

---

# Interpolation par assimilation variationnelle de séquences multimodales d'images satellitaires de l'océan

Silèye O. Ba<sup>1</sup>, Thomas Corpetti<sup>2</sup>, Bertrand Chapron<sup>3</sup>,  
Ronan Fablet<sup>4</sup>

1. Lab-STICC, Université Européenne de Bretagne  
Technopole Brest-Iroise, 29238, Plouzané, France  
sileye.ba@telecom-bretagne.eu

2. CNRS - LIAMA, Chinese Academy of Science  
Haidian District ZhongGuanCun East Road No 95, Beijing 100190, PR China  
thomas.corpetti@inria.fr

3. Laboratoire d'Océanographie Spatiale (LOS), IFREMER  
Technopole Brest-Iroise, 29238, Plouzané, France  
Bertrand.Chapron@ifremer.fr

4. Lab-STICC, Université Européenne de Bretagne  
Technopole Brest-Iroise, 29238, Plouzané, France  
ronan.fablet@telecom-bretagne.eu

---

*RÉSUMÉ. Cet article étudie l'estimation conjointe de données manquantes et de champs de déplacements dans des séquences multimodales d'observations satellitaires géophysiques. La complexité de la tâche est liée au taux élevé de données manquantes (entre 20 % et 90 %) pour des observations journalières de haute résolution et la reconstruction de structures fines en accord avec la dynamique sous-jacente. Nous avons développé une méthode basée sur l'assimilation variationnelle de données pour des séries multimodales et multirésolutions. A l'aide de données synthétiques et de données réelles de la surface océanique, une évaluation numérique et qualitative démontre l'apport de deux composantes-clés du modèle proposé : la fusion d'informations multimodales à partir d'une contrainte géométrique basée sur les structures frontales, et la méthode d'assimilation variationnelle utilisant comme a priori dynamique un modèle d'advection-diffusion. Les expérimentations conduites montrent que de bonnes performances de reconstruction sont obtenues pour les observations hautes résolutions en dépit du pourcentage élevé de données manquantes.*

*ABSTRACT. In this paper we address the problem of missing data interpolation in multi-modal geophysical satellite observation sequences. Main issues relate to the large percentage of missing data, from 20 % to 90 % for daily high-resolution observations; and the requirement for*

*reconstructing fine-scale structures in accordance with the underlying turbulent dynamics. To solve the missing data interpolation problem, a variational data assimilation model is developed. Using synthetic and real ocean surface observations, numerical and qualitative evaluations demonstrate the relevance of two key components of the proposed model: the fusion of multi-modal observations through a geometric front-driven constraint and the proposed variational assimilation setting using an advection-diffusion dynamical prior. Good reconstruction of high-resolution geophysical observation sequences can then be achieved despite high percentage of missing data.*

*MOTS-CLÉS : assimilation variationnelle de données, interpolation de données manquantes, inpainting.*

*KEYWORDS: data assimilation, variational method, missing data interpolation, geophysical tracers dynamics, multimodal interpolation.*

---

DOI:10.3166/TS.29.433-454 © 2012 Lavoisier

### **Extended abstract**

Satellites record observations of multiple terrestrial and ocean parameters at different resolutions. Sea surface temperature (SST), which is the temperature of the thin ocean's upper layer, is a peculiar example. Microwave (MW) radiometry provides low resolution (25 km) observations while infrared (IR) radiometry delivers high resolution SST measurements (5 km). Ocean chlorophyll concentration (CHL) from satellite optical observations, which can be obtained at very high spatial resolution (1 km), is also an important geophysical parameter. It is used to trace the ocean biological production. The geometric structures of ocean CHL concentration are strongly related to that of SST. Ocean SST and CHL concentration are indeed strongly interacting parameters and these mutual interactions can be used for their analysis.

Geophysical satellite observations exploit different modalities e.g., infrared (IR) and optical sensors or micro-wave radiometry (MW) associated with different resolutions. In all cases, they are sensitive to the atmospheric conditions such as cloud coverage or heavy rains. Consequently, large percentage of missing data is expected, high-resolution observations being more affected. Daily missing data are comprised between 20 % and 90 %. Missing data interpolation is then a critical issue. The problem considered in this paper is, provided a temporal sequence of observations with missing data, to estimate the best reconstruction possible. Thus, the considered problem is not constrained by real-time considerations. Operational products mainly rely on statistical optimal interpolation techniques, Kalman filtering or smoothing techniques, or ensemble of Kalman filters. These techniques require processing over very large covariance matrices, and assume statistical stationarity, Gaussianness and linearity of the dynamical model that can hardly be verified in real observations. Most missing data interpolation methods generally result in oversmoothed reconstructions where fine-scale structures are lost. To address the missing data interpolation issue, we propose a variational data assimilation model which, from multi-modal and multi-resolution

geophysical observations, jointly estimates the missing data and the associated transport field driving a dynamical prior. The proposed model embeds two key features: the fusion of multi-modal observations through a geometric front-driven constraint and the proposed variational assimilation setting using an advection-diffusion dynamical prior.

To evaluate the proposed model we followed two protocols. The first one is based on numerically simulated data generated according to the surface quasi geostrophic (SGQ) model. We proceed as follows to simulate multi-resolution observation series with missing data. Given a simulated 100 frames long high resolution tracer sequence, a low-resolution tracer sequence is generated by down-sampling high resolution data. Missing data masks issued from a real observations datasets are applied to generate realistic missing data configurations. Regarding the low-resolution sequence, the missing data mask is issued from REMSS SST data. The high-resolution mask is issued from the METOP SST data (see figure 2). The errors are computed with respect to the high resolution sequence as the average pixel based absolute difference between the ground truth and the estimated geophysical fields. This protocol allows to compute numerical results for the proposed schemes and thus to deliver a rigorous comparison of their performances.

The second experimental protocol involves real geophysical data. We use SST data from the REMSS and the METOP dataset, and raw CHL data from the MERIS datasets. The main goal for this protocol is to qualitatively evaluate the quality of the proposed interpolation methods on real data.

To evaluate the proposed methods, we compare different approaches. First we experiment on schemes which do not consider the dynamical prior, *i.e.* which only rely on observations, then on schemes which exploit a dynamical prior. In both cases we considered various combinations of available observations: methods which consider low-resolution observations, high resolution observations, jointly low and high resolution observations, and schemes which exploit the geometrical coherency constraint.

Conducted experiments demonstrate the relevance of multi-modal observations fusion through the geometric front driven and the dynamical model constraints. Good reconstruction of high-resolution geophysical observation sequences are achieved despite high percentage of missing data.

## 1. Introduction

De nos jours, les satellites permettent une observation multirésolution de plusieurs variables terrestres et océaniques. La température de la surface de l'océan (*sea surface temperature*-SST), qui est la température de la couche superficielle supérieure de l'océan, est un exemple particulier. La radiométrie micro-onde (MW) permet une acquisition d'observations de SST basse résolution (25 km) (Wentz *et al.*, 2000), tandis que la radiométrie infrarouge (IR) délivre des mesures de SST haute résolution (5 km) (Le Borgne *et al.*, 2007). La SST est une observation-clé pour plusieurs types

d'études notamment, la prédiction météorologique, la circulation océanique, les impacts du changement climatique. La SST peut aussi être vue comme un traceur effectif de la dynamique océanique (Ullman, Cornillon, 2000 ; Sukhtame, Pierrehumbert, 2002).

La concentration de chlorophylle (CHL) mesurée à partir d'observations optiques satellitaires, pouvant être obtenue à très haute résolution (1 km), est aussi un paramètre géophysique important. Elle est utilisée comme traceur de la production biologique de l'océan (Zheng, Wei, 2010). Les structures géométriques de la concentration de chlorophylle de l'océan sont fortement liées à celles de la SST. SST et concentration de CHL sont des variables en interactions fortes, et ces interactions mutuelles peuvent être exploitées lors de leur analyse (Belkin *et al.*, 2009 ; Solanki *et al.*, 2003).

Comme mentionné précédemment, l'observation satellitaire utilise différentes modalités, capteurs infrarouges (IR), optiques, ou micro-ondes, associées à différentes résolutions comme illustré dans la figure 1. Dans tous les cas, ces capteurs sont sensibles aux conditions atmosphériques telles que la couverture nuageuse ou les fortes pluies. Par conséquent, les mesures présentent un fort taux de données manquantes. Les observations les plus affectées étant celles qui sont à hautes résolutions. Par exemple, dans la région considérée dans la figure 1, le taux journalier de données manquantes est compris entre 20 et 90 %. Ainsi, l'interpolation de données manquantes est un problème important (Ba *et al.*, 2010 ; Hoyer, Shea, 2007 ; Reynolds, Smith, 1994). Le problème considéré dans cet article<sup>1</sup> est alors, étant donné une série temporelle d'observations comprenant des données manquantes, d'effectuer la meilleure reconstruction possible. Ainsi, la reconstruction en temps réel n'est pas une contrainte considérée.

Pour ce genre de problème, les produits opérationnels sont basés sur les techniques statistiques d'interpolation optimale, du filtrage ou du lissage de Kalman, ou des ensembles de filtres de Kalman (Bertino *et al.*, 2003 ; Hoyer, Shea, 2007 ; Reynolds, Smith, 1994 ; Youzhuan *et al.*, 2008). Ces techniques requièrent la prise en compte de très larges matrices de covariances, et des hypothèses statistiques de stationnarité, gaussiannité, et linéarité du modèle dynamique qui peuvent être difficilement vérifiées pour un problème réel. En général, la plupart des méthodes d'interpolation de données manquantes résultent en des reconstructions lisses où les structures de petites échelles sont perdues. Comme illustré par les observations SST et CHL de la figure 1, un gain de performance de reconstruction peut être espéré par l'utilisation d'information multimodale. Le traitement conjoint d'observations SST multirésolutions doit être bénéfique à l'interpolation de la SST haute résolution étant donné que les observations SST basses résolutions comportent beaucoup moins de données manquantes. De plus, les structures géométriques communes aux observations SST et CHL (voir figure 1) peuvent servir de contrainte additionnelle lors du processus d'interpolation. Le traitement d'information multimodale est une contribution-clé de cet article étant

1. Cet article est une version étendue de l'article de (Ba *et al.*, 2012) présenté lors de la Rencontre Française d'Intelligence Artificielle (RFIA) 2012.

donné que les méthodes de l'état de l'art ne considèrent en général qu'un seul type de modalité.

En vision par ordinateur, les méthodes variationnelles sont largement utilisées pour l'interpolation de données manquantes. Communément appelées *inpainting*, ces méthodes ont pour objectif la suppression de textes, craquelures, ou même d'objets présents dans une image ou séquence d'images (Arias *et al.*, 2009 ; Aujol *et al.*, 2010). Le problème considéré dans cet article est aussi lié à la *super-résolution* où le but est, à partir d'images basses résolutions d'une certaine scène, la reconstruction d'une version haute résolution de la même scène (Babacan *et al.*, 2009 ; Cheung *et al.*, 2007 ; Glasner *et al.*, 2009). Cependant, le problème considéré ici présente une complexité additionnelle :

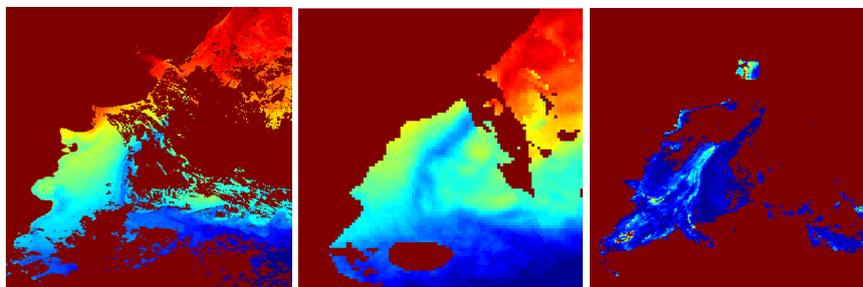
- comparé aux applications traditionnelles de l'*inpainting*, dans notre cas, les observations peuvent présenter de très larges portions de données manquantes rendant la reconstruction de la géométrie spatiotemporelle des traceurs particulièrement difficile ;
- comparé aux problèmes classiques d'*inpainting* et de *super-résolution*, nous considérons des séries d'observations multimodales correspondant à des traceurs qui n'ont en commun que leurs structures géométriques ;
- les traceurs géophysiques sont fortement structurés par le champ turbulent dynamique sous-jacent. L'introduction d'un modèle dynamique modélisant l'évolution temporelle du traceur apparaît comme un facteur-clé permettant de reconstruire un champ temporellement cohérent.

Pour résoudre le problème d'interpolation de données manquantes, nous proposons un modèle d'assimilation variationnelle qui, à partir d'observations multimodales et multirésolutions, estime de façon conjointe les données manquantes et les champs de déplacement régissant l'évolution temporelle des traceurs géophysiques. Les performances du modèle proposé sont évaluées à l'aide de données synthétiques (surface quasi géostrophique - SQG) issues de simulations numériques (Sukhtame, Pierrehumbert, 2002) et de données réelles de SST et CHL.

La suite de cet article est organisée comme suit. La section 2 présente le modèle d'assimilation variationnelle pour l'estimation de données manquantes et du champ de transport associé lorsque ne sont disponibles que les observations d'une seule modalité. La section 3 présente la méthode multimodale d'estimation de données manquantes et des champs de déplacement. La section 4 rapporte les expériences conduites pour la validation du modèle proposé. Finalement, la section 5 donne les conclusions.

## 2. Interpolation de données manquantes pour une série unimodale

Dans cette section, nous supposons disposer d'une séquence d'observations  $Y_t, t \in [t_0, t_f]$  correspondant à la séquence d'états cachés  $\theta_t, t \in [t_0, t_f]$  d'une variable géophysique. Dans notre cas, la variable d'état est soit la SST soit la concentration de



(a) Données IR METOP haute résolution de température de surface océanique (SST) (b) Données de radiométrie MW SST REMSS basse résolution (c) Données optiques MERIS moyenne résolution de concentration de chlorophylle (CHL)

*Figure 1. Observations multimodales multirésolutions de l'océan de la région de Malvinas située au large du Brésil. Les observations METOP sont à une résolution de 5 km, les données REMSS à 25 km, et les données MERIS à 15 km*

CHL. Comme illustré dans la figure 1, les observations  $Y_t$  comprennent des données manquantes. La variable d'état  $\theta_t$  et son observation sont liées par la relation suivante :

$$Y_t = P_t \theta_t + \varsigma_t \quad (1)$$

où  $P_t$  est un opérateur de projection linéaire modélisant la réduction de dimensionnalité de la variable géophysique due à la présence de données manquantes<sup>2</sup>. La variable  $\varsigma_t$  représente un bruit centré, identiquement distribué, et gaussien, avec une matrice de covariance diagonale et sphérique  $\Sigma = \sigma_Y^2 I_d$  où  $I_d$  est la matrice identité et  $\sigma_Y^2$  représente la variance du bruit en chaque pixel. Etant donné que les variables sont des paramètres océaniques, leur évolution temporelle est fortement liée à la dynamique océanique et leur reconstruction doit comprendre un modèle dynamique lié à l'évolution de l'océan. Ainsi, nous considérons un modèle générique d'advection-diffusion défini comme suit :

$$\begin{cases} \partial_t \theta + M(\theta, u) = \eta_t, \text{ où } M(\theta, u) = u \nabla \theta - \kappa \Delta \theta \\ \theta_{t_0} = \theta_0 + \varepsilon \end{cases} \quad (2)$$

où  $\theta_0$  est l'état initial,  $\varepsilon$ ,  $\eta_t$  représentent des variables aléatoires gaussiennes de matrices de covariances diagonales et sphériques  $B = \sigma_B^2 I_d$ ,  $Q = \sigma_Q^2 I_d$  qui modélisent l'incertitude à propos de l'état initial et du modèle dynamique.  $\nabla$  et  $\Delta$  dénotent respectivement les opérateurs gradient et laplacien, et  $\kappa$  représente le paramètre de diffusion.

2. Il est à noter que les images sont représentées sous une forme vectorielle.

Etant donné ce modèle, le problème d'interpolation de données manquantes peut se poser sous la forme de la minimisation du coût variationnel suivant :

$$J(\theta, u) = \|\theta_{t_0} - \theta_0\|_{B^{-1}}^2 + \int_{t_0}^{t_f} E(\theta_t) dt + \int_{t_0}^{t_f} \|\partial_t \theta + M(\theta, u)\|_{Q^{-1}}^2 dt \quad (3)$$

où  $\|\cdot\|_{B^{-1}}$  est la distance de Mahalanobis associée à la matrice de covariance  $B$ , et  $E(\theta)$  est un terme d'attache aux données défini par :

$$E(\theta) = \int_{D(Y^\theta)} \sigma_Y^{-2} (Y^\theta - P\theta)^2 dp + \beta \int_{D(\theta)} \|\nabla \theta\|_2^q dp \quad (4)$$

où  $D$  désigne le domaine de définition de son argument,  $\beta$  est un poids positif pondérant la contribution du terme de régularité dans la fonction coût  $E$ , et  $\|\cdot\|_q$  est la norme  $L^q$  avec  $q = 1$  ou  $2$ .

Il est à remarquer que la minimisation de la fonction coût  $J(\theta, u)$  revient en la détermination de la séquence optimale  $(\hat{\theta}_t, \hat{u}_t)$ ,  $t \in [t_0, t_f]$ , i.e. du traceur optimal  $\hat{\theta}_t$ , et du champ de transport optimal  $\hat{u}_t$  associé. La séquence  $(\hat{\theta}_t, \hat{u}_t)$ ,  $t \in [t_0, t_f]$  possède les propriétés suivantes. Chaque variable d'état estimée est proche de son observation  $Y_t$  aux points où des données sont disponibles à cause du deuxième terme de l'équation (3). L'évolution temporelle de l'état s'effectue sous la contrainte du modèle dynamique (cf. équation (2)) à cause du dernier terme de l'équation (3).

En calcul des variations, une méthode standard pour la résolution d'un problème variationnel est le recours aux équations d'évolution d'Euler-Lagrange. Par exemple, dans le cas statique, la variable géophysique optimale de la fonction coût  $E(\theta)$  (cf. équation (4)) est la valeur stationnaire de l'équation d'Euler-Lagrange  $\partial_t \theta = -\delta_\theta E$  où  $\delta_\theta E$  est l'opérateur tangente linéaire du terme d'attache aux observations<sup>3</sup>. Cependant, pour la minimisation du coût variationnel de l'équation (3), une utilisation directe de l'équation d'Euler-Lagrange est inefficace du fait de la grande dimensionnalité de l'espace d'état. Comme proposé par (Bennett, Thorburn, 1990), une approche indirecte consiste en l'introduction de variables adjointes  $\lambda_t = Q^{-1}(\partial_t \theta + M(\theta, u))$ . Etant donné ces variables, le minimum de la fonction coût (équation (3)) est la solution du système d'équations obtenu en annulant les variations du coût par rapport aux variables désirées  $\theta_t$ ,  $u_t$ , et  $\theta_{t_0}$  :

$$\begin{aligned} \delta_{\theta_t} J &= -\partial_t \lambda + \delta_\theta M^*(\lambda, u) + \delta_\theta E(\theta_t) = 0 \\ \delta_{u_t} J &= \lambda_t \nabla u_t = 0 \\ \delta_{\theta_{t_0}} J &= B^{-1}(\theta_{t_0} - \theta_0) - \lambda_{t_0}^\theta = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

3.  $\langle \delta_\theta E, d\theta \rangle_{L^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E(\theta + h d\theta) - E(\theta)}{h}$ . Voir Annexe A pour plus de détails.

---

**Algorithme 1** Algorithme d'assimilation variationnelle.  $\alpha$  est un paramètre de descente de gradient

---

1 : Pour tout  $t$ , initialiser  $\hat{\theta}_t = \theta_0$ , et  $\hat{u}_t = 0$

2 : Etant donné  $\hat{\theta}_t$  calculer les variables adjointes  $\lambda_t$  à l'aide de l'équation rétrograde :

$$\begin{cases} \lambda_{t_f} = 0 \\ -\partial_t \lambda + \delta_\theta M^*(\lambda, \hat{u}) = -\delta_\theta E(\hat{\theta}_t) \end{cases}$$

3 : Calculer les variations de l'état initial  $d\theta_{t_0} = B\lambda_{t_0}$

4 : Utiliser les variables adjointes pour calculer les variations des états par intégration avant partant des variations de l'état initial  $d\theta_{t_0}$  :

$$\partial_t d\theta + \delta_\theta M(d\theta, \hat{u}) = Q\lambda_t$$

5 : Mettre à jour l'état :  $\begin{cases} \hat{\theta}_t = \hat{\theta}_t + \alpha d\theta_t \\ \hat{u}_t = \hat{u}_t - \alpha \lambda_t \nabla \theta_t \end{cases}$

6 : Retourner à l'étape 2 et itérer jusqu'à convergence.

---

où  $\delta_\theta M$  est la tangente linéaire du modèle dynamique,  $\delta_\theta M^*$  son opérateur adjoint<sup>4</sup>. Dans un processus itératif, la solution du problème variationnel peut être linéarisée autour de l'estimation courante  $\hat{\theta}_t$  comme suit :

$$\begin{aligned} \theta_t &= \hat{\theta}_t + d\theta_t \\ \hat{\theta}_{t_0} &= \theta_0 + d\theta_{t_0}. \end{aligned} \quad (6)$$

La définition de la variable adjointe et les équations (5) et (6) nous donnent :

$$\begin{aligned} d\theta_{t_0} &= B\lambda_{t_0}^\theta \\ \partial_t d\theta + \delta_\theta M(d\theta, u) &= Q\lambda_t \end{aligned} \quad (7)$$

Ainsi, la minimisation du problème de l'équation (3) est résolue de manière itérative. A chaque itération, deux étapes sont mises en œuvre : une intégration rétrograde des variables adjointes prenant en compte le coût variationnel statique (première ligne de l'équation (5)), suivie par une intégration avant des variations des variables prenant en compte les variables adjointes (deuxième ligne de l'équation (7)) (Talagrand, Courtier, 1987 ; Papadakis, Corpetti, Memin, 2007 ; Papadakis, Heas, Memin, 2007). Etant donné les variations, la solution est mise à jour. Le champ de vecteurs de transport  $u$  est mis à jour directement par descente de gradient à l'aide de la troisième ligne de l'équation (5). L'algorithme 1 présente les principales étapes de la procédure d'assimilation variationnelle décrit précédemment.

---

4. L'opérateur adjoint vérifie la relation  $\langle \delta_\theta M(\theta, u), \lambda \rangle_{L^2} = \langle \theta, \delta_\theta M^*(\lambda, u) \rangle_{L^2}$ . Dans le cas d'un opérateur linéaire sur un espace de dimension finie, donc admettant une représentation matricielle, l'opérateur adjoint correspondant admet comme représentation matricielle la transposée de la matrice de l'opérateur initial.

### 3. Interpolation de données manquantes pour une série multimodale

Dans la section précédente, nous avons présenté une méthode d'interpolation de données manquantes dans les observations d'une variable géophysique capturées par une seule modalité. Comme mentionné dans l'introduction, différentes observations d'une variable géophysique issues de plusieurs modalités ou des observations de différentes variables géophysiques sont en général disponibles. Ces observations multiples peuvent être utilisées pour définir une méthode multimodale d'interpolation de données manquantes. L'objectif étant d'améliorer les performances de reconstruction de chaque traceur géophysique. Dans cette étude, nous considérons deux cas, le cas multimodal où des variables différentes sont traitées (exemple : cas SST et CHL), et le cas multirésolution où la même variable observée à différentes résolutions est traitée (exemple : cas SST IR et MW). L'idée de base est que la dynamique océanique sous-jacente contraint les structures de divergence et convergence des traceurs géophysiques. Cela résulte en la formation de structures frontales sur les variables géophysiques passives (Gawarkiewicz, Chapman, 1991). Ainsi, les traceurs passifs présentent localement des structures avec des géométries similaires dans les régions de fronts. Cette propriété est exploitée pour introduire une contrainte additionnelle sur la cohérence géométrique de certaines structures des différents traceurs. Les structures frontales locales peuvent être vues comme les lignes de niveaux des traceurs. Ainsi, la cohérence géométrique locale des différents traceurs impliquent que les différentes lignes de niveaux doivent être localement tangentes. Plus précisément, elles doivent présenter des directions similaires.

*Coût de cohérence géométrique.* Si nous notons les variables d'états par  $\theta_t^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ . Sans perte de généralité, nous supposons que la variable  $\theta_t^{(1)}$  possède une résolution spatiale plus faible et que  $\Lambda$  est un opérateur linéaire de réduction de résolution tel que  $\Lambda\theta_t^{(2)}$  soit une version basse résolution du traceur  $\theta_t^{(2)}$  ayant la même résolution que  $\theta_t^{(1)}$ . Le coût de cohérence géométrique est défini par :

$$G(\theta^{(1)}, \theta^{(2)}) = \int_{D(\theta^{(1)})} g_\tau(|\nabla\theta^{(1)}|) \rho_\epsilon \left( \left\langle \frac{\nabla\theta^{(1)\perp}}{|\nabla\theta^{(1)}|}, \frac{\nabla\Lambda\theta^{(2)}}{|\nabla\Lambda\theta^{(2)}|} \right\rangle \right) dp \quad (8)$$

où  $g_\tau(x) = 1 - e^{-\tau x}$  for  $x > 0$  est une fonction de pondération qui, pour  $x = |\nabla\theta^{(1)}|$ , donne un poids plus fort aux points de fort gradient de la variable  $\theta^{(1)}$ , *i.e.* aux points appartenant aux structures frontales, et des poids faibles aux points localisés dans les régions de faibles gradients. Le paramètre positif  $\tau$  de la fonction  $g_\tau$  définit la magnitude du gradient caractérisant les structures frontales. La fonction  $\rho_\epsilon(s) = \sqrt{s^2 + \epsilon}$ , avec  $\epsilon > 0$ , est une approximation différentiable de la valeur absolue. Le coût de cohérence géométrique défini dans l'équation (8) est minimal lorsque les deux variables ont leurs structures frontales alignées. L'interprétation physique du coût de cohérence géométrique est la suivante. Dans les régions frontales, les deux variables possèdent des structures frontales similaires car les forces (exemple : courants marins) agissant sur le fluide sont fortes. Par contre, loin des structures frontales, les deux variables peuvent présenter des structures géométriques différentes car en l'absence de tout courant dominant, leur évolution est libre.

*Coût multimodal d'attache aux données.* Dans ce cas, nous construisons le coût statique relatif aux observations de la façon suivante. Notons par  $Y_t^{(i)}$ ,  $t \in [t_0, t_f]$ ,  $i = 1, 2$  les séquences d'observations avec données manquantes correspondant aux séquences des variables  $\theta_t^{(i)}$ ,  $t \in [t_0, t_f]$ ,  $i = 1, 2$ . Le coût variationnel est défini par :

$$E_c(\theta^{(1)}, \theta^{(2)}) = E(\theta^{(1)}) + E(\theta^{(2)}) + \gamma G(\theta^{(1)}, \theta^{(2)}) \quad (9)$$

où  $E(\theta)$  est le terme d'attache aux observations défini dans l'équation (4),  $\gamma > 0$  pondère la contribution du coût de cohérence géométrique dans la fonction  $E_c(\theta^{(1)}, \theta^{(2)})$ . Les estimations  $\hat{\theta}^{(1)}$  et  $\hat{\theta}^{(2)}$  minimisant  $E_c(\theta^{(1)}, \theta^{(2)})$  seront similaires à leurs observations aux points où des données sont disponibles à cause des deux premiers termes de l'équation (9). Aussi,  $\hat{\theta}^{(2)}$  va présenter des structures frontales cohérentes aux structures de  $\hat{\theta}^{(1)}$  parce que le coût géométrique est minimal lorsque, pour les deux variables, les lignes de niveaux situées dans les régions de fort gradient sont alignées.

*Coût multirésolution d'attache aux données.* Dans le cas multirésolution, la même variable est observée à plusieurs résolutions. Nous définissons le terme multirésolution d'attache aux données comme suit :

$$E_c(\theta^{(1)}, \theta^{(2)}) = E(\theta^{(1)}) + E(\theta^{(2)}) + \gamma G(\theta^{(1)}, \theta^{(2)}) + \int (\theta^{(2)} - \Lambda\theta^{(1)})^2 dp \quad (10)$$

Le dernier terme de l'équation (10) modélise la relation multirésolution entre les deux variables  $\theta^{(i)}$ .

*Coût variationnel dynamique.* Le modèle conjoint d'observations (équation (9) ou équation (10)) et le modèle dynamique (équation (2)) peuvent être combinés pour définir le coût variationnel dynamique couplé  $\mathcal{J}(\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, u^{(1)}, u^{(2)}) =$

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_f} E_c(\theta_t^{(1)}, \theta_t^{(2)}) dt + \int_{t_0}^{t_f} \|\partial_t \theta^{(1)} + M(\theta^{(1)}, u^{(1)})\|_{Q^{-1}}^2 dt + \dots \quad (11) \\ & \dots + \int_{t_0}^{t_f} \|\partial_t \theta^{(2)} + M(\theta^{(2)}, \Gamma u^{(1)} + u^{(2)})\|_{Q^{-1}}^2 dt. \end{aligned}$$

Ce modèle suppose que la variable basse résolution  $\theta^{(1)}$  est transportée par le champ de vecteurs d'advection  $u^{(1)}$  et la variable haute résolution est transportée par le champ de vecteurs  $\Gamma u^{(1)} + u^{(2)}$ , où  $\Gamma$  est un opérateur linéaire de sur-échantillonnage qui permet de faire passer la variable  $u^{(1)}$  à la dimensionnalité de  $u^{(2)}$ .

Comme dans la section 2, le problème dynamique peut être résolu dans un formalisme d'assimilation variationnelle. D'abord, les deux variables adjointes  $\lambda_t^{(1)} = Q^{-1}(\partial_t \theta^{(1)} + M(\theta^{(1)}, u^{(1)}))$  et  $\lambda_t^{(2)} = Q^{-1}(\partial_t \theta^{(2)} + M(\theta^{(2)}, \Gamma u^{(1)} + u^{(2)}))$  sont introduites. Ensuite, à l'aide des variables adjointes, le calcul des variations du coût dynamique par rapport aux variables d'états conduit à un système d'équations dont la résolution peut être conduite de manière itérative.

---

**Algorithme 2** Assimilation variationnelle pour l'estimation conjointe de données manquantes et de champ de transport pour un couple de variables géophysiques

---

1 : Pour tout  $t$  et  $i = 1, 2$ , initialiser  $\hat{\theta}_t^{(i)} = \theta_0^{(i)}$  et  $\hat{u}_t^{(i)} = 0$

2 : Etant donné les variables d'états, calculer les variables adjointes à l'aide des équations rétrogrades :

$$\begin{cases} \lambda_{t_f}^{(i)} = 0, i = 1, 2 \\ -\partial_t \lambda^{(1)} + \delta_{\theta^{(1)}} M^*(\lambda^{(1)}, \hat{u}^{(1)}) = -\delta_{\theta^{(1)}} E_c(\hat{\theta}_t^{(1)}, \hat{\theta}_t^{(2)}) \\ -\partial_t \lambda^{(2)} + \delta_{\theta^{(2)}} M^*(\lambda^{(2)}, \Gamma \hat{u}^{(1)} + \hat{u}^{(2)}) = -\delta_{\theta^{(2)}} E_c(\hat{\theta}_t^{(1)}, \hat{\theta}_t^{(2)}) \end{cases}$$

3 : Calculer les variations des états initiaux  $d\theta_{t_0}^{(i)} = B\lambda_{t_0}^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$

4 : Calculer les variations des variables d'états  $d\theta_t^{(i)}$  à partir d'intégrations avant partant des variations des états initiaux :

$$\begin{cases} \partial_t d\theta^{(1)} + \delta_{\theta^{(1)}} M(d\theta^{(1)}, \hat{u}^{(1)}) = Q\lambda_t^{(1)} \\ \partial_t d\theta^{(2)} + \delta_{\theta^{(2)}} M(d\theta^{(2)}, \Gamma \hat{u}^{(1)} + \hat{u}^{(2)}) = Q\lambda_t^{(2)} \end{cases}$$

5 : Mettre à jour les états :

$$\begin{cases} \hat{\theta}_t^{(i)} = \hat{\theta}_t^{(i)} + \alpha d\theta_t^{(i)}, i = 1, 2 \\ \hat{u}_t^{(1)} = \hat{u}_t^{(1)} - \alpha \left( \lambda_t^{(1)} \nabla \theta_t^{(1)} + \Gamma^* (\lambda_t^{(2)} \nabla \theta_t^{(2)}) \right) \\ \hat{u}_t^{(2)} = \hat{u}_t^{(2)} - \alpha \lambda_t^{(2)} \nabla \theta_t^{(2)} \end{cases}$$

6 : Retourner à l'étape 2 et itérer jusqu'à convergence.

---

L'algorithme 2 donne les principales étapes de la procédure d'assimilation variationnelle conjointe pour le couple de variables.

#### 4. Expérimentations

Pour évaluer les méthodes présentées dans les sections 2 et 3, l'analyse qualitative d'expérimentations sur des données réelles est associée à une évaluation quantitative sur des données issues de simulations numériques. Nous comparons les performances de différentes approches :

- les schémas qui ne mettent pas *a priori* sur l'évolution temporelle des variables, *i.e.* qui ne se basent que sur les coûts statiques d'attaches aux observations (équation (4), équation (9), équation (10)), sont notés *static*. Les autres schémas qui considèrent un *a priori* dynamique (équation (3)), sont notés *dynamic* ;

- les méthodes qui traitent des observations basses résolutions sont notées *LR*, celles traitant des observations hautes résolutions sont notées *HR*. Les méthodes trai-

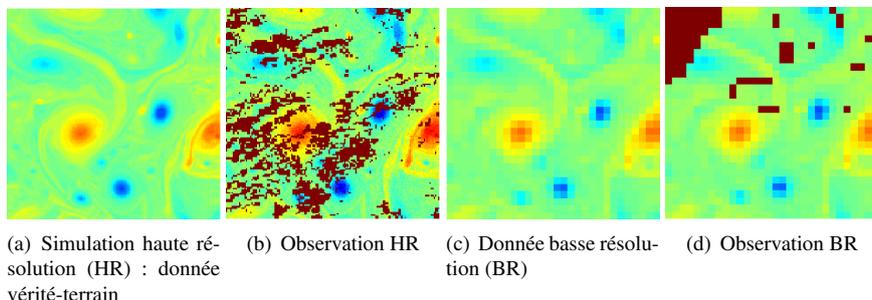


Figure 2. Protocole SQG. L'observation haute résolution est obtenue en cachant des parties de la donnée vérité-terrain par un masque de données manquantes issu de la base de données d'observations SST METOP. L'image basse résolution obtenue en sous-échantillonnant la donnée vérité-terrain à un facteur  $\frac{1}{5}$ . L'observation basse résolution est obtenue en cachant la donnée SQG basse résolution par un masque issu de la base de données SST REMSS

tant conjointement les observations basses et hautes résolutions de la même variable sont notées *MR* ;

– les schémas utilisant la contrainte de cohérence géométrique de l'équation (8) sont notées *MM*. Les méthodes basées sur l'équation (9) sont seulement *MM* (multimodales), tandis que les autres basées sur l'équation (10) sont *MM-MR* (multimodales et multirésolutions).

Il est à noter que les résultats présentés dans cette section sont obtenus avec la méthode de régularisation  $L^2$  (cf. équation (4)).

#### 4.1. Résultats sur les données simulées : protocole SQG

Ce protocole d'évaluation utilise des données de simulation numérique produites à partir du modèle de turbulence SQG (surface quasi geostrophique) (Sukhtame, Pierrehumbert, 2002). Le choix de ce modèle de turbulence est motivé par de récents résultats montrant sa pertinence pour la description de la dynamique océanique (Isern-Fontanet *et al.*, 2006). Ces simulations délivrent des données vérités terrain pour une évaluation quantitative des méthodes proposées dans cet article.

Pour simuler une séquence multirésolution d'observations avec des données manquantes, nous procédons comme suit. Etant donné une séquence simulée sur 100 pas de temps de données hautes résolutions, une séquence basse résolution est générée par sous échantillonnage. Des masques de données manquantes issus de bases de données d'observations réelles sont appliqués aux données de simulation pour créer des configurations de données manquantes réalistes. Les masques de données manquantes basses résolutions sont extraits de la base de données REMSS. Les masques pour les données hautes résolutions sont quant à eux extraits de la base METOP (voir figure 2).

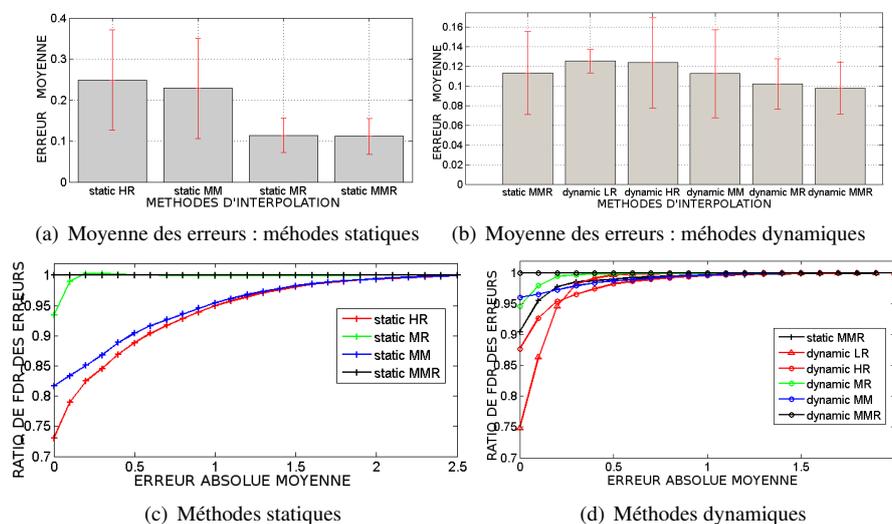


Figure 3. Résultats pour le protocole SQG

Ce protocole est principalement élaboré pour permettre une évaluation quantitative des méthodes proposées et permettre ainsi une comparaison rigoureuse de leurs performances.

La figure 3(a) rapporte les moyennes et écarts types des erreurs d'estimation de données manquantes pour les méthodes statiques. Les erreurs sont calculées par rapport à la séquence de données-vérités hautes résolutions comme la moyenne des déviations absolues entre les données-vérités et les données estimées. Comme nous nous y attendions, la méthode multirésolution (static MR) obtient clairement de meilleures performances que les méthodes qui ne traitent que les données hautes résolutions. Il est aussi à noter que la contrainte de cohérence géométrique n'a apporté que de faibles améliorations par rapport à la méthode qui traite les observations multirésolutions sans considérer de contrainte géométrique.

La figure 3(b) rapporte les statistiques d'erreurs d'interpolation de données manquantes pour les méthodes dynamiques. Les méthodes dynamiques utilisant les observations multirésolutions réalisent de meilleures performances que la meilleure méthode statique (static MM-MR). L'utilisation conjointe d'information multirésolution ainsi que du terme de cohérence géométrique se révèle utile pour l'amélioration des performances d'interpolation.

Nous avons évalué la signifiante statistique des résultats obtenus par les méthodes proposées. L'utilisation d'un test de Kolmogorov-Smirnov, pour cause de non-normalité des distributions d'erreurs, montre que les méthodes dynamic MR et dynamic MM-MR réalisent significativement de meilleures performances pour une  $p$ -value  $p < 0.01$ .

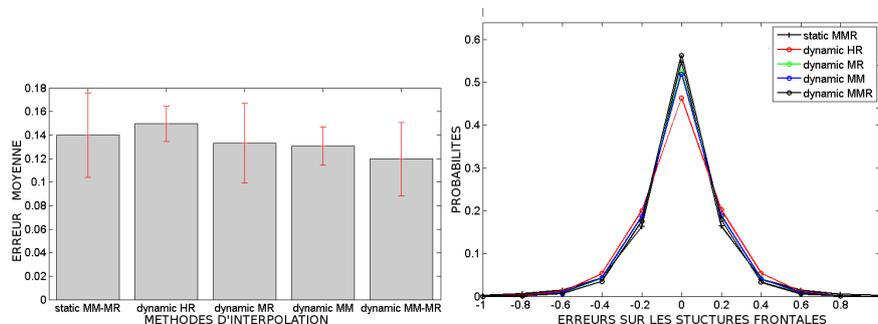


Figure 4. Protocole SQG : erreur de reconstruction des structures géométriques

Ces conclusions sont encore plus illustrées par les figures 3(c) et 3(d) qui présentent les ratios des fonctions de répartition des erreurs de chaque méthode sur la fonction de répartition de la méthode multimodale multirésolution (static MM-MR pour le cas statique et dynamic MM-MR pour le cas dynamique). Les courbes de ces figures doivent être interprétées comme suit, la courbe de la méthode multimodale multirésolution est toujours égale à 1. Pour les autres méthodes, plus la courbe sera proche de 1, meilleure elle sera. Pour les méthodes statiques, la meilleure méthode est la méthode static MM-MR, tandis que la méthode static HR est la moins performante. La courbe des ratios de fonctions de répartition montre que dans toutes les gammes d'erreurs, la méthode statique multimodale (static MM-MR) obtient de meilleures performances que la méthode statique n'utilisant que les observations hautes résolutions (static HR). Ceci démontre l'apport de la contrainte géométrique multimodale. Pour le cas dynamique, la figure 3(d) montre que la meilleure méthode est la méthode dynamic MM-MR qui utilise les observations multirésolutions, et les contraintes géométriques et temporelles. Cette méthode améliore faiblement la méthode dynamique qui n'intègre que l'information multirésolution et temporelle. Un point important à noter à partir de la figure 3(d) est que pour certaines gammes d'erreurs, la méthode static MR réalise de meilleures performances que les méthodes dynamic HR ou dynamic LR. Dans ces cas, l'utilisation d'information multirésolution parvient à compenser l'absence d'information temporelle.

Pour évaluer la qualité de l'interpolation de données manquantes, et spécialement de la reconstruction des structures géométriques, nous rapportons dans la figure 4 les résultats numériques à propos de l'erreur de reconstruction géométrique entre les structures frontales dans les données vérités et les images reconstruites. Ces résultats montrent que les erreurs les plus faibles sont obtenues lors de l'utilisation de la méthode dynamique comprenant la contrainte de reconstruction des structures frontales (dynamic MM et dynamic MM-MR). Cette figure montre aussi, qu'en termes de reconstruction des structures géométriques, la méthode statique multimodale et mul-

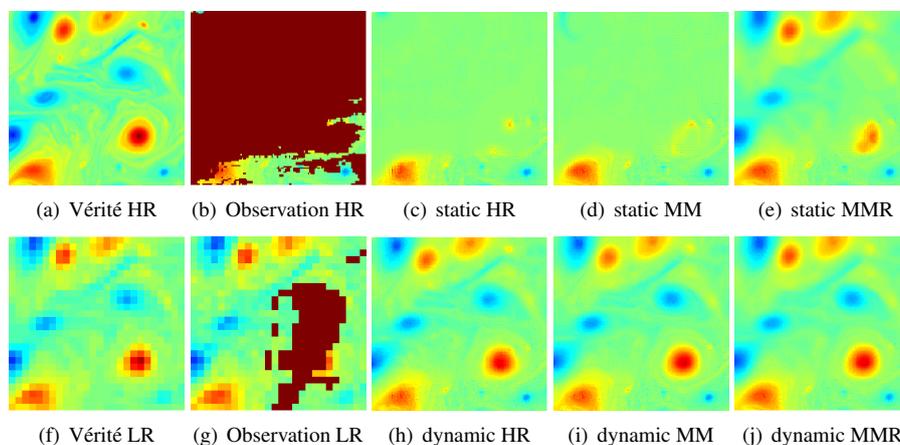


Figure 5. Echantillon de résultats du protocole d'évaluation SQG : observations et résultats d'interpolation de données manquantes

tirésolution réalise de meilleures performances que la méthode dynamique qui utilise seulement les observations hautes résolutions.

Des échantillons de résultats d'interpolation de données manquantes sont présentés dans figure 5. Ces résultats montrent que pour la méthode static HR, lorsque de larges portions de données sont manquantes, les performances de reconstructions sont faibles. Les méthodes static MM et MM-MR améliorent les performances de reconstruction de la méthode static-HR à cause de l'information issue des observations multirésolutions. Cependant, lorsque des données sont conjointement manquantes des observations basses et hautes résolutions, de bonnes performances de reconstruction ne peuvent être obtenues. Dans ces cas, la méthode dynamique réalise de bonnes performances par l'exploitation de l'information introduite par le modèle dynamique. Le modèle dynamique permet de transporter l'information temporellement des régions riches en informations vers les autres régions.

#### 4.2. Résultats sur des données réelles

Le second protocole d'évaluation concerne le traitement de données géophysiques réelles. Nous utilisons des séquences d'observations SST issues des bases de données REMSS et METOP (voir figure 1) pour une évaluation des méthodes proposées sur des observations géophysiques multirésolutions, et des séquences d'observations SST de la base de données REMSS et des séquences d'observations de CHL de la base MERIS pour une évaluation des méthodes sur des observations géophysiques multimodales. Les séquences d'observations SST et concentration de CHL sont échantillonnées à une fréquence temporelle d'une observation par jour. Ces expérimentations permettent de procéder à une évaluation qualitative sur des données réelles des méthodes d'interpolation proposées.

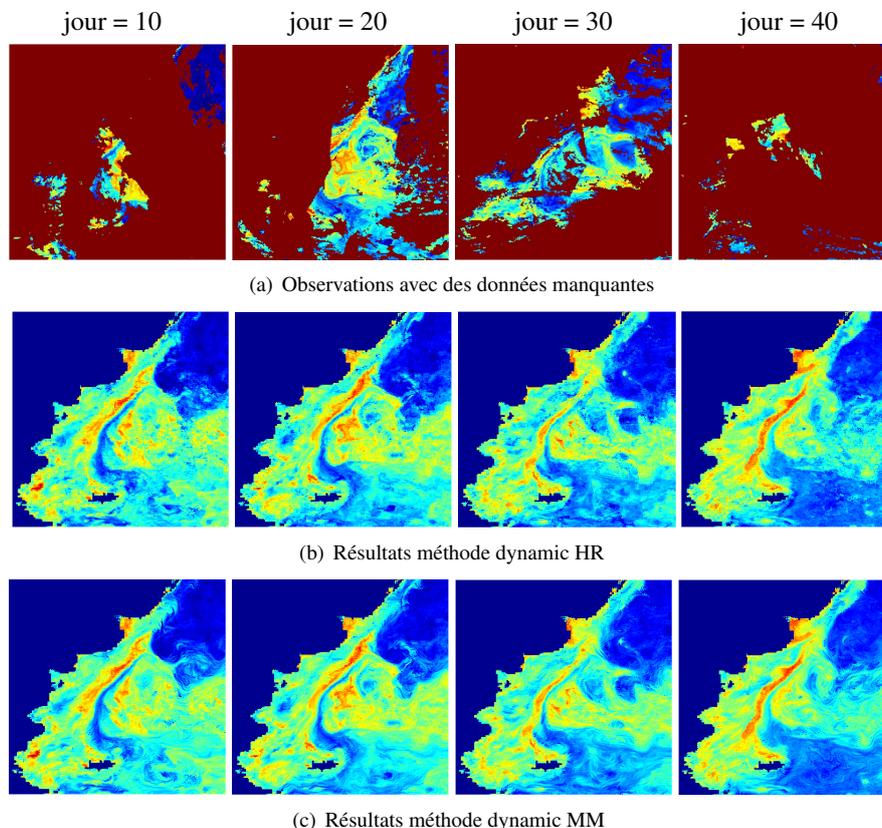


Figure 6. Echantillons de résultats pour l'interpolation de données manquantes d'une séquence d'images de concentration de chlorophylle. Les observations illustrent le taux important de données manquantes

Les figures 6 et 7 présentent des échantillons de résultats d'interpolation : la méthode dynamique utilisant seulement les observations SST hautes résolutions, les observations de concentration de CHL, ou utilisant conjointement les observations SST basses résolutions (REMSS) avec les observations hautes résolutions tout en exploitant la contrainte de cohérence géométrique. Ces résultats montrent clairement le bénéfice de la stratégie multimodale pour recouvrir les structures petites échelles (voir figure 6). Pris tout seul, le modèle d'advection-diffusion ne permet pas la reconstruction des structures filamentaires. Les résultats présentés montrent plutôt une tendance au lissage de la composante texturée de la concentration de CHL. Par contre, l'assimilation conjointe de la SST basse résolution et des observations de CHL permet de reconstruire de façon consistante les structures filamentaires fines échelles.

Pour l'interpolation des données manquantes des observations de SST, la figure 7 rapporte des échantillons de résultats pour les méthodes dynamic HR et dynamic MM-

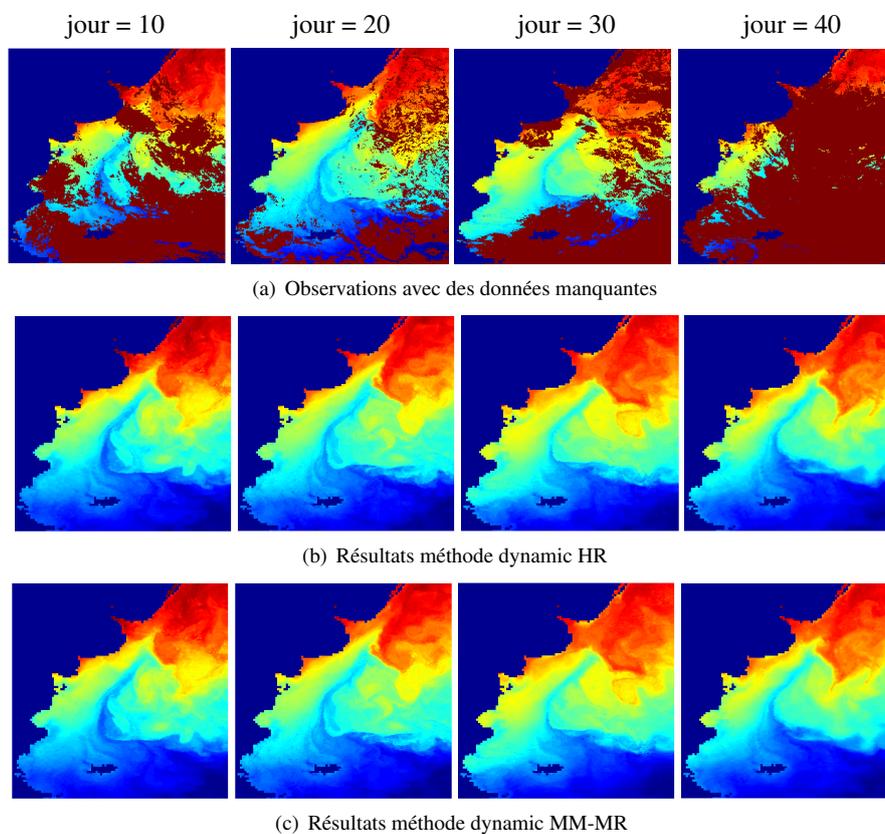


Figure 7. Echantillons de résultats pour l'interpolation de données manquantes d'une séquence de données SST METOP

MR. Les améliorations significatives obtenues pour le traitement des données SQG et CHL n'ont pas été observées pour le traitement de la SST. Une explication possible est le taux de données manquantes qui est plus faible dans les données METOP que dans les observations CHL. En moyenne, les données METOP comprennent 58 % de données manquantes, tandis que le taux moyen de données manquantes dans les données MERIS est de 76 %. Il est aussi à noter que la SST comporte plus de structures grandes échelles que la chlorophylle. Dès lors, l'utilisation des observations basses résolutions suffit à obtenir de bonnes performances de reconstruction.

Cependant les résultats présentés dans la figure 8 montrent l'effet de la contrainte géométrique. L'effet obtenu consiste en une régularisation des champs de SST estimés suivant la direction des structures frontales des champs SST basses résolutions. Ainsi, l'utilisation de la contrainte géométrique conduit à une préservation des propriétés géométriques des structures frontales.

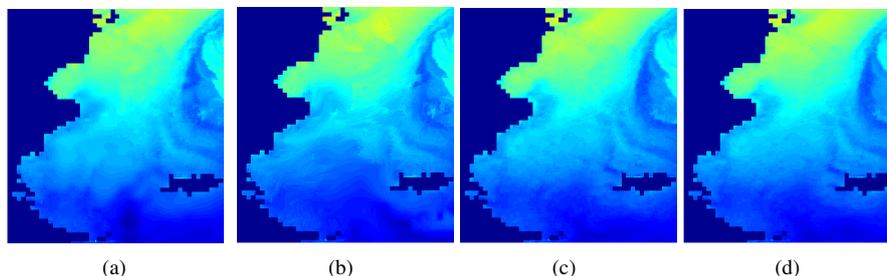


Figure 8. Echantillons de résultats pour l'interpolation de données manquantes dans des observations SST pour les méthodes static HR (8(a)), static MM-MR (8(b)), dynamic HR (8(c)), et dynamic MM-MR (8(d))

## 5. Discussions et conclusions

Dans cet article, nous avons proposé une méthode multimodale multirésolution basée sur l'assimilation variationnelle pour l'estimation de données manquantes et de champs de déplacements dans des séquences d'images géophysiques. La difficulté de la tâche est liée à une présence importante de données manquantes, typiquement entre 20 % et 90 % pour les données hautes résolutions. Ce fort taux de données manquantes rend difficile la reconstruction des structures petites échelles (filaments, vortex). Pour le modèle proposé, nous avons rapporté de bonnes performances de reconstruction pour des données réelles et synthétiques. Le modèle proposé comprend deux caractéristiques principales :

- une contrainte géométrique modélisant les relations entre la géométrie des images hautes résolutions et celle des images basses résolutions ; Etant donné que, du fait de leur mode d'acquisition, les images basses résolutions comportent moins de données manquantes, cette contrainte géométrique est un moyen efficace pour contraindre la structure géométrique des images hautes résolutions ;
- un cadre d'assimilation variationnelle comprenant un modèle dynamique d'advection-diffusion permettant l'estimation conjointe des données manquantes et des champs de déplacements. Ce modèle garantit la cohérence spatiotemporelle des variables reconstruites.

Lorsque les modèles d'observations et dynamiques considérés sont linéaires, et que les modèles de bruit sont gaussiens, les méthodes proposées sont en théorie équivalentes aux méthodes d'interpolation optimale, ou du filtrage de Kalman (Reynolds, Smith, 1994 ; Hoyer, Shea, 2007). Cependant, le modèle proposé comprenant la contrainte sur les structures géométriques est fortement non linéaire. Une équivalence peut être faite avec les méthodes de filtrage de Kalman basées sur la linéarisation des composantes non linéaires du modèle (*extended* ou *unscented Kalman filters*). Cependant, la gestion des matrices de covariance dans des espaces d'états de grandes dimensions est un problème dès lors qu'il s'agit de techniques basées sur le filtrage de Kalman.

En vision par ordinateur, plusieurs approches variationnelles ont été proposées pour résoudre l'inpainting de séquences d'images (Aujol *et al.*, 2010 ; Arias *et al.*, 2009). Contrairement à la tâche en vue dans cet article, ces applications d'inpainting n'ont considéré que des problèmes avec un taux de données manquantes plus faible. De plus, ces méthodes ne font pas usage d'informations complémentaires multimodales ou multirésolutions. Récemment, d'importantes avancées ont été rapportées pour la super-résolution de séquences d'images, notamment des méthodes basées sur des approches par exemplaires (Cheung *et al.*, 2007). Ces méthodes possèdent la capacité de retrouver les structures fines dans des données issues de la vidéo-surveillance. Cependant, il nous semble difficile de les appliquer à des observations de flot de turbulence, alors que des contraintes dynamiques basées sur des modèles géophysiques, comme celles proposées dans cet article, permettent d'introduire l'information *a priori* requise pour la super-résolution de ce type de données. Il est aussi à noter que la contrainte géométrique (équation (9)) partage des similitudes avec les termes de diffusion anisotropique utilisée dans l'inpainting pour la restauration d'images comme présenté dans (Tschumperlé, Deriche, 2005). La contrainte géométrique impose aux lignes de niveaux supportant les gradients de forte magnitude d'être localement tangentes. Dans la méthode d'assimilation variationnelle proposée, cette diffusion orientée est contrainte par les champs de déplacements relatifs au modèle dynamique. Ceci permet d'obtenir une diffusion anisotropique spatiotemporellement consistante.

Les méthodes proposées dans cet article peuvent aussi être analysées du point de vue de la fusion de données étant donné que des informations multimodales sont utilisées pour la reconstruction de données manquantes. Contrairement aux méthodes classiques de fusion de données qui utilisent l'information apportée par valeurs des pixels sous forme de corrélation ou d'information mutuelle (Ji *et al.*, 2003), notre méthode n'utilise que les structures géométriques communes aux modalités traitées. Ainsi, notre méthode ne requiert pas l'existence de corrélations entre les valeurs des pixels des différentes modalités.

Avant nos travaux, d'autres recherches avaient déjà utilisé le cadre de l'assimilation variationnelle pour le traitement de données géophysiques (Papadakis, Corpetti, Memin, 2007 ; Papadakis, Heas, Memin, 2007 ; Gejadze *et al.*, 2006). En particulier, des applications d'estimation de champs de déplacements de mouvement fluide ont été considérées par (Papadakis, Corpetti, Memin, 2007 ; Papadakis, Heas, Memin, 2007). Bien que la tâche principale dans cet article soit l'interpolation de données manquantes, l'estimation conjointe des champs de déplacements sous-jacent est une caractéristique importante de notre approche. Comparée à (Papadakis, Corpetti, Memin, 2007 ; Papadakis, Heas, Memin, 2007), notre approche ne comprend pas l'assimilation du champ de déplacement. La dynamique de la surface océanique montre des caractéristiques d'une dynamique de turbulence (Lapeyre *et al.*, 2006). Selon nous, le modèle dynamique considéré dans (Papadakis, Corpetti, Memin, 2007 ; Papadakis, Heas, Memin, 2007) n'est pas approprié au type de dynamique que nous considérons. En conséquence, durant la reconstruction, nous n'avons pas appliqué ce type de modèle pour éviter un lissage excessif des variables géophysiques. De futurs travaux étudieront l'utilisation de modèles d'évolution de turbulence permettant une recons-

truction préservant les structures aux échelles fines (Sukhtame, Pierrehumbert, 2002 ; Isern-Fontanet *et al.*, 2006).

#### Remerciements

*Les auteurs remercient le Conseil Régional de Bretagne pour sa participation au financement de nos travaux de recherches à travers le projet CREATE FIZO.*

#### Bibliographie

- Arias P., Casselles V., Sapiro G. (2009). A variational framework for non-local image inpainting. *International Conference on Energy Minimization Methods in Computer Vision and Patter Recognition*, vol. 5681, p. 345-358.
- Aujol J.-F., Ladjja S., Masnou S. (2010). Exemplar-based inpainting from a variational point of view. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, vol. 42, n° 3, p. 1246-1285.
- Ba S. O., Corpetti T., Chapron B., Fablet R. (2010). Variational data assimilation for missing data interpolation in SST images. *IEEE International Geoscience And Remote Sensing Symposium*, p. 264-267.
- Ba S. O., Corpetti T., Fablet R. (2012). Interpolation de données manquantes dans des séquences multi-modales d'images géophysiques satellitaires. *Rencontres Francaises d'Intelligence Artificielle (RFIA)*.
- Babacan S., Molina R., Katsaggelos X. (2009). Variational Bayesian super resolution. *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 20, n° 4, p. 984-999.
- Belkin I. M., O'Reilly J. (2009). An algorithm for oceanic front detection in chlorophyll and SST satellite imagery. *Journal of Marine Systems*, vol. 78, n° 3, p. 319-326.
- Bennett A., Thorburn M. (1990). The generalized inverse of a nonlinear quasigeostrophic ocean circulation model. *Journal of Physical and Oceanography*, p. 213-230.
- Bertino L., Evensen G., Wackernagel H. (2003). Sequential data assimilation techniques in oceanography. *International Statistical Review*, vol. 71, n° 2, p. 223-241.
- Cheung V., Frey B. J., Jovic N. (2007). Video epitomes. *International Journal on Computer Vision*, vol. 1, p. 42-49.
- Gawarkiewicz G., Chapman D. (1991). Formation and maintenance of shelfbreak fronts in an unstratified flow. *Journal of physical oceanography*, vol. 21, n° 8, p. 1225-1239.
- Gejadze I., Honnorat M., Dimet F.-X. L., Monnier J. (2006). On variational data assimilation for 1D and 2D fluvial hydraulics. *European Conf. on Mathematics for Industry*, p. 361-365.
- Glasner D., Bagon S., Irani M. (2009). Super-resolution from a single image. *International Conference on Computer Vision*, p. 349-356.
- Hoyer J. L., Shea J. (2007). Optimal interpolation of sea surface temperature for the North Sea and Baltic sea. *Journal of Marine Systems*, vol. 65, n° 1-4, p. 176-189.
- Isern-Fontanet J., Chapron B., Lapyere G., Klein P. (2006). Potential use of microwave sea surface temperatures for the estimation of ocean currents. *Geophys. Research Letter*, vol. 33.
- Ji J., Pan H., Liang Z. (2003). Further analysis of interpolation effects in mutual information-based image registration. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 22, n° 9.

- Lapeyre G., Klein P., Hua B. L. (2006). Oceanic restratification forced by surface frontogenesis. *Journal of Physical Oceanography*, vol. 36, p. 1577-1590.
- Le Borgne P., Legendre G., Marsouin A. (2007). Operational SST retrieval from MetOp/AVHRR. *EUMETSAT Conference*.
- Papadakis N., Corpetti T., Memin E. (2007). Dynamically consistent optical flow estimation. *International Conference on Computer Vision*, p. 1-7.
- Papadakis N., Heas P., Memin E. (2007). Image assimilation for motion estimation of atmospheric layers with shallow-water model. *Asian Conference on Computer Vision*, p. 864-874.
- Reynolds R., Smith T. M. (1994). Improved global sea surface temperature analyses using optimum interpolation. *Journal of Climate*, vol. 7, n° 6, p. 929-948.
- Solanki H. U., Dwivedi R. M., Nayak S., Somvanshi V. S., Gulati D. K., Pattnayak S. K. (2003). Fishery forecast using OCM chlorophyll concentration and AVHRR SST: validation results off Gujarat coast, India. *International Journal of Remote Sensing*, vol. 24, n° 18.
- Sukhtame J., Pierrehumbert R. (2002). Surface quasi geostrophic turbulence: The study of an active scalar. *Chaos*, vol. 12, n° 2.
- Talagrand O., Courtier P. (1987). Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, vol. 113, n° 478, p. 1329-1347.
- Tschumperlé D., Deriche R. (2005). Vector-valued image regularization with PDE's : A common framework for different applications. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 27, n° 4, p. 506-517.
- Ullman D. S., Cornillon P. C. (2000). Evaluation of front detection methods for satellite-derived SST data using in situ observations. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, vol. 17, n° 12, p. 1667-1675.
- Wentz F., Gentemann C., Smith D., Chelton D. (2000). Satellite measurements of sea surface temperature through clouds. *Science*, vol. 288, p. 847-850.
- Youzhuan D., Dongyang F., Zhihui W., Zhihua M., Juhong Z. (2008). Reconstruction of incomplete satellite oceanographic data sets based on EOF and Kriging methods. *Conference on Image and Signal Processing for Remote Sensing*.
- Zheng X., Wei H. (2010). Analysis of chlorophyll concentration during the phytoplankton spring bloom in the Yellow Sea based on the MODIS data. *International Conference on Life System Modeling and Intelligent Computing*, vol. 6330, p. 254-261.

## Annexe A. Dérivée directionnelle du modèle d'observation

L'opérateur tangente linéaire du modèle d'observation défini dans la section 2 par :

$$E(\theta) = \int_{D(Y^\theta)} \sigma_Y^{-2} (Y^\theta - P\theta)^2 dp + \beta \int_{D(\theta)} \|\nabla\theta\|_q^q dp \quad (12)$$

est défini par la formule  $\langle \delta_\theta E, d\theta \rangle_{L^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E(\theta + hd\theta) - E(\theta)}{h}$ .

Si  $q = 2$ , la norme  $L^2$  est  $\|\nabla\theta\|_2 = (\partial_x\theta)^2 + (\partial_y\theta)^2$ . L'opérateur tangente linéaire du modèle d'observation s'écrit alors :

$$\delta_\theta E = -\sigma_Y^{-2} P^* (Y^\theta - P\theta) - \beta \operatorname{div}(\nabla\theta). \quad (13)$$

où  $P^*$  est la transposée de la matrice  $P$ , et  $\operatorname{div}$  est l'opérateur de divergence.

Dans le cas où  $q = 1$ , nous utilisons l'approximation différentiable de la norme  $L^1$  définie par  $\|\nabla\theta\|_1 = \sqrt{(\partial_x\theta)^2 + \epsilon} + \sqrt{(\partial_y\theta)^2 + \epsilon}$  où  $\epsilon$  est un très petit nombre positif ( $10^{-3}$ ). Dans ce cas, la tangente linéaire de l'opérateur d'observation s'écrit :

$$\delta_\theta E = -\sigma_Y^{-2} P^* (Y^\theta - P\theta) - \beta \operatorname{div} \left( \begin{array}{c} \frac{\partial_x\theta}{\sqrt{(\partial_x\theta)^2 + \epsilon}} \\ \frac{\partial_y\theta}{\sqrt{(\partial_y\theta)^2 + \epsilon}} \end{array} \right). \quad (14)$$

Silève O. Ba. *En 2002, il est diplômé du DEA Mathématiques, Vision et Apprentissage (MVA) de l'Ecole Normale Supérieure (ENS) de Cachan. Entre 2003 et mars 2009, en tant que doctorant de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL) puis post-doctorant de l'Institut de Recherche IDIAP (Suisse), il a travaillé sur des méthodes bayésiennes de Monte Carlo pour le suivi d'objets et la reconnaissance d'activités dans des séquences d'images. Depuis mai 2009, il est chercheur postdoctoral au département Signal & Communications (SC) de Télécom Bretagne, Brest, où il travaille sur le développement de méthodes variationnelles pour la modélisation de la dynamique de variables océaniques.*

Thomas Corpetti. *Il a obtenu son doctorat et son habilitation en 2002 et 2011 en traitement du signal et télécommunications. Depuis 2004, il est chercheur au CNRS et a travaillé dans le Laboratoire COSTEL (Climat et Occupation du Sol par TELédétection) à Rennes pendant la période 2004-2009 et au LIAMA (Laboratoire franco-chinois de recherche en Informatique, Automatique et Mathématiques Appliquées) à Beijing entre 2009 et 2012 où il a créé l'équipe franco-chinoise TIPE (turbulence, images, physique et environnement). Depuis octobre 2012, il est directeur de recherche CNRS à l'OSUR (Observatoire des Sciences de l'Univers de Rennes) et ses recherches concernent l'analyse d'images satellites pour des applications environnementales (météorologie, occupation du sol).*

Bertrand Chapron. *Il est chercheur, responsable du Laboratoire d'Océanographie Spatiale de l'Institut Français de Recherche pour l'Exploitation de la Mer (Ifremer). Il possède une expertise en mathématiques appliquées, océanographie physique, physique des capteurs et des applications en télédétection de la surface océanique.*

Ronan Fablet. *Diplômé ingénieur SUPAERO (Ecole nationale supérieure de l'aéronautique et de l'espace, France), en 1997, il obtient une thèse de doctorat en traitement du signal de l'Université de Rennes I au sein de l'INRIA Rennes en 2001. De 2003 à 2007, il est chercheur au sein du département des Sciences et Techniques Halieutiques de l'Ifremer. En 2008, il rejoint le département SC de Télécom Bretagne (ex ENST Bretagne) au sein de l'Institut Mines-Télécom, initialement en tant que Maître de Conférences, et depuis 2012 en tant que Professeur. Ses principaux thèmes de recherche relèvent du traitement du signal et de la vision par ordinateur pour des applications à la télédétection de l'océan.*