acar T., Yu Y., Petropulu A. P. (2006). « Blind MIMO system estimation based on PARAFAC decomposition of higher order output tensors », *IEEE Tr. on Signal Processing*, vol. 54, n° 11, p. 4156-4168, Nov..
- Agazzi O., Messerschmitt D., Hodges D. (1982). « Nonlinear echo cancellation of data signals », *IEEE Tr. Commun.*, vol. 30, n° 11, p. 2421-2433, Nov.
- Albera L., Ferréol A., Comon P., Chevalier P. (2004). « Blind Identification of Over-complete MixturEs of sources (BIOME) », *Linear Algebra Appl.*, vol. 391C, p. 3-30, Nov.
- Benedetto S., Biglieri E. (1983). « Nonlinear equalization of digital satellite channels », *IEEE J. Select. Areas Commun*, vol. SAC-1, p. 57-62, January.
- Benedetto S., Biglieri E., Daffara S. (1979). « Modeling and performance evaluation of nonlinear satellite links- A Volterra series approach », *IEEE Tr. on Aerospace Electron. Systems*, vol. AES - 15, n° 4, p. 494-507, July.
- Boyd S., Chua L. O. (1985). « Fading memory and the problem of approximating nonlinear operators with Volterra series », *IEEE Tr. on Circ. and Syst.*, vol. CAS-32, n° 11, p. 1150-1161, November.
- Bro R. (1997). « PARAFAC. Tutorial and applications », *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, vol. 38, p. 149-171.
- Campello R. J. G. B., Amaral W. C., Favier G. (2006). « A note on the optimal expansion of Volterra models using Laguerre functions », *Automatica*, vol. 42, n° 4, p. 689-693.
- Campello R. J. G. B., Favier G., Amaral W. C. (2004). « Optimal expansions of discrete time Volterra models using Laguerre functions », *Automatica*, vol. 40, n° 5, p. 815-822.
- Cardoso J. F. (1990). « Eigen-structure of the fourth-order cumulant tensor with application to the blind source separation problem », *Proc. Int. Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, Albuquerque, New Mexico, USA, p. 2655-2658, 3-6 April.
- Cardoso J. F. (1991). « Super-symmetric decomposition of the fourth-order cumulant tensor. Blind identification of more sources than sensors », *Proc. Int. Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, Toronto, Ontario, Canada,, p. 3109-3112, 14-17 May.
- Carroll J., Chang J. J. (1970). « Analysis of individual differences in multidimensional scaling via an N-way generalization of "Eckart-Young" decompositions », *Psychometrika*, vol. 35, p. 283- 319.
- Cheng C. H., Powers E. J. (2001). « Optimal Volterra kernel estimation algorithms for a nonlinear communication system for PSK and QAM inputs », *IEEE Tr. on Signal Processing*, vol. 49, n° 1, p. 147-163, January.
- Chon K. H., Holstein-Rathlou N. H., Marsh D. J., Marmarelis V. Z. (1998). « Comparative nonlinear modeling of renal autoregulation in rats: Volterra approach versus artificial neural networks », *IEEE Tr. Neural Networks*, vol. 9, n° 3, p. 430-435, May.
- Comon P., Golub G., Lim L.-H., Mourrain B. (2008). « Symmetric tensors and symmetric tensor rank », *SIAM J. on Matrix Analysis and Appl.*, vol. 30, n° 3, p. 1254-1279.
- da Rosa A., Campello R. J. G. B., Amaral W. C. (2007). « Choice of free parameters in expansions of discrete-time Volterra models using Kautz functions », *Automatica*, vol. 43, n° 6, p. 1084-1091.

- de Almeida A. L. F., Favier G., Mota J. C. M. (2007). « PARAFAC-based unified tensor modeling for wireless communication systems with application to blind multiuser equalization », *Signal Processing*, vol. 87, n° 2, p. 337-351, Feb., 2007.
- de Almeida A. L. F., Favier G., Mota J. C. M. (2008). « Constrained tensor modeling approach to blind multiple-antenna CDMA schemes », *IEEE Tr. on Signal Proc.*, vol. 56, n° 6, p. 2417-2428, June.
- de Almeida A. L. F., Favier G., Mota J. C. M. (2009a). *Multiuser MIMO systems using STFMA PARAFAC tensor modeling*, Springer, chapter 11 of "Optimizing wireless communication systems", Ed. Cavalcanti, F. R. P., Andersson, S., p. 421-457.
- de Almeida A. L. F., Favier G., Mota J. C. M. (2009b). « Space-time spreading-multiplexing for MIMO wireless communication systems using the PARATUCK-2 tensor model », *Signal Processing*, vol. 89, p. 2103-2116.
- de Lathauwer L., Castaing J., Cardoso J. F. (2007). « Fourth-order cumulant-based blind identification of underdetermined mixtures », *IEEE Tr. on Signal Proc.*, vol. 55, n° 6, p. 2965-2973, June.
- Dogançay K., Tanrikulu O. (2001). « Adaptive filtering algorithms with selective partial updates », *IEEE Tr. on Circuits and Systems-II: Analog and Digital Signal Processing*, vol. 48, n° 8, p. 762 - 769, Aug.
- Douglas S. C. (1997). « Adaptive filters employing partial updates », *IEEE Tr. on Circuits and Systems-II: Analog and Digital Signal Processing*, vol. 44, n° 3, p. 209-216, March.
- Doyle III F. J., Pearson R. K., Ogunnaike B. A. (2002). « Identification and control using Volterra models », *Springer-Verlag*.
- Dumont G., Fu Y. (1993), « Non-linear adaptive control via Laguerre expansion of Volterra kernels », *Int. J. of Adaptive Control and Signal Processing*, vol. 7, p. 367-382.
- Eun C., Powers E. J. (1997). « A new Volterra predistorter based on the indirect learning architecture », *IEEE Tr. Signal Proc.*, vol. 45, n° 1, p. 223-227, Jan.
- Favier G. (2009). « Nonlinear system modeling and identification using tensor approaches », *10th Int. Conf. on Sciences and Techniques of Automatic control and computer engineering (STA'2009)*, Hammamet, Tunisia, December.
- Favier G., Bouilloc T. (2009a). « Identification de modèles de Volterra basée sur la décomposition PARAFAC », *GRETSI Symp.*, Dijon, France, September.
- Favier G., Bouilloc T. (2009b). « Parametric complexity reduction of Volterra models using tensor decompositions. », *EUSIPCO*, Glasgow, Scotland, August.
- Favier G., Kibangou A. Y., Bouilloc T. (2010). « Nonlinear systems modeling and identification using Volterra-PARAFAC models », *Submitted for publication*.
- Fernandes C. A. R., Favier G., Mota J. C. M. (2009a). « Blind identification of multiuser nonlinear channels using tensor decomposition and precoding », *Signal Processing*, vol. 89, n° 12, p. 2644-2656, December.
- Fernandes C. E. R., Favier G., Mota J. C. M. (2008). « Blind channel identification algorithms based on the PARAFAC decomposition of cumulant tensors: The single and multiuser cases », *Signal Processing*, vol. 88, n° 6, p. 1382-1401, June.
- Fernandes C. E. R., Favier G., Mota J. C. M. (2009b). « PARAFAC -based blind identification of convolutive MIMO linear systems », *Proc. of the 15th IFAC Symp. on System Identification (SYSID)*, Saint-Malo, France, p. 1704-1709, July.

- Ferréol A., Albera L., Chevalier P. (2005). « Fourth-order blind identification of underdetermined mixtures of sources (FOBIUM) », *IEEE Tr. on Signal Proc.*, vol. 53, n° 5, p. 1640-1653, May.
- Frank W. A. (1995). « An efficient approximation to the quadratic Volterra filter and its application in real-time loudspeaker linearization », *Signal Processing*, vol. 45, n° 1, p. 97-113.
- Haber R., Keviczky L. (1999). « Nonlinear system identification. Input-ouput modeling approach. Vol. 1: Nonlinear system parameter identification », *Kluwer Academic Publishers*.
- Hacioglu R., Williamson G. (2001). « Reduced complexity Volterra models for nonlinear system identification », *EURASIP J. on Applied Signal Processing*, vol. 4, p. 257-265.
- Harshman R. (1970). « Foundations of the PARAFAC procedure: models and conditions for an "explanatory" multimodal factor analysis », *UCLA working papers in phonetics*, vol. 16, p. 1-84.
- Harshman R. (1972). « Determination and proof of minimum uniqueness conditions for PARAFAC 1 », *UCLA working papers in phonetics*, vol. 22, p. 111-117.
- Heuberger P. S. C., Van den Hof P. M. J., Bosgra O. H. (1995). « A generalized orthonormal basis for linear dynamical systems », *IEEE Tr. on Automatic Control*, vol. 40, n° 3, p. 451-465.
- Hitchcock F. (1927). « The expression of a tensor or a polyadic as a sum of products », *J. Math. Phys. Camb.*, vol. 6, n° 3, p. 164-189.
- Kajikawa Y. (2008). « Subband parallel cascade Volterra filter for linearization of loudspeaker systems », *EUSIPCO*, Lausanne, Switzerland, September.
- Karfoul A., Albera L., De Lathauwer L. (2008). « Canonical decomposition of even higher order cumulant arrays for blind underdetermined mixture identification », *5th IEEE Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop (SAM'2008)*, Darmstadt, Germany, p. 501-505, July.
- Khouaja A., Favier G. (2004). « Identification of PARAFAC-Volterra cubic models using an alternating recursive least squares algorithm », *EUSIPCO*, Vienna, Austria, p. 1903-1906, September.
- Kibangou A. Y., Favier G. (2009a). « Blind equalization of nonlinear channels using tensor decompositions with code/space/time diversities », *Signal Processing*, vol. 89, n° 2, p. 133-143, February.
- Kibangou A. Y., Favier G. (2009b). « Identification of Parallel-cascade Wiener systems using joint diagonalization of third-order Volterra kernel slices », *IEEE Signal Proc. Letters*, vol. 16, n° 3, p. 188-191, March.
- Kibangou A. Y., Favier G. (2009c). « Tensor-based identification of the structure of block-oriented nonlinear systems », *Proc. of the 15th IFAC Symp. on System Identification (SYSID)*, Saint-Malo, France.
- Kibangou A. Y., Favier G., Hassani M. M. (2005a). « Laguerre-Volterra filters optimization based on Laguerre spectra », *EURASIP J. on Applied Signal Processing*, vol. 17, p. 2874-2887.
- Kibangou A. Y., Favier G., Hassani M. M. (2005b). « Selection of generalized orthonormal bases for second-order Volterra filters », *Signal Processing*, vol. 85, p. 2371-2385.

- Kibangou A. Y., Favier G. (2010). « Tensor analysis-based model structure determination and parameter estimation for block-oriented nonlinear systems ». *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, Special issue on Model Order Selection in Signal Processing Systems, vol. 4, p. 514-525.
- Korenberg M. J. (1991). « Parallel cascade identification and kernel estimation for nonlinear systems », *Annals of Biomedical Eng.*, vol. 19, p. 429-455, 1991.
- Korenberg M. J., Hunter I. W. (1986). « The identification of nonlinear biological systems: LNL cascade models », *Biological Cybernetics*, vol. 55, p. 125-134.
- Korenberg M. J., Hunter I. W. (1996). « The identification of nonlinear biological systems: Volterra kernel approaches », *Annals of Biomedical Eng.*, vol. 24, p. 250-268.
- Kroonenberg P. M. (2007). *Applied multiway data analysis*, John Wiley & Sons.
- Kruskal J. B. (1977). « Three-way arrays: rank and uniqueness of trilinear decompositions, with application to arithmetic complexity and statistics », *Linear Algebra Applicat.*, vol. 18(2), p. 95-138.
- Kruskal J. B. (1989). « Rank, decomposition and uniqueness for 3-way and N-way arrays », in R. Coppi, S. Bolasco (eds), *Multiway data analysis*, Elsevier, Amsterdam, p. 7-18.
- Lu H., Plataniotis K., Venetsanopoulos A. (2008). « MPCA: multilinear principal component analysis of tensor objects », *IEEE Tr. on Neural Networks*, vol. 19, p. 18-39.
- Mäkilä P. M. (1990). « Approximation of stable systems by Laguerre filters », *Automatica*, vol. 26, n° 2, p. 333-345.
- Maner B. R., Doyle III F. J., Ogunnaike B. A., Pearson R. K. (1996). « Nonlinear model predictive control of a simulated multivariable polymerization reactor using second-order Volterra models », *Automatica*, vol. 32, n° 9, p. 1285-1301.
- Marmarelis V. Z. (1993). « Identification of nonlinear biological systems using Laguerre expansions of kernels », *Annals of Biomedical Engineering*, vol. 21, p. 573-589.
- Marmarelis V. Z. (2004). « Nonlinear dynamic modeling of physiological systems », *IEEE Press, John Wiley & Sons*, 2004.
- Mathews V. J., Sicuranza G. (2000). « Polynomial signal processing », *John Wiley & Sons*.
- Mileounis G., Koukoulas P., Kalouptsidis N. (2009). « Input-output identification of nonlinear channels using PSK, QAM and OFDM inputs », *Signal Processing*, vol. 89, p. 1359-1369.
- Morup M., Hansen L., Arnfred S., Lim L.-H., Madsen K. (2008). « Shift-invariant multilinear decomposition of neuroimaging data », *NeuroImage*, vol. 42, p. 1439-1450.
- Mumolo E., Francescato D. (1993). « Adaptive predictive coding of speech by means of Volterra predictors », *Proc. of IEEE Winter Workshop on Nonlinear digital signal processing*, Tampere, Finland, p. 2.1.4.1-2.1.4.4, January.
- Ninness B., Gustafsson F. (1997). « A unifying construction of orthonormal bases for system identification », *IEEE Tr. on Automatic Control*, vol. 42, n° 4, p. 515-521.
- Redfern A. J., Zhou G. (2001a). « Blind zero forcing equalization of multichannel nonlinear CDMA systems », *IEEE Tr. on Signal Processing*, vol. 49, n° 10, p. 2363-2371, October.
- Redfern A. J., Zhou G. (2001b). « Multichannel and block based precoding methods for fixed point equalization of nonlinear communication channels », *Signal Processing*, vol. 81, p. 1041- 1052.

- Salmi J., Richter A., Koivunen V. (2009). « Sequential unfolding SVD for tensors with applications in array signal processing », *IEEE Tr. on Signal Process.*, vol. 57, n° 2, p. 4719-4733, Dec..
- Sidiropoulos N. D., Bro R. (2000a). « On the uniqueness of multilinear decomposition of N-way arrays », *Journal of Chemometrics*, vol. 14, p. 229-239.
- Sidiropoulos N. D., Bro R., Giannakis G. (2000b). « Parallel factor analysis in sensor array processing », *IEEE Tr. on Signal Processing*, vol. 48, n° 8, p. 2377-2388, Aug.
- Sidiropoulos N. D., Giannakis G., Bro R. (2000c). « Blind PARAFAC receivers for DS-CDMA systems », *IEEE Tr. on Signal Processing*, vol. 48, n° 3, p. 810-823, March.
- Smilde A., Geladi P., Bro R. (2004). *Multi-way analysis*, Chichester, UL, Wiley.
- Tan L., Jiang J. (2001). « Adaptive Volterra filters for active control of nonlinear noise processes », *IEEE Tr. on Signal Processing*, vol. 49, n° 8, p. 1667-1676, August.
- Vasilescu M., Terzopoulos D. (2002). « Multilinear analysis for facial image recognition », *Proc. Int. Conf. Pattern Recognition*, Quebec, PQ, 2, vol. 3, p. 511-514.
- Vasilescu M., Terzopoulos D. (2007). « Multilinear (tensor) image synthesis, analysis and recognition », *IEEE Signal Proc. Magazine*, vol. 24, p. 118-123, Nov.
- Wahlberg B. (1991). « System identification using Laguerre models », *IEEE Tr. on Automatic Control*, vol. 36, n° 5, p. 551-562, May.
- Wahlberg B. (1994). « System identification using Kautz models », *IEEE Tr. on Automatic Control*, vol. 39, n° 6, p. 1276-1282, June.
- Wahlberg B., Mäkilä P. M. (1996). « On approximation of stable linear dynamical systems using Laguerre and Kautz functions », *Automatica*, vol. 32, n° 5, p. 693-708.
- Wiener N. (1958). *Nonlinear problems in random theory*, Wiley, New-York.
- Yu Y., Petropulu A. P. (2008). « PARAFAC-based blind estimation of possibly underdetermined convolutive MIMO systems », *IEEE Tr. on Signal Process.*, vol. 56, n° 1, p. 111-124, Jan.
- Zeller M., Kellerman W. (2007). « Fast adaptation of frequency-domain Volterra filters using inherent recursions of iterated coefficient updates », *EUSIPCO*, Poznan, Poland, p. 1605-1609, September.

Reçu le 1/10/2009
Accepté le 15/05/2010



Gérard Favier est Directeur de recherche au CNRS. Il est diplômé de l'ENSCM (Ecole Nationale Supérieure de Chronométrie et de Micromécanique), Besançon (1973), et de l'ENSAE (Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace), Toulouse (1974), Docteur ingénieur (1977) et Docteur d'État (1981) de l'Université de Nice Sophia Antipolis. Il travaille au Laboratoire I3S (Informatique, Signaux et Systèmes de Sophia Antipolis), dont il a été le directeur de 1995 à 1999. Il a été Chargé de mission à la Direction du CNRS (Département SPI), de 1988 à 1992, membre du Comité National, de 1995 à 2000. Il a dirigé une quarantaine de thèses de doctorat. Il est auteur ou co-auteur d'une cinquantaine d'articles de revues, d'une vingtaine de chapitres d'ouvrages collectifs et d'une centaine de communications dans des congrès internationaux. Ses travaux de recherche actuels portent sur l'étude de nouveaux modèles tensoriels et le développement de nouvelles approches tensorielles pour les systèmes de communication MIMO, ainsi que pour l'identification de systèmes dynamiques non linéaires du type Volterra ou structurés en blocs.



Thomas Bouilloc est diplômé de Polytech'Nice-Sophia en électronique, et titulaire d'un master2 SICOM (Signal Communications Numériques). Il est actuellement doctorant au laboratoire I3S, dans le cadre d'une bourse DGA. Ses travaux de recherche portent sur le développement d'approches tensorielles pour l'identification de systèmes dynamiques non-linéaires d'une part, et pour les systèmes de communication numériques d'autre part.

