Segmentation multi-échelle

Injection d'*a priori* spatial dans la construction d'une hiérarchie optimale de régions

Jean-Pierre Cocquerez, Karim Yousfi

Université de Technologie de Compiègne (UTC)
F-60205 Compiègne
cocquerez@hds.utc.fr

RÉSUMÉ. *Ce travail présente une méthode de construction optimale de hiérarchie de régions avec injection d'*a priori *dans le cadre de la théorie ensemble échelle. Cette approche repose sur la minimisation d'une énergie sous-additive qui intègre un* a priori *spatial.*

ABSTRACT. *This work presents an optimal method of construction of hierarchy of regions with injection of* a priori *within the framework of the scale set theory. This approach is based on the minimization of an under additive energy in which the spatial* a priori *is embedded.*

MOTS-CLÉS : *segmentation multi-échelle, hiérarchie de région, segmentation interactive avec* a priori *spatial.*

KEYWORDS: *multiscale segmentation, hierachy of regions, interactive segmentation with spatial priori.*

DOI:10.3166/TS.28.477-513 © 2011 Lavoisier

Extended abstract

In this article, we propose an innovative approach of construction of hierarchy of regions. The building of the hierarchy is based on an energy model and on an optimal merging process. Our objective is to adapt this hierarchy to the complexity of objects composing the image. To reach this objective, we incorporate a spatial *a priori* which underlines the importance of some objects and structures in the image. In the first part of the article we introduce the multi-scale segmentation paradigm by comparing some existing works. In the second part, some aspects of the Scale-set theory are recalled. In the third part, we present some theoretical aspects of our approach based on the exploitation of a sub additive energy in which we incorporate a spatial energy term. We suggest various ways of building this spatial energy. The last part is devoted to some experimental results.

In a mathematical framework, a set-scale representation is a hierarchy of regions or a monotonous suite of partitions. Most of the existing methods are local and the vertical axe in the hierarchy is not a scale but a level. For this reason we proposed in (Guigues *et al.*, 2006) to represent the image as a hierarchy of regions in which the horizontal cuts are indexed with a scale value or in an other way as a monotonous suite of partitions. The merging process is optimal due to minimization of an energy containing as a classical way, a term of attach to the data and a term of regularization. The energy of regularization is under additive and based on the functional of Mumford-Shah (Mumford *et al.*, 1989) who corresponds to a constant piecewise model of the image. Results are very satisfactory, but we noticed erroneous fusions and premature absorptions (in scale) of relevant structures. These phenomena are understandable because the energies are based on low level attributes and because decisions are local. We thus resolve this problem by injecting a spatial *a priori* by drawing blobs around relevant structures at high scale. This problem was seldom studied within the framework of the multi-scale segmentation. In our model, spatial *a priori* is integrated as a spatial energy into the scale set formalism. This spatial energy has to be sub-additive and is incorporated into the regularization term of the Mumford-Shah formula. We defined three types of spatial energies: i) A mono-potential energy which represents the intensity of the attraction between a region and the blob. This pseudo-attraction will be measured by a potential function of attraction. ii) A multi-potential energy, which, as the mono-potential energy takes into account both the mono-potential energy of the studied region and the energies of the nearby regions. iii) A bi-potential energy based on an attractive intensity between two nearby regions with respect to a blob.

Various experiments have been performed on synthetic and natural images, they illustrate the efficiency and the role of the spatial energy in the hierarchical construction. A spatial energy confers a higher degree of relevance to surrounded objects, their structures resist to the merge processes and persist a longer time in the hierarchy. A top down exploration of the hierarchy allows to find these objects more quickly in cuts containing very few regions (top of the hierarchy). Compared with hierarchy obtained without spatial *a priori*, the spatial *a priori* protect objects inside a blob from fusion with regions outside this blob.

In this article, we are within the framework of an interactive segmentation where blob is manually drawn. We also used our algorithm in a embarked system on an intelligent vehicle including two cameras and a radar. The problem is to correctly segment areas containing pedestrians. The echo received by the radar and the multi-sensor system characteristics are exploited to draw a rectangular blob in the image supplied by one of the cameras. The dimension of the blob is given by the height of a pedestrian computed by taking into account the distance to the obstacle supplied by the radar.

1. Présentation de l'article

Dans cet article, nous proposons une approche novatrice de construction de hiérarchie de régions dont l'objectif est de s'adapter à la complexité des objets composant l'image. Le moyen d'y parvenir est d'intégrer un *a priori* spatial sous la forme d'une énergie sous-additive afin de souligner l'importance de certains objets et structures dans l'image.

Dans la première partie nous abordons la segmentation multi-échelle en comparant un certain nombre de travaux existant. Dans la deuxième partie, nous faisons quelques rappels sur la théorie « Ensemble-Échelle » (Guigues *et al.*, 2006). Dans la troisième partie, nous explicitons plus en détail notre démarche et nous justifions l'importance d'injecter un *a priori* spatial dans l'image. Nous présentons quelques développements théoriques de notre approche basée sur l'exploitation d'une énergie sous additive incorporant l'*a priori* spatial. Nous proposons différentes façons de construire cette énergie spatiale. La dernière partie présente quelques résultats d'expérimentation parmi toutes celles qui ont été menées sur un large panel d'images.

Nous signalons que pour respecter le format de publication dans la revue, nous ne fournissons aucune démonstration des propositions qui apparaissent dans notre développement. Le lecteur intéressé peut les trouver dans (Yousfi, 2008).

2. Segmentation multi-échelle

Un des objectifs de la segmentation d'image est de fournir une description de l'image sous la forme d'une partition de régions au sens ensembliste du terme (Cocquerez *et al.*, 1995). La segmentation multi-échelle repose sur le fait que la finesse de la description (confère la partition) est liée à l'échelle d'analyse et débouche sur une représentation multi-échelle de l'image. Du fait de la dualité « contour-région », on peut en répertorier deux types : la représentation espace échelle (Witkin, 1983) (Koenderink, *et al.*, 1999) et la représentation ensemble échelle (Guigues *et al.*, 2006). La première est « orientée contour », tandis que la deuxième est « orientée région ». Dans les sections suivantes nous rappelons brièvement les propriétés des deux approches.

2.1. Représentation espace échelle

La représentation espace échelle linéaire est une solution de l'équation de la chaleur qui peut être obtenue par convolution avec un noyau gaussien dont la variance constitue l'échelle d'analyse spatiale (Witkin, 1983) (Koenderink, 1984). Ses propriétés sont : l'invariance par translation, rotation et changement d'échelle, le respect du principe de causalité (une transition à une échelle λ_j correspond à une transition à une échelle λ_i, avec $j > i$, autrement dit, il n'y a pas création de transition quand on « monte » en échelle). La description obtenue est volumique 2D + 1D (en échelle). Cependant, il y a deux handicaps : la délocalisation des transitions quand λ augmente, la discrétisation de l'espace des échelles. Cette représentation est riche et volumineuse. À cause de cela, on choisit les échelles pertinentes d'analyse, d'où l'intérêt de posséder des connaissances *a priori* sur l'image à traiter (Lindeberg, 1998).

Nous incluons dans cette section la diffusion anisotropique (Perona *et al.*, 1990) qui est une approche espace échelle non linéaire. En effet, l'équation de la chaleur est résolue avec un réglage local de l'échelle (variance) lié à l'intensité du gradient. L'inconvénient de cette approche est l'absence d'une solution analytique. La résolution de l'équation de la chaleur utilise un schéma numérique où il faut régler le nombre d'itérations. On perd ainsi l'accès facile au paramètre échelle qui existait dans l'approche espace échelle linéaire. Par ailleurs, il faut estimer un seuil.

2.2. Représentation ensemble-échelle

Se réferrant à la définition ensembliste d'une partition, une représentation « ensemble-échelle » (en anglais *scale-set*) est une hiérarchie de régions ou une suite monotone de partitions. De telles représentations sont obtenues classiquement par l'application d'algorithmes de fusion de régions exploitant des prédicats d'agrégation. Ces approches anciennes ont fait l'objet de nombreux travaux, on peut en trouver un exemple dans (Haris *et al.*, 1998). Ces méthodes sont locales et l'indice dans la hiérarchie n'est pas une échelle mais un niveau. C'est la raison pour laquelle Guigue & *al* proposent dans (Guigue *et al.*, 2006) une représentation de l'image sous forme d'une hiérarchie de régions dont les coupes horizontales sont des partitions monotones indicées continument en échelle et optimales au sens d'une énergie affine.

3. Théorie « Ensemble Échelle », rappel de quelques définitions et résultats

Une hiérarchie H peut être représentée par un arbre $\mathcal{T} = (H, \mathcal{E})$, plus communément appelé : dendrogramme (voir Figure 1). Les nœuds de l'arbre $\mathcal{T}$ représentent les régions de la hiérarchie H (la racine de l'arbre $\mathcal{T}$ étant le domaine entier de l'image $\mathcal{D}$), tandis que les arêtes $\mathcal{E}$ de l'arbre $\mathcal{T}$ correspondent à la relation de couverture ($\subset$, i.e l'inclusion stricte) entre les éléments de H. On notera par $\mathcal{F}(x)$ le père d'un nœud x et par $\mathcal{S}(x)$ l'ensemble des nœuds fils du nœud x.

Pour tout nœud x appartenant à la hiérarchie H, le sous ensemble de H définit par $H(x) \triangleq \{y \in H, y \subseteq x\}$ est une hiérarchie sur x, appelée "*hiérarchie partielle*" induite par x, (voir Figure 1).

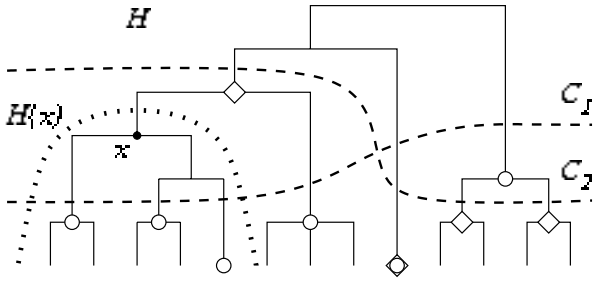


Figure 1. Hiérarchie/dendogramme, coupe, hiérarchie partielle. $H(x)$ est la hiérarchie partielle induite par x. C_1 et C_2 sont deux coupes quelconques qui forment deux partitions distinctes d'éléments de H

Une *coupe* $\mathcal{C}$, dans une hiérarchie H est un sous-ensemble de nœuds de la hiérarchie H formant une partition du domaine $\mathcal{D}$ de l'image.

On appelle un *critère croissant* sur une hiérarchie H toute application $\lambda : H \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall x,y \in H, x \subseteq y \Rightarrow \lambda(x) \leq \lambda(y).$$

Une *hiérarchie indicée* est un couple (H,λ), où H est une hiérarchie et λ est un critère croissant sur H, nul sur ses feuilles. Dans ce cas, le critère λ est appelé *indice*. L'indice de la hiérarchie permet de tracer les nœuds de la hiérarchie H en leur affectant des ordonnées dans la représentation.

Une distance ultramétrique δ sur un ensemble $\mathcal{D}$ est une distance qui vérifie toutes les propriétés classiques d'une distance métrique et une inégalité plus forte que l'inégalité triangulaire :

$$\forall x,y,z \in \mathcal{D} \quad \delta(x,z) \leq max(\delta(x,y),\delta(y,z)).$$

Si (H,λ) est une hiérarchie indicée, alors la fonction $\delta : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$\delta(x,y) = \lambda(\{x\} \vee \{y\}), \tag{1}$$

est une distance ultramétrique sur $\mathcal{D}$ où $\vee$ représente le *supremum* au sens de l'inclusion sur la hiérarchie H.

Le concept d'énergie séparable est utile pour aboutir à un certain nombre de propriétés dans la théorie ensemble échelle. Si on note $E : \mathbb{P}(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ l'énergie d'une partition P. Une énergie E est **séparable**, si et seulement si :

$$E(P) = \sum_{R \in P} E(R).$$

Ces rappels étant faits, examinons quelques résultats importants de la théorie ensemble échelle. Dans l'article (Guigues *et al.*, 2006) nous avons démontré que la coupe optimale $\mathcal{C}^*(x)$ de la hiérarchie $H(x)$ qui minimise l'énergie E séparable peut être obtenue par programmation dynamique grâce à l'existence d'une relation de récurrence.

PROPOSITION 1. — *Soit $\mathcal{C}^*(x)$ la coupe de la hiérarchie partielle $H(x)$ qui minimise l'énergie E,* i.e. *:*

$$\mathcal{C}^*(x) = \underset{\mathcal{C}\in\mathbb{C}(H(x))}{argmin}\ E(\mathcal{C}) = \underset{\mathcal{C}\in\mathbb{C}(H(x))}{argmin} \sum_{y\in\mathcal{C}} E(y).$$

et soit $E^*(x) \triangleq E(\mathcal{C}^*(x))$, alors :

$$\forall x \in H, E^*(x) = inf\left\{E(x), \sum_{y\in\mathcal{S}(x)} E^*(y)\right\} \tag{2}$$

où $\mathcal{S}(x)$ est l'ensemble des nœuds fils de la région x dans la hiérarchie H et $\mathbb{C}(H(x))$ est l'ensemble des coupes.

Ensuite, nous avons considéré une famille d'énergies, appelée *Énergies affines séparables* définie comme suit :

$$E_\lambda(P) = \sum_{R\in P} \lambda C(R) + D(R)$$

tel que D représente un terme d'attache aux données qui exprime la qualité de régression, C représente un terme de régularisation et $\lambda \in \mathbb{R}$ est un paramètre de pondération.

Les deux énergies D et C sont antagonistes. La première exprime la qualité de régression de la partition aux données observées (l'image originale) tandis que la deuxième mesure le degré de complexité de la partition (régularité des frontières, convexité des contours des régions, coût du codage, etc.). Le paramètre λ joue le rôle d'un coefficient de pondération entre les deux énergies. Pour chaque valeur de λ, on peut calculer une partition optimale de la hiérarchie H. Notons par $\mathcal{C}^*_\lambda(H)$ la coupe optimale (appelée λ-*coupe*) de H à l'échelle λ. Par ailleurs, supposons que l'énergie de régularisation C est une énergie décroissante sur l'ensemble des partitions $\mathbb{P}(\mathcal{D})$, *i.e.* :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{P}^2(\mathcal{D}) \quad Q \geq P \Rightarrow C(Q) \subseteq C(P).$$

Cette propriété de décroissance sur l'espace des partitions est équivalente à la propriété de **sous-additivité** de cette énergie sur l'ensemble des régions $\mathcal{P}(\mathcal{D})$, à condition que l'énergie soit séparable, *i.e.* :

$$\forall (R,S) \in \mathcal{P}^2(\mathcal{D}),\ R \cap S = \varnothing \Rightarrow C(R \cup S) \leq C(R) + C(S).$$

Le théorème suivant décrit les conditions nécessaires et suffisantes pour que la famille de coupes $(\mathcal{C}^*_\lambda(H))_{\lambda\in\mathbb{R}}$ forme une séquence croissante de partitions.

THÉORÈME 1. — *Coupes minimales causales*

Soit $E_\lambda = (C, D)$ une énergie affine séparable. Si l'énergie C est sous-additive, alors quelle que soit la hiérarchie H sur $\mathcal{D}$, la séquence $(\mathcal{C}^*_\lambda(H))_{\lambda\in\mathbb{R}}$ des coupes minimales de H pour l'énergie E_λ est une segmentation multi-échelle, en d'autres termes, $(\mathcal{C}^*_\lambda(H))_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est suite monotone de partitions.

On pourra consulter la démonstration de ce théorème dans (Laurent, 2003). La précédente équation récursive (2) est généralisée sous une forme fonctionnelle dans laquelle l'optimisation porte sur des fonctions de λ plutôt que sur une unique valeur d'énergie à échelle fixe :

$$\forall x \in H, \quad E^*_x = inf\left\{E_x, \sum_{s\in\mathcal{S}(x)} E^*_s\right\}, \tag{3}$$

tel que $E_x : \lambda \mapsto E_x(\lambda) = \lambda C(x) + D(x)$ représente l'énergie de la région x, appelée *énergie-propre* et $E^*_x : \lambda \mapsto E^*_x(\lambda) = E^*_\lambda(H(x))$ représente l'énergie de ses coupes minimales, appelée *énergie-partielle* de la région x.

Cette équation de programmation dynamique fonctionnelle peut se réécrire d'une autre manière :

$$E^*_x(\lambda) = \begin{cases} \sum_{s\in\mathcal{S}(x)} E^*_s & \text{si } \lambda < \lambda^+(x) \\ E_x & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4}$$

Nous avons également les propriétés suivantes :

Une région $\{x\}$ devient la partition optimale quand l'échelle passe au dessus d'une valeur $\lambda^+(x)$. Le saut qui survient à l'échelle $\lambda^+(x)$ correspond alors à la fusion des régions filles du nœud $\{x\}$. L'énergie-propre de x est une fonction affine, non-décroissante et concave, il en est de même pour l'énergie optimale $E^*_x(\lambda)$ de x.

L'échelle à partir de laquelle la région $\{x\}$ devient optimale est unique et peut être calculée en résolvant l'équation suivante :

$$E_x(\lambda) = \sum_{s\in\mathcal{S}(x)} E^*_s(\lambda).$$

où $S(x)$ est l'ensemble des noeuds fils de x.

Ainsi, la fonction E^*_x, qui fournit les énergies des coupes optimales de $H(x)$ en fonction du paramètre λ, est une simple fonction affine par morceaux. Elle peut être explicitement mémorisée pour chaque nœud de la hiérarchie H.

Nous avons noté :

$$\lambda^+(x) = \left\{\lambda, E_x(\lambda) = \sum_{s\in\mathcal{S}(x)} E^*_s\right\}, \tag{5}$$

est l'échelle d'apparition de la région x et par :

$$\lambda^-(x) = \min_{y \in H, x \subset y} \{\lambda^+(y)\}, \tag{6}$$

l'échelle de disparition de x. Une étape d'élagage permet d'obtenir la hiérarchie finale :

$$H^* \triangleq H - \left\{x \in H | \lambda^+(x) \leq \lambda^-(x)\right\}. \tag{7}$$

Ainsi, le couple (H^*, λ^+) est une hiérarchie indicée où l'échelle d'apparition des régions joue le rôle d'indice.

$$\Lambda(x) = [\lambda^+(x), \lambda^-(x)[\tag{8}$$

l'*intervalle de persistance* de la région x et la quantité :

$$\Delta\lambda(x) = \lambda^-(x) - \lambda^+(x) \tag{9}$$

désignera la *persistance* de la région x.

Dans (Guigues *et al.*, 2006), on établit la propriété importante suivante qui permet de construire la hiérarchie et d'expliquer le comportement de la méthode.

PROPOSITION 2. — *L'échelle d'apparition d'une région x est donnée par*

$$\lambda^+(x) = -\frac{D(x) - D(P)}{C(x) - C(P)}, \tag{10}$$

où P représente la partition optimale de la hiérarchie partielle de la région x.

4. Théorie « Ensemble Échelle » avec injection d'*a priori*

4.1. Importance de l'injection d'un a priori

Dans (Guigues *et al.*, 2006) nous avons utilisé comme énergie de régularisation sous additive, la fonctionnelle de Mumford-Shah (Mumford *et al.*, 1989) qui correspond à un modèle « constant par morceaux » de l'image. Bien que, dans l'ensemble, les résultats obtenus soient très satisfaisants, nous avons constaté des fusions aberrantes et l'absorption précoce (en échelle) de structures pertinentes à haute échelle. Ces phénomènes s'expliquent par le fait que les énergies sont basées sur des attributs de « bas niveau » et que les décisions sont locales. Nous proposons donc de corriger l'inadaptation du modèle en injectant un *a priori* spatial sous forme de blobs qui entoureront les structures pertinentes à haute échelle. Ce problème a été très peu abordé dans le cadre de la segmentation multi-échelle.

4.2. Présentation de la démarche

L'idée est de construire une énergie spatiale qui évitera la fusion précoce de régions internes au blob avec des régions connexes externes au blob. Nous avons choisi, via cette énergie, de simuler un mécanisme d'attraction entre une région et un blob. Pour respecter les hypothèses de la théorie « ensemble échelle », cette énergie devra être séparable et sous additive. Dans les sous-sections qui suivent, nous présentons un certains nombre de théorèmes et de propositions de la théorie « Ensemble Échelle » avec injection d'*a priori*. Nous fournissons quelques démonstrations en Annexe. Le lecteur pourra trouver l'ensemble des démonstrations dans (Yousfi, 2008).

4.3. Pour une énergie spatiale sous-additive

L'intégration d'une énergie spatiale dans le formalisme « ensemble-échelle » exige que celle-ci soit sous-additive (*cf.* théorème 1). L'énergie affine comporte un terme de régularisation qui exprime un *a priori* sur le modèle inféré. Ainsi dans le modèle de Mumford-Shah, l'énergie de régularisation est le périmètre d'une région, afin d'obtenir des partitions aux contours réguliers. On peut utiliser l'énergie de convexité en lieu et place du périmètre afin de privilégier la construction de régions convexes.

5. Modélisation de l'énergie spatiale

Nous envisageons de définir trois types d'énergies spatiales comme le montre la figure 2. L'énergie mono-potentielle représente l'intensité de l'attraction entre la région et un blob. Cette pseudo-attraction sera mesurée par un potentiel entre une région et un blob que l'on définira ultérieurement. À la différence de l'énergie mono-potentielle, l'énergie multi-potentielle prendra en compte l'énergie mono-potentielle de la région étudiée mais également les énergies des régions voisines. L'énergie bi-potentielle d'une région prendra également en compte le voisinage de la région mais elle s'appuiera sur la définition d'une intensité d'attraction entre deux régions voisines relativement à un blob.

Nous proposons que l'énergie spatiale que nous venons d'introduire soit basée sur un ou plusieurs potentiels d'attraction entre une ou des régions et un blob. Nous en avons donc défini plusieurs et étudié leur propriétés en regard de la hiérarchie des contraintes suivantes :

1) sous-additivité,

2) ultra-additivité,

3) supra-additivité,

4) convexité.

Posons quelques définitions.

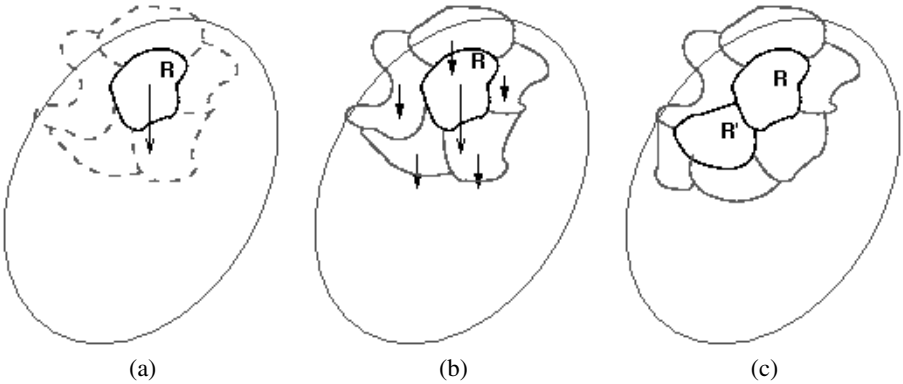


Figure 2. Les trois types d'énergies spatiales :
(a) énergie mono-potentielle, (b) énergie multi-potentielle,
(c) énergie bi-potentielle

Soit $P = \{R_1, \cdots, R_N\}$ une partition de l'image I. L'ensemble des parties sur Ω sera désigné par $\mathcal{P}(\Omega)$ tandis que l'ensemble des partitions sur le support de l'image Ω sera noté $\mathbb{P}(\Omega)$.

La relation d'adjacence entre deux régions R_i et R_j sera notée : $R_i \leftrightarrow R_j$.

On notera $V(R) = \{R' \in P - \{R\} / R' \leftrightarrow R\}$ l'ensemble des régions voisines de la région R dans la partition P.

5.1. Potentiel spatial entre une ou des régions relativement à un blob

DÉFINITION 1. — *On appelle* ***potentiel sous-additif relatif à un blob B*** *toute application* $\delta(.,B) : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *vérifiant les propriétés suivantes :*

– $\forall R \in \mathcal{P}(\Omega), \quad \delta(R,B) \geq 0,$

– $\forall R, R' \in \mathcal{P}(\Omega)$ $t.q$ $R \leftrightarrow R', \quad \delta(R \cup R', B) \leq \delta(R,B) + \delta(R',B).$

De même on peut définir les notions de **potentiels ultra-additif** ou **supra-additif** relatif à un blob **B** :

DÉFINITION 2. — *On appelle* ***potentiel ultra-additif (resp. supra-additif) relatif à un blob B*** *toute application* $\delta(.,B) : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *vérifiant les propriétés suivantes :*

– $\forall R \in \mathcal{P}(\Omega), \quad \delta(R,B) \geq 0,$

– ***Ultra-additivité :*** $\forall R, R' \in \mathcal{P}(\Omega)\ t.q\ \ R \leftrightarrow R'$,

$$\delta(R \cup R', B) \leq \max(\delta(R,B), \delta(R',B)).$$

– ***Supra-additivité :*** $\forall R, R' \in \mathcal{P}(\Omega)\ t.q\ \ R \leftrightarrow R'$,

$$\delta(R \cup R', B) \leq \min(\delta(R,B), \delta(R',B)).$$

REMARQUE. — *Tout potentiel supra-additif est ultra-additif et tout potentiel ultra-additif est un potentiel sous-additif.*

DÉFINITION 3. — *On appelle* ***potentiel convexe relatif à un blob*** **B** *toute application* $\delta(.,B) : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *vérifiant les propriétés suivantes :*

– $\forall R \in \mathcal{P}(\Omega), \quad \delta(R,B) \geq 0,$

– $\forall R_1, R_2 \in \mathcal{P}(\Omega)\ t.q\ \ R_1 \leftrightarrow R_2, \exists \alpha_{1,2} \in]0,1[\quad tel\ que$

$$\delta(R_1 \cup R_2, B) \leq \alpha_{1,2}\delta(R_1,B) + (1-\alpha_{1,2})\delta(R_2,B).$$

REMARQUE. — *Tout potentiel convexe est ultra-additif et par conséquent sous-additif.*

DÉFINITION 4. — *Soit B un blob appartenant au support* Ω *de l'image I. On appelle* ***bi-potentiel sous-additif relativement au blob*** **B** *toute application vérifiant les propriétés suivantes :*

– ***Domaine de définition :***

$$\begin{array}{llll} \delta_B : & \mathcal{P}(\Omega) \times \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & (R,R') & \longmapsto & \delta_B(R,R'), \end{array}$$

– $\forall R, R' \in \mathcal{P}(\Omega), \quad \delta_B(R,R') = 0 \quad si \quad R \nleftrightarrow R'$,

– $\forall R, R' \in \mathcal{P}(\Omega), \quad \delta_B(R,R') > 0 \quad si \quad R \leftrightarrow R'$,

– ***Symétrie*** : $\forall R, R' \in \mathcal{P}(\Omega), \quad \delta_B(R,R') = \delta_B(R',R)$,

– ***Sous-additivité*** : $\forall R, R_1, R_2 \in \mathcal{P}(\Omega) \quad t.q \quad (R_1 \cup R_2) \leftrightarrow R$,

$$\delta_B(R_1 \cup R_2, R) \leq \delta_B(R_1,R) + \delta_B(R_2,R).$$

PROPOSITION 3. — *Soit* $\delta(.,B)$ *un potentiel sous-additif (respectivement ultra-additif, supra-additif) relatif au blob B alors :*

1) $\delta_B(R,R') = \delta(R,B) + \delta(R',B)$ *est sous-additive (respectivement ultra-additive, supra-additive) relativement au blob B.*

2) $\delta_B(R,R') = \delta(R,B).\delta(R',B)$ *est sous-additive (respectivement ultra-additive, supra-additive) relativement au blob B.*

PROPOSITION 4. — *Soit $\delta(.,B)$ un potentiel* ***supra-additif*** *relatif au blob B alors :*

$$\delta_B^+(R,R') = \begin{cases} \delta(R,B) + \delta(R',B) & \text{si } R \leftrightarrow R', \\ 0 & \text{si } R \not\leftrightarrow R'. \end{cases}$$

et

$$\delta_B^\times(R,R') = \begin{cases} \delta(R,B) \times \delta(R',B) & \text{si } R \leftrightarrow R', \\ 0 & \text{si } R \not\leftrightarrow R'. \end{cases}$$

sont des bi-potentiels sous-additifs relativement au blob B.

PROPOSITION 5. — *Soit $\delta_s(.,B)$ un potentiel supra-additif et soit $\delta(.,B)$ un potentiel sous-additif (resp. ultra-additif, convexe) alors l'application $(\delta_s \times \delta)(.,B)$ est également un potentiel sous-additif (resp. ultra-additif, convexe).*

5.2. Énergie spatiale relative à un blob

À l'aide des différents potentiels relatifs à un blob, nous définissons les différentes énergies spatiales relatives à un blob.

5.2.1. Énergie mono/multi-potentielle relative à un blob

L'énergie spatiale mono potentielle relative à un blob B correspond simplement au mono potentiel sous-additif défini précédemment. L'énergie sera qualifiée de *multi-potentielle* si elle prend en compte les potentiels des régions voisines. L'énergie mono-potentielle de la région R correspond donc à l'énergie multi-potentielle pour laquelle le voisinage de R est exclu.

DÉFINITION 5. — *Soit B un blob appartenant au support Ω de l'image I et P une partition quelconque. Soit $\delta(.,R)$ un potentiel sous-additif relatif au blob B. On appelle* ***énergie multi-potentielle relativement au blob B*** *toute application $D(.,B) : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par la relation suivante :*

$$\forall R \in \mathcal{P}(\Omega), \quad D(R,B) = \sum_{R' \in T(R)} \delta(R',B).$$

telle que $T(R) = V(R) \cup \{R\}$ englobe le voisinage de la région R ainsi que la région R elle-même. Dans le cas où $T(R) = \{R\}$ on dira que l'énergie est ***mono-potentielle****.*

PROPOSITION 6. — *Toute énergie multi-potentielle (ou mono-potentielle) relative à un blob B est sous-additive.*

Convexité d'une énergie spatiale relative à un blob

DÉFINITION 6. — *Soit $D(.,B)$ une énergie relative au blob B. On dit que $D(.,B)$ est une énergie convexe si et seulement si* :

$\forall R_1, R_2$ t.q $R_1 \leftrightarrow R_2$, $\exists \alpha_{1,2} \in [0,1]$,

$$D(R_1 \cup R_2, B) \leq \alpha_{1,2} D(R_1,B) + (1-\alpha_{1,2}) D(R_2,B).$$

La constante $\alpha_{1,2}$ dépend des régions R_1 et R_2.

PROPOSITION 7. — *Toute énergie, relative à un blob B,* ***convexe*** *est* ***ultra-additive*** *et par conséquent* ***sous-additive****.*

5.2.2. Énergie bi-potentielle relative à un blob

Nous avons défini précédemment la notion de bi-potentiel sous-additif entre deux régions voisines, relativement à un blob B. L'énergie bi-potentielle d'une région est définie par la somme des bi-potentiels entre cette région et ses régions voisines comme le résume la définition ci-dessous :

DÉFINITION 7. — *Soit B un blob appartenant au support Ω de l'image I et P une partition quelconque. Soit δ_B un bi-potentiel sous-additif relatif au blob B. On appelle* ***énergie bi-potentielle relativement au blob B*** *toute application $D(.,B)$: $\mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par la relation suivante :*

$$\forall R \in \mathcal{P}(\Omega), \quad D(R,B) = \sum_{R' \in V(R)} \delta_B(R,R').$$

tel que $V(R)$ représente le voisinage de la région R.

PROPOSITION 8. — Soit P une partition de l'image I et δ_B un bi-potentiel sous-additif relatif au blob B. Toute énergie bi-potentielle relative à un blob B est sous-additive, *i.e.* :

$$\forall R_1, R_2 \in P \ t.q \ R_1 \leftrightarrow R_2, \quad D(R_1 \cup R_2, B) \leq D(R_1,B) + D(R_2,B).$$

*5.3. Énergie d'*a priori *spatial relativement à un ensemble de blobs*

Ayant défini les énergies d'*a priori* spatial relativement à un blob, nous proposons d'étendre les définitions relativement à un ensemble de blobs $\mathcal{B}$, *i.e.*, relativement à l'image-blob $I_{\mathcal{B}}$. Pour cela, nous considérons le vecteur $\overrightarrow{D_{\mathcal{B}}(R,.)}$ caractérisant les différentes interactions entre la région R et les blobs.

DÉFINITION 8. — *Soit $\mathcal{B} = \{B_1, \cdots, B_M\}$ l'ensemble des blobs tracés dans l'image I et soient $D(.,B_k)$, $k = 1,\ldots,M$, les énergies bi-potentielles sous-additives relatives aux blobs $\left\{B_k\right\}_{k=1,\ldots,M}$. Soit $\|.\|$ la norme issue du produit scalaire $<.,.>$, définie sur l'espace $\mathbb{R}^M$. On appelle* ***énergie spatiale bi-potentielle*** *toute application $D_{\mathcal{B}} : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par :*

$$\forall R \in \mathcal{P}(\Omega), \quad D_{\mathcal{B}}(R) = \|\overrightarrow{D_{\mathcal{B}}(R,.)}\| = \sqrt{< \overrightarrow{D_{\mathcal{B}}(R,.)}, \overrightarrow{D_{\mathcal{B}}(R,.)} >},$$

telle que $\overrightarrow{D_{\mathcal{B}}(R,.)} = \{D(R,B_k)\}_{k=1,\cdots,M}$.

DÉFINITION 9. — *Soit $\mathcal{B} = \{B_1, \cdots, B_M\}$ l'ensemble des blobs issus de l'image I et soient $D(.,B_k)$, $k = 1,\ldots,M$, les énergies multi/mono-potentielles sous-additives relatives aux blobs $\left\{B_k\right\}_{k=1,\ldots,M}$. Soit $\|.\|$ la norme issue du produit scalaire $<.,.>$, définie sur l'espace $\mathbb{R}^M$. On appelle* ***énergie spatiale multi/mono-potentielle*** *toute application $D_{\mathcal{B}} : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par :*

$$\forall R \in \mathcal{P}(\Omega), \quad D_{\mathcal{B}}(R) = \|\overrightarrow{D_{\mathcal{B}}(R,.)}\| = \sqrt{< \overrightarrow{D_{\mathcal{B}}(R,.)}, \overrightarrow{D_{\mathcal{B}}(R,.)} >},$$

telle que $\overrightarrow{D_{\mathcal{B}}(R,.)} = \{D(R,B_k)\}_{k=1,\cdots,M}$.

Ainsi, l'énergie d'une région relativement à l'ensemble des blobs représente l'intensité du vecteur potentiel de la région relativement aux blobs $B_1,\ldots,B_M$. Nous avons montré que la sous-additivité des énergies $D(R,B_k)$,$k = 1,...,M$ (qu'elles soient bi, mono ou multi-potentielles) entraîne la sous-additivité de la norme du vecteur $\overrightarrow{D_{\mathcal{B}}(R,.)}$.

Les deux propositions suivantes étendent donc la définition de l'énergie spatiale $D_{\mathcal{B}}$ à la norme $\mathcal{L}^p$ [1]. Elles posent les conditions supplémentaires pour que l'énergie $D_{\mathcal{B}}$ soit sous-additive :

PROPOSITION 9. — *Si $D(.,B)$ est une énergie bi/mono/multi-potentielle* ***convexe*** *alors l'énergie spatiale « $D_{\mathcal{B}}$ », issue de cette énergie et définie par*

$$D_{\mathcal{B}}(R) = \|\overrightarrow{D_{\mathcal{B}}(R,.)}\|_p^p$$

est convexe pour $p \geq 1$ et par conséquent sous-additive.

PROPOSITION 10. — *Si $D(.,B)$ est une énergie bi/mono/multi-potentielle* ***sous-additive*** *alors l'énergie spatiale « $D_{\mathcal{B}}$ », issue de cette énergie et définie par*

$$D_{\mathcal{B}}(R) = \|\overrightarrow{D_{\mathcal{B}}(R,.)}\|_p$$

est sous-additive pour $p = 1,+\infty$.

DÉFINITION 10. — *Soit $\mathcal{B} = \{B_1, \cdots, B_M\}$ l'ensemble des blobs issus de l'image I et soit $D_{\mathcal{B}}$ une énergie spatiale (mono, multi ou bi-potentielle). Alors l'énergie $D_{\mathcal{B}} : \mathbb{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par :*

$$D_{\mathcal{B}}(P) = \sum_{R \in P} D_{\mathcal{B}}(R),$$

est une énergie séparable et sous-additive par construction.

1. $\|\overrightarrow{x}\|_p^p = \sum_{k=1,\cdots,M} x_k^p$, pour $x \in \mathbb{P}^M$ et $p \geq 1$.

5.4. Construction de potentiels sous-, ultra- et/ou supra-additifs

Nous allons maintenant nous intéresser aux différentes énergies spatiales sous-additives que l'on peut construire à partir de la définition d'un potentiel sous/ultra/supra-additif ou convexe relatif à un blob B.

5.4.1. Potentiel supra-additif

La condition de supra-additivité est plus contraignante que la sous-additivité, la convexité et l'ultra-additivité. Cependant, elle est une condition nécessaire pour la construction d'une énergie bi-potentielle relativement à un blob B.

Avant d'énoncer une condition suffisante pour qu'un potentiel soit supra-additif, nous allons définir des distances qui seront exploitées dans la définition de potentiels.

DÉFINITION 11. — *Soit d une distance métrique définie sur le support Ω de l'image I et c_B le centre de gravité d'un blob B.*

On appellera distance de lien minimum relativement au blob B la distance définie par la relation suivante :

$$d_{min}(R,B) = \min_{x \in R}\{d(x,c_B)\},$$

On appellera distance de lien complet relativement au blob B la distance définie par la relation suivante :

$$d_{max}(R,B) = \max_{x \in R}\{d(x,c_B)\}.$$

PROPOSITION 11. — *Pour R_1 et R_2 deux régions adjacentes et disjointes, on a les propriétés suivantes :*

– $d_{min}(R_1 \cup R_2, B) = \min(d_{min}(R_1,B), d_{min}(R_2,B)$,

– $d_{max}(R_1 \cup R_2, B) = \max(d_{max}(R_1,B), d_{max}(R_2,B)$.

Revenons maintenant aux potentiels.

PROPOSITION 12. — *Tout potentiel $\delta(.,B)$ décroissant au sens de l'ordre d'inclusion est un potentiel supra-additif.*

PROPOSITION 13. — *Soit $\delta_s(.,B)$ un potentiel supra-additif relativement au blob B et soient d_{min} et d_{max} respectivement les distances du lien minimum et du lien maximum relatives au blob B et définies à partir d'une distance métrique d, alors :*

– $\delta_{min}(.,B) = \delta_s(.,B) d_{min}(.,B)$ *est un potentiel supra-additif dit de lien minimum et*

– $\delta_{max}(.,B) = \frac{\delta_s(.,B)}{d_{max}(.,B)}$ *est un potentiel supra-additif dit de lien complet.*

D'autres potentiels supra-additifs peuvent être construits en se basant sur des fonctions autres que $\frac{\beta}{\gamma_0+\gamma_1|R\cap B|}$.

Nous donnons ici une liste qui n'est pas exhaustive :

– $\delta_s(R,B) = \frac{1}{|R||B|}$,

– $\delta_s(R,B) = \frac{|B|}{|R|}$,

– $\delta_s(R,B) = e^{-K.\frac{|R|}{|B|}}$,

– $\delta_s(R,B) = e^{-K\frac{|R\cap B|}{|B|}}$,

– $\delta_s(R,B) = e^{K.|B|-|R|}$.

L'existence de potentiels supra-additifs permet alors de garantir que les bi-potentiels δ_B^+ et $\delta_B^\times$, définis à travers les potentiels cités ci-dessus, seront sous-additifs (*cf.* la proposition 4). Ainsi, par construction, les énergies bi-potentielles spatiales seront par conséquent sous-additives (voir la proposition 5).

5.4.2. La convexité

Nous avons vu que la convexité d'un potentiel entraîne son ultra-additivité et par conséquent sa sous-additivité. Nous allons dans un premier temps nous intéresser aux potentiels dits « convexes », qui permettent aisément la construction d'énergies mono et/ou multi-potentielles sous-additives.

Soit P une partition de l'image I et $\mathcal{B}$ l'ensemble des blobs de cette image. Le premier potentiel simple que l'on peut construire est celui qui représente la proportion d'une région dans un blob B.

$$\forall R \in P, \quad \delta_1(R,B) = \frac{|R\cap B|}{|R|}.$$

Propriétés :

– $\forall R \in P, \quad 0 \leq \delta_1(R,B) \leq 1$,

– Si $R \subseteq B \quad alors \quad \delta_1(R,B) = 1$,

– Si $R \cap B = \emptyset \quad alors \quad \delta_1(R,B) = 0$,

– $\forall R_i, R_j \in P \quad t.q \quad R_i \leftrightarrow R_j$,

$$\delta_1(R_i \cup R_j, B) = \frac{|R_i|}{|R_i|+|R_j|}\,\delta_1(R_i,B) + \frac{|R_j|}{|R_i|+|R_j|}\,\delta_1(R_j,B).$$

DÉFINITION 12. — *Soit d une distance métrique sur $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ issue d'un produit scalaire $< .,. >$. On appelle* ***potentiel attractif relativement au blob*** *B la fonction définie par :*

$$\forall R \in \mathcal{P}(\Omega), \quad \delta_2(R,B) = \beta \frac{d^2(R,B)}{|R|.|B|},$$

où β est une constante qui dépend du blob B et $d(R,B) = d(c_R,c_B)$ représente la distance entre les centres de gravité de la région R et du blob B.

PROPOSITION 14. — *Le potentiel attractif relatif au blob B est convexe et par conséquent sous-additif.*

LEMME 1. — *Soit d une distance métrique sur $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ issue d'un produit scalaire $< .,. >$ alors :*

$$\forall R_i, R_j \quad t.q \quad R_i \leftrightarrow R_j,$$

$$d^2(R_i \cup R_j, B) = \alpha\, d^2(R_i,B) + (1-\alpha)\, d^2(R_j,B) - \alpha(1-\alpha)\, d^2(R_i,R_j),$$

avec $\alpha = \frac{|R_i|}{|R_i|+|R_j|}$.

Il apparaît donc que le potentiel attractif relatif $\delta_2(.,B)$ est sous-additif et peut par conséquent servir à la construction d'une énergie spatiale mono- ou multi-potentielle.

À l'inverse du premier potentiel $\delta_1(.,B)$, le potentiel attractif inclut une distance spatiale entre la région et le blob B. Il se présente sous la forme de l'inverse de la force d'attraction entre deux objets.

Nous allons maintenant établir une forme plus générale de ce potentiel.

DÉFINITION 13. — *On appelle une* ***fonction faiblement sur-additive relativement à un blob*** **B** *toute application $f(.,B) : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant les propriétés suivantes :*

– $\forall R \in \mathcal{P}(\Omega), \quad f(R,B) \geq 0,$

– $\forall R, R' \in \mathcal{P}(\Omega)\ t.q\ R \leftrightarrow R', \quad f(R \cup R', B) \geq \max(f(R,B), f(R',B)).$

PROPOSITION 15. — *Soit B un blob, d une distance métrique issue d'un produit scalaire et f une fonction faiblement sur-additive, alors*

$$\forall R \in \mathcal{P}(\Omega), \quad \delta_2(R,B) = \beta \frac{d^2(R,B)}{f(R,B)},$$

est un potentiel convexe et par conséquent sous-additif relativement au blob B.

PROPOSITION 16. — *Toute fonction additive, sur-additive ou croissante pour l'ordre d'inclusion est une fonction faiblement sur-additive.*

Dès lors, nous pouvons proposer d'autres potentiels convexes (donc sous-additifs) qu'on appellera **pseudo-attractifs** en remplaçant le produit des masses de la région et du blob, $|R| \times |B|$, par une fonction faiblement sur-additive. Dans ce qui suit nous énumérerons des exemples de potentiels sous-additifs « pseudo-attractifs », à partir de fonctions toutes supra-additives en raison de leur croissance ou de leur sur-additivité :

1) pour $f(R,B) = 1$, on obtient $\delta(R,B) = d^2(R,B)$,

2) si $f(R,B) = |R \cup B|$, on obtient $\delta(R,B) = \frac{d^2(R,B)}{|R \cup B|}$,

3) si $f(R,B) = \frac{|R|}{|B|}$, on obtient $\delta(R,B) = \frac{d^2(R,B)}{|R|/|B|}$,

4) …, etc.

LEMME 2. — *L'inverse d'une fonction supra-additive est une fonction faiblement sur-additive et réciproquement.*

Ce lemme dont la démonstration est triviale nous permet alors d'utiliser l'inverse des fonctions supra-additives, définies dans la section précédente, comme fonctions faiblement sur-additives. Pour exemple, nous pouvons citer :

1) $f(R,B) = e^{K \cdot \frac{|R|}{|B|}}$,

2) si $f(R,B) = e^{K \frac{|R \cap B|}{|B|}}$,

3) si $f(R,B) = e^{-(K.|B|-|R|)}$),

4) …, etc.

Tous ces potentiels sous-additifs (car possédant la propriété de convexité) « pseudo-attractifs », peuvent être utilisés dans la construction d'une énergie spatiale sous-additive dont il convient de tester la pertinence. Il en existe d'autres mais nous nous contenterons de ceux cités ci-dessus.

Cadre de blobs elliptiques : distance de Mahalanobis

Dans le cas de blobs elliptiques, tout blob B_k est caractérisé par la longueur de ses axes majeur et mineur : a_k, b_k ainsi que son orientation α_k. Nous pouvons ainsi utiliser la distance de Mahalanobis dans la construction d'un potentiel pseudo attractif.

La distance de Mahalanobis est définie par :

$$d_\Sigma(x,y)^2 = (x-y)^t \Sigma^{-1}(x-y)$$

pour $x, y \in \mathbb{P}^M$.

La norme de Mahalanobis est définie par :

$$\|x\|_\Sigma^2 = x^t \Sigma^{-1} x$$

pour $x \in \mathbb{R}^M$.

Ainsi chaque blob elliptique B_k dans $\mathbb{R}^2$ est caractérisé par sa matrice de covariance $\mathbf{\Sigma_k^{-1}}$ qui s'écrit en fonction de a_k, b_k et α_k comme suit :

$$\mathbf{\Sigma_k^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{\cos^2(\alpha_k)}{a_k^2} + \frac{\sin^2(\alpha_k)}{a_k^2} & -\sin(2.\alpha_k)/2(\frac{1}{a_k^2} - \frac{1}{b_k^2}) \\ -\sin(2.\alpha_k)/2(\frac{1}{a_k^2} - \frac{1}{b_k^2}) & \frac{\sin^2(\alpha_k)}{a_k^2} + \frac{\cos^2(\alpha_k)}{a_k^2} \end{pmatrix}$$

Le potentiel pseudo-attractif d'une région relativement à un blob s'écrirait :

$$\delta_{\Sigma_k^{-1}}(R, B_k) = \beta \frac{d^2_{\Sigma_k^{-1}}(R, B_k)}{f(R, B_k)}$$

tel que $f(R, B_k)$ est une fonction faiblement sur-additive.

5.4.3. La sous-additivité

Comme nous l'avons vu précédemment, une distance métrique issue d'un produit scalaire possède la propriété de convexité. Ceci entraîne la convexité des potentiels étudiés dans la précédente section et par conséquent leur sous-additivité.

Nous allons maintenant présenter une distance sous-additive connue sous le nom de « **distance du cosinus** ».

PROPOSITION 17. — *Soit* $< x, y >= \sum_{i=1,\cdots,M} x_i . y_i$ *le produit scalaire usuel défini sur* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. ***La distance du cosinus relativement au blob B****, définie par :*

$$d_{cos}(R, B) = d_{cos}(c_R, c_B) = \frac{< c_R, c_B >}{\|c_R\| . \|c_B\|}$$

est sous-additive.

PROPOSITION 18. — *Soit B un blob,* $< .,. >$ *le produit scalaire usuel défini sur* $\Omega \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ *et f une fonction faiblement sur-additive, alors*

$$\forall R \in \mathcal{P}(\Omega), \quad \delta_3(R, B) = \beta \frac{d_{cos}(R, B)}{f(R, B)},$$

est un potentiel sous-additif relativement au blob B.

Ainsi la distance du cosinus combinée avec une fonction faiblement sur-additive permet de construire des potentiels sous-additifs qu'on peut aussi assimiler à des potentiels pseudo-attractifs.

5.5. Récapitulatif

Dans les deux précédentes sections nous avons développé une méthode de construction d'une énergie spatiale sur une partition. Cette méthode est ascendante,

elle commence par la définition d'un potentiel d'une région, relativement à un blob, qui mesure l'intensité d'attraction. Nous avons ensuite proposé de définir l'énergie d'une région relativement à un blob de trois différentes manières. Une énergie mono-potentielle mesure uniquement le degré d'attraction entre une région et un blob. Une énergie multi-potentielle mesure l'attraction d'une région à un blob en tenant compte aussi des potentiels des voisins de la région. L'énergie bi-potentielle s'appuie quant à elle sur la définition d'un potentiel d'attraction entre deux régions relativement à un blob. L'énergie de la région est alors la somme des bi-potentiels de la région avec toute région voisine.

Finalement, l'énergie spatiale d'une région $D_{\mathcal{B}}(R)$ est définie par la norme du vecteur des énergies relatives à chaque blob. La convexité d'un potentiel combinée à celle d'une norme nous assure que l'énergie spatiale d'une région est convexe et par conséquent sous-additive. On notera que si le potentiel est uniquement sous-additif alors la norme utilisée dans la définition de l'énergie spatiale d'une région et qui garantit sa sous-additivité est la norme 1 et la norme infini (voir la proposition 10).

6. Résultats

Nous présentons les résultats obtenus sur des images de synthèse et des images réelles. L'analyse des résultats sur images de synthèse permet d'illustrer le comportement de nos nouveaux algorithmes et montre parfaitement le rôle de l'*a priori* spatial. Compte tenu du nombre de possibilités de combinaisons d'énergies et de fonctions potentielles, il était difficile de présenter les résultats de manière exhaustive dans le cadre d'un article. Cette étude détaillée existe dans (Yousfi, 2008). Nous avons donc choisi de présenter les résultats les plus significatifs, sachant que dans la plupart des cas, le choix de la fonction potentielle n'agit pas de manière très significative.

Dans tous les cas, nous avons utilisé comme partition d'initialisation la sur-segmentation obtenue par un algorithme de ligne de partage des eaux. Les représentations ensembles-échelles sans *a priori* spatial seront construites sur la base du modèle constant par morceaux de Mumford-Shah.

Les représentations ensembles-échelles avec *a priori* spatial seront construites en combinant la même énergie radiométrique (écart quadratique) et une énergie spatiale qui peut être mono, multi ou bi-potentielle.

6.1. Cas d'un blob

Nous allons dans un premier temps nous restreindre à un seul objet d'intérêt dans l'image et par conséquent l'*a priori* spatial sera composé d'un seul blob.

6.1.1. Énergie spatiale mono-potentielle

La construction d'une énergie spatiale mono-potentielle nécessite de faire les choix suivants :

1) une distance métrique telle que la distance euclidienne, la distance de Mahalanobis ou la distance du cosinus,

2) une fonction faiblement sur-additive : $|R|.|B|$, $|R \cap B|/|R|$, $e^{K.\frac{|R|}{|B|}}$ ou $e^{K\frac{|R\cap B|}{|R|}}$,

3) une norme pour le vecteur des énergies relatives aux blobs : L^2, L^1 ou L^∞.

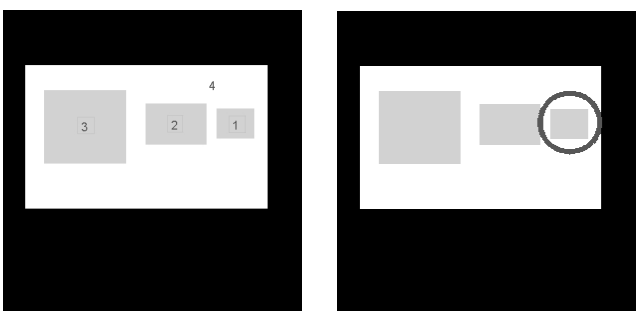
Comme nous l'avons indiqué quelques lignes au dessus, le nombre de combinaisons entre distance, fonction faiblement sur-additive et norme est important et nous ne pourrons pas les explorer toutes. On se limitera à quelques configurations pour tester et analyser le comportement de l'énergie spatiale mono-potentielle.

Nous allons dans un premier temps analyser le comportement de l'énergie spatiale sur une image de synthèse. La figure 3-(a) se compose de trois rectangles de même couleur (qu'on notera g_i, $i = 1,...,3$) et de taille croissante (de droite à gauche). Ces trois rectangles sont englobés dans un grand rectangle de couleur blanche (qu'on notera b). L'image blob est représentée dans la figure 3-(b) où nous avons entouré le plus petit rectangle (g_1) par un blob. Le tableau 1 résume les énergies spatiales calculées sur chacun des rectangles ainsi que les énergies spatiales de l'union de chaque rectangle gris avec le rectangle blanc. Reprenons l'expression de l'échelle d'apparition d'une région x dans l'équation (10) :

$$\lambda^+(x) = -\frac{D(x) - D(P)}{S(x) - S(P)},$$

dans laquelle nous avons remplacé l'énergie de régularisation C par S l'énergie d'*a priori* spatial.

Le dénominateur $\Delta S = S(x) - S(P)$ représente le coût de la fusion au sens de l'énergie spatiale des régions composant la partition P en une seule région x. Plus ce coût est faible et plus l'apparition de la région x est retardée.



(a) (b)

Figure 3. Image de synthèse et image de synthèse avec blob

Le tableau 1 présente les énergies spatiales mono-potentielles des 3 rectangles gris et du rectangle blanc, les énergies de leur union et le coût de chaque fusion. Le coût de la fusion $|\mathbf{\Delta S}(\mathbf{g_1},\mathbf{b})|$ est le plus faible parmi les coûts de fusions possibles entre les rectangles gris et le rectangle blanc. Il y a donc une forte attraction de g_1 (petit rectangle gris g_1 entouré par un blob) vis à vis du blob. Par contre l'énergie spatiale du grand rectangle est la plus forte indiquant une faible attraction entre la région et le blob. La fusion du rectangle g_1 avec le rectangle blanc sera plus fortement pénalisée par rapport aux autres fusions. Par conséquent, l'échelle d'apparition $\lambda^+(g_1)$ du rectangle gris g_1 sera élevée. En conclusion, un coût de fusion spatial faible se traduit par une pénalisation plus forte sur l'apparition de la région tandis qu'un coût de fusion spatial élevé encourage la fusion de la région avec ses régions voisines. Dans le schéma « ensemble-échelle » classique, la première fusion absorbe le plus petit des rectangles gris g_1 avec le rectangle blanc mais avec l'*a priori* spatial le rectangle g_1 fusionnera après la fusion des autres rectangles, g_2 et g_3.

Tableau 1. Différents résultats de calcul de l'énergie spatiale mono-potentielle obtenus sur l'image de synthèse de la figure 3

S			
g_1	g_2	g_3	b
0.633425	60.2683	150.787	80.655

S		
$g_1 \cup b$	$g_2 \cup b$	$g_3 \cup b$
33.6875	78.7556	93.4526

$\mid \mathbf{\Delta S} \mid$		
(g_1, b)	(g_2, b)	(g_3, b)
47.6009	62.1677	137.9894

La figure 4 représente les ensembles-échelles obtenus sur cette image de synthèse. La première colonne représente l'ensemble-échelle obtenu avec l'énergie de Mumford-Shah. Les coupes successives de la hiérarchie sont présentées dans l'ordre inverse des fusions, de haut en bas. On explore la hiérarchie du détail le plus grossier au détail le plus fin. On constate que la construction hiérarchique respecte l'échelle spatiale des rectangles contenus dans l'image. Ainsi le petit rectangle est le premier à disparaître de la hiérarchie, il s'en suit la fusion du rectangle de taille intermédiaire puis celui qui a la taille la plus grande. Ce comportement est tout à fait satisfaisant et conforme au formalisme développé dans (Guigues *et al.*, 2006) à savoir un outil d'analyse en échelle du contenu de l'image. Maintenant, supposons que l'objet d'intérêt principal est le plus petit des rectangles comme le montre l'image-blob 4-(2)-(b). La deuxième colonne représente l'ensemble-échelle obtenu en combinant (*cf.* § 6.1.2) l'énergie radiométrique de Mumford-Shah et l'énergie spatiale mono-potentielle basée sur le potentiel attractif (rapport entre la distance

euclidienne et le produit des surfaces de la région et du blob). On observe, dans ce cas, que le dernier rectangle fusionné est le petit rectangle. À l'exception de ce changement dans l'ordre de fusion, les priorités des fusions sont respectées entre les deux rectangles restant, à savoir dans l'ordre croissant de la taille de l'objet. Dans la dernière colonne, on a encerclé le rectangle de taille moyenne et on relève le même comportement que celui noté sur la première image-blob.

Cet exemple simple montre clairement le rôle de l'énergie spatiale dans la construction hiérarchique. Ainsi, l'utilisation d'une énergie spatiale à la place de l'énergie de régularisation de Munford-Shah confère à un objet circonscrit (par un blob) un degré de pertinence plus élevé. L'énergie élève cet objet dans la hiérarchie des échelles et rend sa fusion avec une autre région plus difficile. Cette énergie permet aussi de se focaliser sur cet objet en fusionnant dans un premier temps les régions qui se trouvent en dehors du blob. En somme, l'énergie bouleverse l'ordre pré-établi de la pertinence des objets. Cet ordre était au départ guidé par la taille des objets, autrement dit par l'échelle spatiale des régions [2].

La figure 5 montre les différentes séquences de partitions obtenues avec une énergie spatiale utilisant une fonction faiblement sur-additive différente à chaque ligne (respectivement dans l'ordre $|R \cap B|/|R|$, $e^{\frac{|R \cap B|}{|R|}}$ et $e^{\frac{|R|}{|B|}}$. Le comportement global est le même que celui relevé dans la figure précédente à savoir l'objet entouré par le blob devient plus pertinent que les objets de taille plus grande. Néanmoins, les deux premiers potentiels pseudo attractifs qui s'écrivent en fonction du degré d'inclusion de la région dans le blob n'attribuent pas d'importance à l'ordre de fusion entre les deux rectangles restants. Les deux objets sont fusionnés en même temps avec leur environnement direct (le rectangle blanc). Un phénomène d'inversion s'est produit lors de l'optimisation finale de l'escalade binaire où l'énergie spatiale n'a pas accordé une priorité plus forte à l'un ou l'autre des deux rectangles.

À présent, nous allons étudier le comportement de cette énergie spatiale sur une image réelle comportant plusieurs objets pertinents. La figure 7 représente une portion d'autoroute dans un centre ville. L'image comporte des objets de différentes tailles : une voiture, une chaussée marquée par des lignes blanches, des panneaux indicateurs. Nous nous sommes focalisés sur le panneau indicateur en haut à droite. 7-(a)-(2) . La première ligne comprend les images originales.

Pour illustrer l'intérêt de l'*a priori* spatial par rapport à l'approche « ensemble-échelle » sans *a priori* avec une énergie de type Mumford-Shah, nous avons comparé dans chaque hiérarchie des coupes horizontales de 20, 40, 60 régions. Les partitions obtenues dans chaque colonne apparaissent dans l'ordre décroissant du nombre de régions de haut en bas de chaque colonne. La première colonne correspond aux résultats obtenus sans *a priori*, la deuxième colonne correspond aux résultats obtenus avec un *a priori* spatial et une énergie spatiale mono-potentielle (attractive) s'appuyant sur la fonction faiblement sur-additive $|R| \cdot |B|$. On constate ainsi dès la première image à 20 régions que l'*a priori* spatial (colonne de droite) permet

2. En toute rigueur, l'approche ensemble-échelle intègre l'échelle spatiale des objets à travers l'énergie d'attache aux données. Elle intègre également l'échelle de l'axe radiométrique (niveaux de gris) dans cette même énergie.

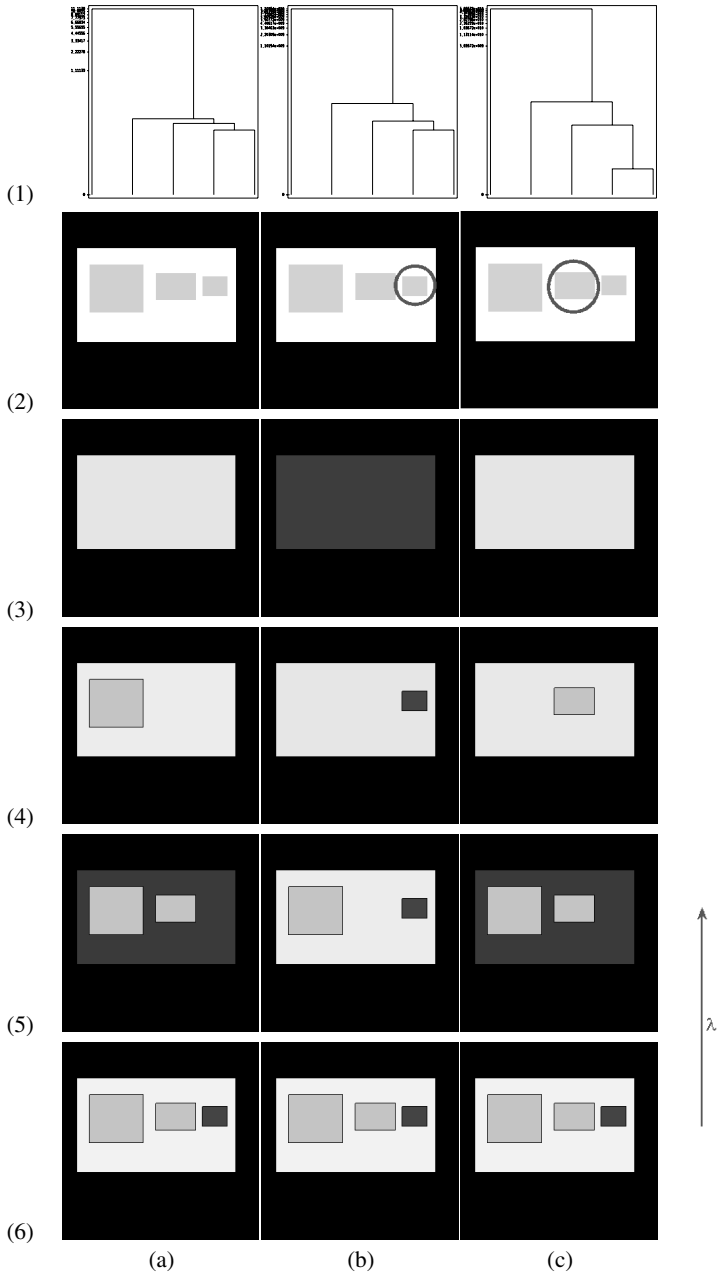


Figure 4. Ensembles-échelles obtenus sur une image de synthèse avec différentes positions de blob : colonne (a) : sans a priori *avec l'énergie de Mumford-shah, colonnes (b) et (c) : avec* a priori *et une énergie spatiale mono-potentielle*

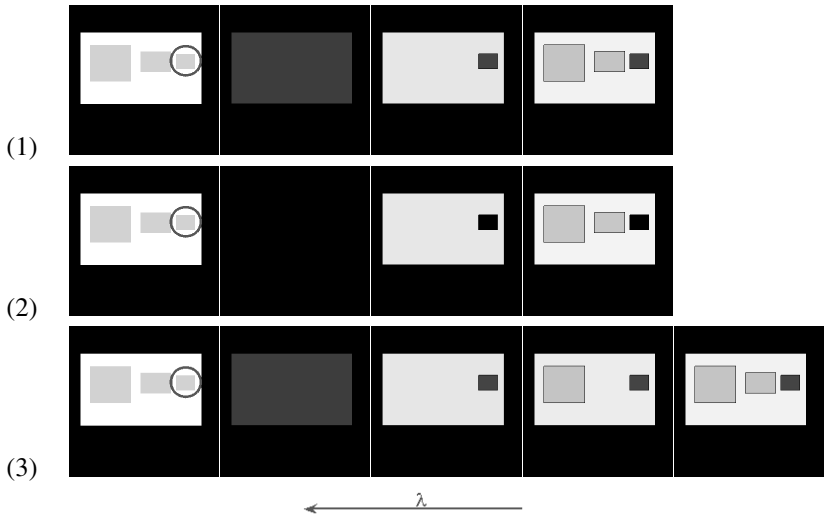


Figure 5. Suites de coupes monotones obtenues avec différentes énergies spatiales mono-potentielles calculées avec différentes fonctions. Ligne (1) : fonction $|R \cap B|/|R|$, ligne (2) : fonction faiblement sur-additive $e^{|R \cap B|/|R|}$, ligne (3) : fonction $e^{|R|/|B|}$

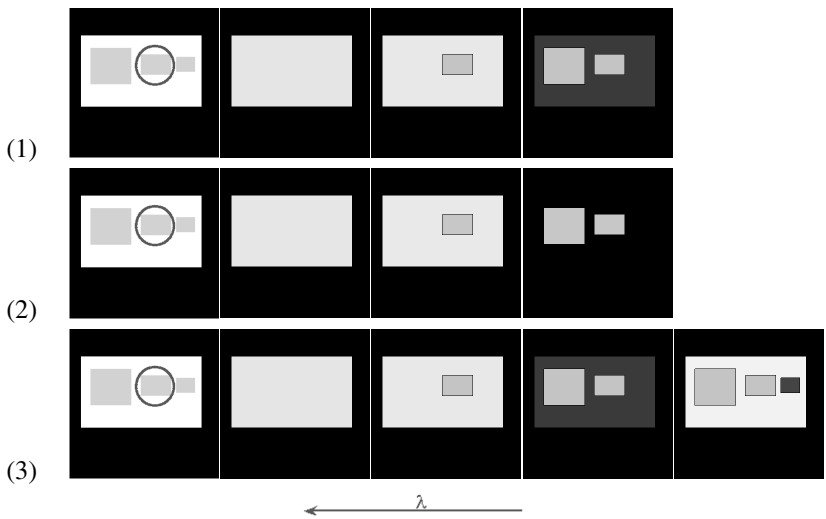


Figure 6. Suites de coupes monotones obtenues avec différentes énergies spatiales mono-potentielles calculées avec différentes fonctions. Ligne (1) : fonction $|R \cap B|/|R|$, ligne (2) : fonction faiblement sur-additive $e^{|R \cap B|/|R|}$, ligne (3) : fonction $e^{|R|/|B|}$

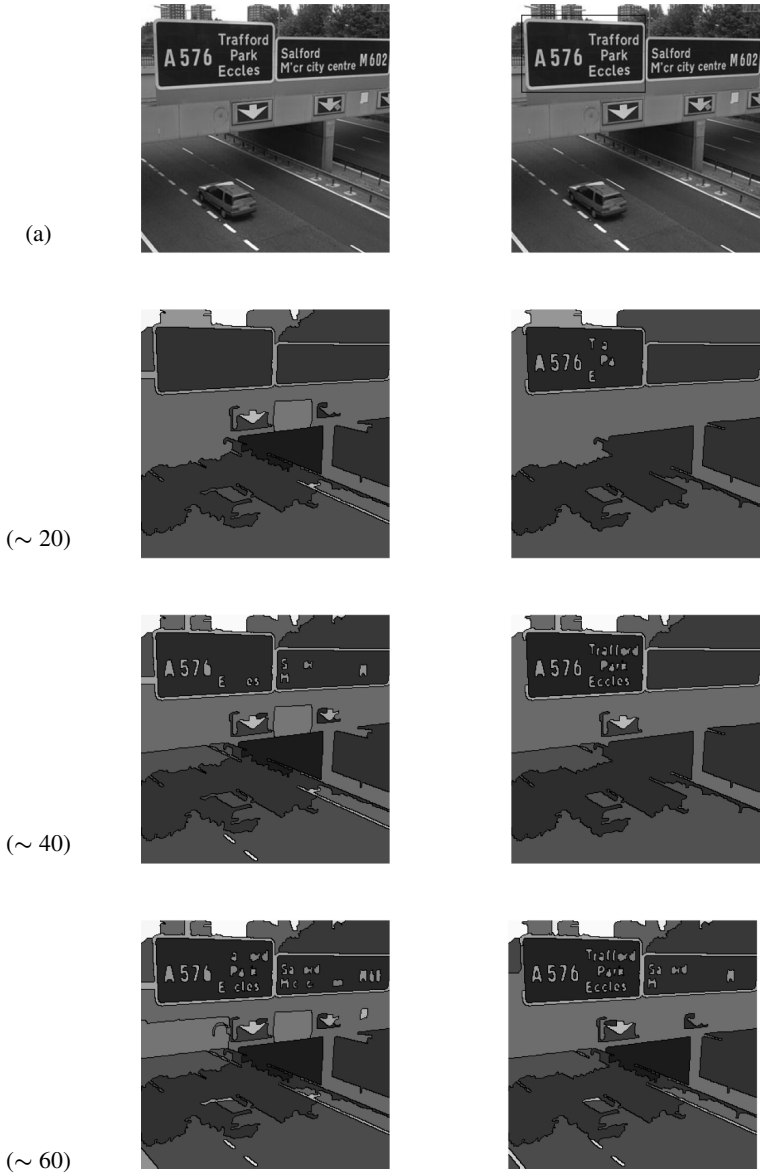


Figure 7. Coupes dans la hiérarchie ensemble-échelle d'une image d'autoroute sans et avec a priori *spatial : première ligne : images originales sans blob, avec un blob rectangulaire autour d'un panneau. En face de chaque ligne figure le nombre de régions des partitions*

d'extraire les détails dans la région d'intérêt qui est délimitée par le blob rectangulaire tracé autour du panneau. Inversement, dans la colonne de gauche la partition de 20 régions n'exhibe pas les chiffres et les lettres dans le panneau. En l'absence d'*a priori* spatial, les chiffres commencent à apparaitre dans la partition à 40 régions, alors qu'ils sont pratiquement tous présents dans la partition à 40 régions avec *a priori* spatial. Si on compare les valeurs de λ, on constate que la partition de 20 régions avec *a priori* est obtenu pour $\lambda = 0{,}46$ alors qu'elle est obtenue avec un $\lambda = 0{,}209$ sans *a priori*. Comme plus λ est important, plus l'image est régularisée, ces valeurs illustrent le fait qu'avec *a priori*, en dehors du blob, l'image est plus « simplifiée » que dans le cas sans *a priori*.

6.1.2. Combinaison linéaire d'énergies sous-additives

Dans les essais précédents, l'énergie spatiale remplace terme pour terme l'énergie de régularisation de Mumford-Shah qui n'est autre que le périmètre. Ainsi la construction de la hiérarchie se base uniquement sur la radiométrie de l'image et l'*a priori* spatial. Aucune information « *a priori* » sur les contours n'a été introduite d'où parfois un aspect irrégulier des frontières obtenues. Or, l'énergie de régularisation de Mumford-Shah permet d'obtenir des frontières beaucoup plus lisses et conséquemment elle permet de construire des régions de formes moins complexes.

Pour utiliser cette propriété, nous avons inclus dans notre algorithme de segmentation, la possibilité de combiner linéairement les deux énergies sous-additives (spatiale et Mumford-Shah) comme indiqué ci-dessous.

LEMME 3. — *Soient $C_1, C_2, \ldots, C_L$ une famille de régions sous-additives et soient $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_L$ des nombres réels positifs tels que $\sum_{i=1}^{L} \beta_i = 1$ alors toute combinaison linéaire des énergies $C = \sum_{i=1}^{L} \beta_i . C_i$ est une énergie sous-additive.*

Dans notre cas la nouvelle énergie s'écrira $\beta\,\mathbf{S} + (1-\beta)\,\mathbf{L}$ tel que $\beta \in]0,1[$. Toute la difficulté réside dans le choix du paramètre β qui jouera un rôle de pondération entre les deux énergies.

Dans (Yousfi, 2008), nous avons conduit différentes expérimentations sur des images en modifiant le paramètre β légèrement et de manière croissante.

Par exemple, quand on fixe le paramètre de pondération β à 0.8 on donne ainsi un rôle prépondérant à l'énergie spatiale dans la conduite du processus de fusion. On obtient des partitions dont les frontières sont plus sinueuses que ses homologues obtenues avec un coefficient plus faible. La contrepartie se traduit par des partitions exhibant une description plus détaillée de la zone étudiée. On dira que c'est le prix à payer si l'on souhaite obtenir des partitions de plus faible cardinalité et contenant des objets d'intérêt complexes qui auraient du être absorbés par leur environnement à des niveaux plus bas si l'on n'avait pas inclut un *a priori* spatial.

6.1.3. Énergie spatiale multi-potentielle

L'énergie multi-potentielle d'une région, relativement à un blob B, inclut le potentiel des régions voisines tandis que l'énergie mono-potentielle ignore les potentiels des régions adjacentes. La prise en compte du voisinage d'une région,

incluse dans un blob, induit un comportement de fusion local variable. Si la région est entourée de régions incluses dans le blob alors sa fusion est accélérée. À l'inverse, si la région possède un voisinage de régions qui se trouvent à l'extérieur du blob alors la région sera absorbée par ces régions et par conséquent certaines structures d'intérêt seront fusionnées plus rapidement que dans le cas mono-potentiel. Dans nos expérimentations, nous avons relevé des différences minimes entre les résultats avec énergie mono-potentielle et énergie multi-potentielle.

6.1.4. Énergie spatiale bi-potentielle

Pour terminer le cas de figure où l'*a priori* spatial porte sur un seul blob, nous avons testé le comportement d'une énergie bi-potentielle lors de la construction hiérarchique.

Nous avons utilisé un bi-potentiel multiplicatif construit à partir de la distance métrique de lien minimum :

$$d_{min}(R,B) = \min_{x \in R}\{d(x,c_B)\},$$

tel que d est la distance euclidienne classique.

Cette distance a été combinée avec les fonctions supra-additive suivantes :

- $\delta_s(R,B) = \frac{1}{|R||B|}$,
- $\delta_s(R,B) = \frac{1}{(1+|R \cap B|)}$,
- $\delta_s(R,B) = e^{-\frac{|R|}{|B|}}$,
- $\delta_s(R,B) = e^{-\frac{|R \cap B|}{|R|}}$.

Nous avons fait le parallèle entre les coupes obtenues avec une énergie mono-potentielle et celles issues de l'énergie bi-potentielle. La fonction supra-additive utilisée dans l'énergie bi-potentielle est l'inverse de la fonction faiblement sur-additive utilisée dans l'énergie mono-potentielle.

La différence est plus notable dans la figure 8 où les coupes issues de l'énergie bi-potentielle décrivent l'objet avec plus de détails que les coupes issues des autres énergies bi-potentielles. La fonction supra-additive utilisée est $1/(|R \cap B| + 1)$ combinée avec la distance du lien minimum. L'exploration en profondeur de la hiérarchie à partir du sommet donne l'impression que l'on se focalise dans un premier temps uniquement sur l'objet circonscrit. À chaque tranche de 20 régions on voit apparaître davantage de structures de la zone étudiée par rapport aux coupes extraites de hiérarchies construites avec une énergie mono ou bi-potentielle quelconque. Le reste des zones d'intérêt qui compose l'image est très vite absorbé. La fusion paraît asynchrone puisqu'une partition de 80 régions sur-segmente l'objet d'intérêt tout en sous-segmentant le reste des régions d'intérêt de l'image. Un déséquilibre se crée entre l'objet étudié et le reste des objets composant la scène.

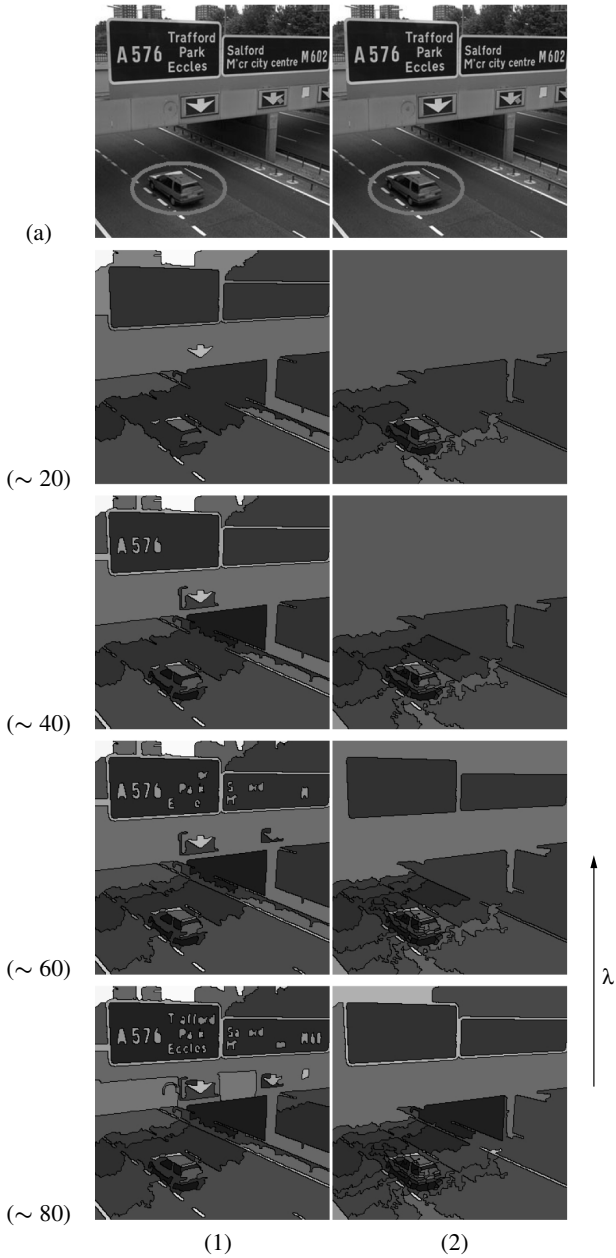


Figure 8. Coupes dans la hiérarchie ensemble-échelle pour différentes énergies : colonne (1) : énergie mono-potentielle ($|R \cap B|/|R|$), colonne (2) : énergie bi-potentielle utilisant la fonction supra-additive $1/(1 + |R \cap B|)$

6.2. Cas de plusieurs blobs

Nous allons maintenant étudier le comportement de l'énergie spatiale en présence de plusieurs blobs dans l'image.

L'énergie spatiale issue d'un *a priori* comportant K blobs se présente sous la forme d'un vecteur d'énergies spatiales relatives à chaque blob, *i.e.* :

$$\overrightarrow{D_{\mathcal{B}}(R,.)} = \{D(R,B_k)\}_{k=1,\cdots,M}.$$

Il nous faut choisir une norme afin de calculer l'intensité du vecteur des énergies, comme il a été précisé dans la précédente section. Nous avons montré dans cette dernière que des normes telles que L^2, L^1 ou L^∞ permettaient de conserver la propriété de sous-additivité de l'énergie spatiale. Néanmoins, la direction de l'attraction n'étant pas prise en considération, l'intensité du vecteur d'attraction ne peut pas suffire pour caractériser correctement l'interaction entre une région et un blob. Une région incluse dans un blob sera caractérisée par une faible énergie spatiale relativement à ce blob tandis que ses autres composantes seront relativement élevées. Le calcul de l'intensité du vecteur, en attribuant le même poids à chaque blob, diminue l'influence de la composante pertinente. L'énergie de la région, supposée être faible afin d'exprimer la forte attraction de la région vis à vis du blob, se trouve biaisée par les autres composantes du vecteur potentiel. Il en résulte une pénalisation moins forte sur la fusion de cette région avec ses régions voisines.

Ces inconvénients nous ont conduit à choisir une autre fonction afin de calculer l'intensité du vecteur d'attraction :

$$D_{\mathcal{B}}(R) = \min\{\overrightarrow{D_{\mathcal{B}}(R,.)}\} = \min_{k=1,\cdots,K}\{D(R,B_k)\}$$

Cette énergie n'est pas sous-additive mais localement, càd à l'intérieur des blobs, elle respecte cette propriété. L'énergie d'une région sera exprimée par sa composante énergétique la plus faible. Quand cette région est à l'intérieur d'un blob, la composante relative à ce blob représentera l'énergie de cette région tandis que si la région est à l'extérieur du blob, la composante la moins élevée représentera le blob le plus proche de cette région. La sous-additivité sera forcée dans le cas où elle est transgressée.

6.2.1. Énergie mono-potentielle

L'image synthétique de test utilisée figures 9 et 10 comprend deux rectangles blancs de même taille dans lesquels sont imbriqués trois rectangles gris de surface croissante de gauche à droite. Sur la colonne gauche de la figure 9 les deux blobs d'*a priori* spatial sont placés sur les petits rectangles, tandis que sur la figure 10, ils sont placés sur un petit rectangle et sur le rectangle moyen. Chaque ligne de chaque figure représente les premières coupes extraites de la hiérarchie en partant du sommet. Chaque hiérarchie a été obtenue avec différentes énergies spatiales mono-potentielles. Le comportement général est identique à celui décrit précédemment.

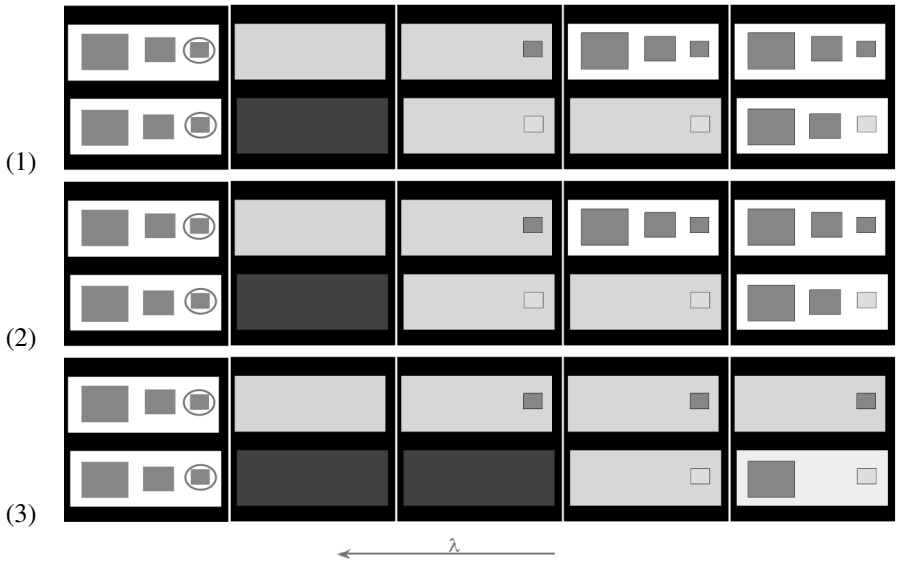


Figure 9. Suites de coupes monotones pour différentes énergies spatiales avec deux blobs et calculées avec différentes fonctions ; ligne (1) : fonction $|R \cap B|/|R|$, ligne (2) : fonction faiblement sur-additive $e^{|R \cap B|/|R|}$, ligne (3) : fonction $e^{|R|/|B|}$

Ainsi, on retrouve un comportement similaire à celui constaté dans l'exemple d'un *a priori* spatial à un seul blob. Repérer des objets d'intérêt par des blobs et utiliser une énergie spatiale permet la focalisation et l'attribution d'un degré de pertinence plus élevé qui font que les régions concernées de l'image persistent les dernières dans les mécanismes de fusion.

Nous présentons maintenant l'effet de l'énergie spatiale sur une image réelle en présence d'un *a priori* contenant plusieurs blobs.

Nous avons choisi pour cela l'image du carrefour traversé par un bus. On s'intéresse cette fois-ci à deux objets : le premier étant le bus et le deuxième représente une voiture noire visible en haut de l'image. Les deux objets ont des échelles spatiales très différentes.

La figure 11 représente dans sa première colonne des coupes extraites de l'ensemble échelle obtenu avec l'énergie de Mumford-Shah. Comme cité précédemment, les structures du bus ayant persisté lors du processus de fusion sont des zones dont la radiométrie est très différente par rapport à leur voisinage. On ne retrouve une partie significative des structures composant le bus qu'à partir d'une partition contenant 80 régions. Concernant la voiture noire elle n'apparaît dans aucune des partitions exhibées dans cette colonne. La deuxième colonne de cette figure représente les coupes obtenues en utilisant l'*a priori* spatial contenant un blob entourant le bus. L'énergie spatiale employée utilise le potentiel attractif. Une

partition de 20 régions décrit le bus aussi bien que la partition de 80 régions obtenue sans *a priori*. Toutes les coupes de la deuxième colonne exhibent plus de structures du bus mais aucune structure de la voiture noire n'apparaît sauf dans la partition de 80 régions. La dernière colonne représente les coupes obtenues avec la même énergie spatiale mais en s'appuyant sur les deux blobs comme le montre la figure 11-(a)-(3). On observe que l'introduction d'un second blob a permis de relever la pertinence de cet objet. La partition de 40 régions exhibe à la fois une partie importante du bus ainsi que la région principale qui délimite la voiture noire. La comparaison visuelle entre les deux dernières colonnes révèle une forte similitude dans le contenu des coupes à l'exception de l'apparition de la structure décrivant la voiture noire.

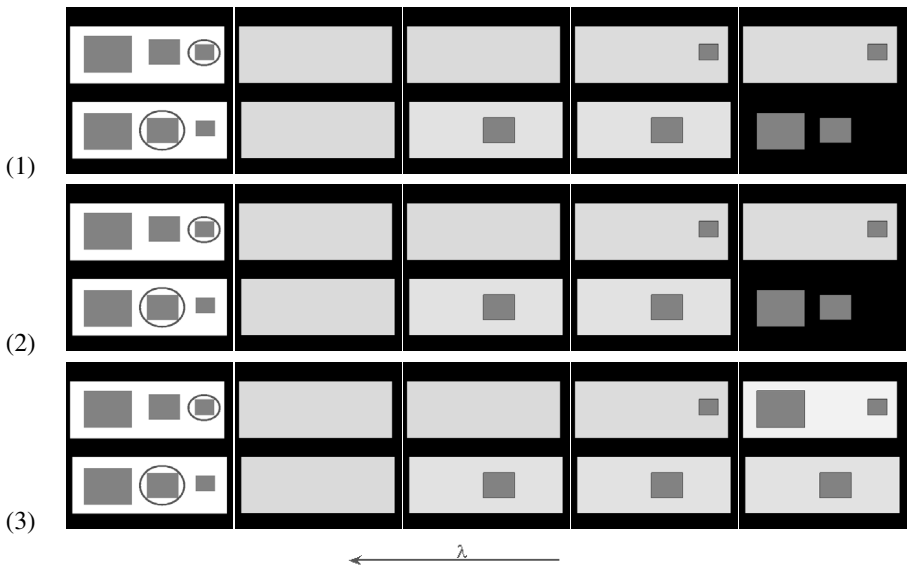


Figure 10. Suites de coupes monotones obtenues pour différentes énergies spatiales et 2 blobs ; ligne (1) : potentiel utilisant la fonction $|R \cap B|/|R|$, ligne (2) : utilisation de la fonction faiblement sur-additive $e^{|R \cap B|/|R|}$, ligne (3) : utilisation de la fonction $e^{|R|/|B|}$

6.2.2. Énergie bi-potentielle

Nous allons maintenant analyser les résultats obtenus en utilisant une énergie bi-potentielle. On se restreindra à l'étude du comportement de cette énergie construite soit avec la fonction supra-additive $1/(1 + |R \cap B|)$, soit avec la fonction $e^{-|R \cap B|/|R|}$. On utilisera le bi-potentiel multiplicatif. La distance utilisée est celle du lien minimum.

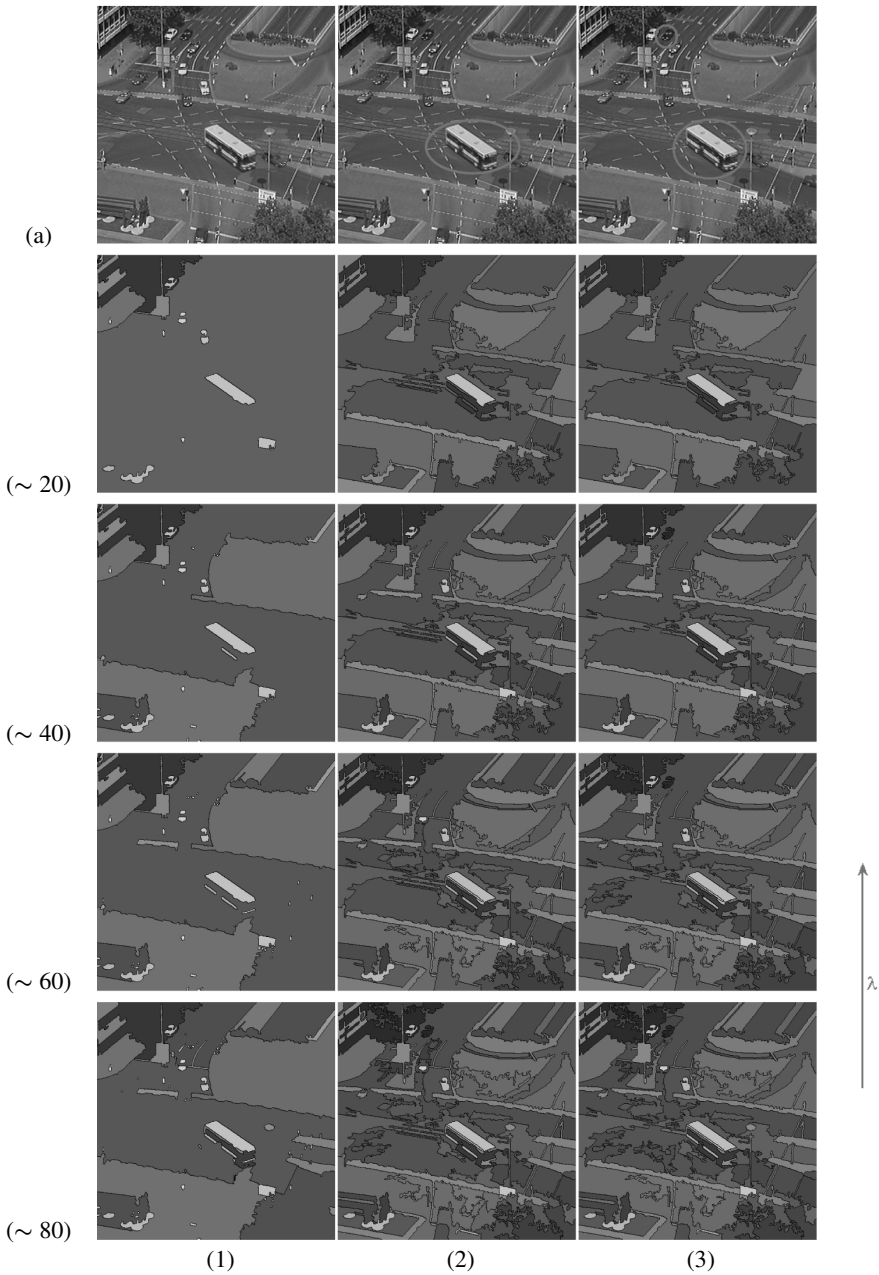


Figure 11. Coupes dans la hiérarchie ensemble-échelle avec un ou deux blobs ; colonne (1) : sans a priori *avec une énergie de Mumford-Shah, colonne (2) : avec une énergie mono-potentielle ($|R|.|B|$) et un un seul blob, colonne (3) : même énergie mais en ajoutant un deuxième blob*

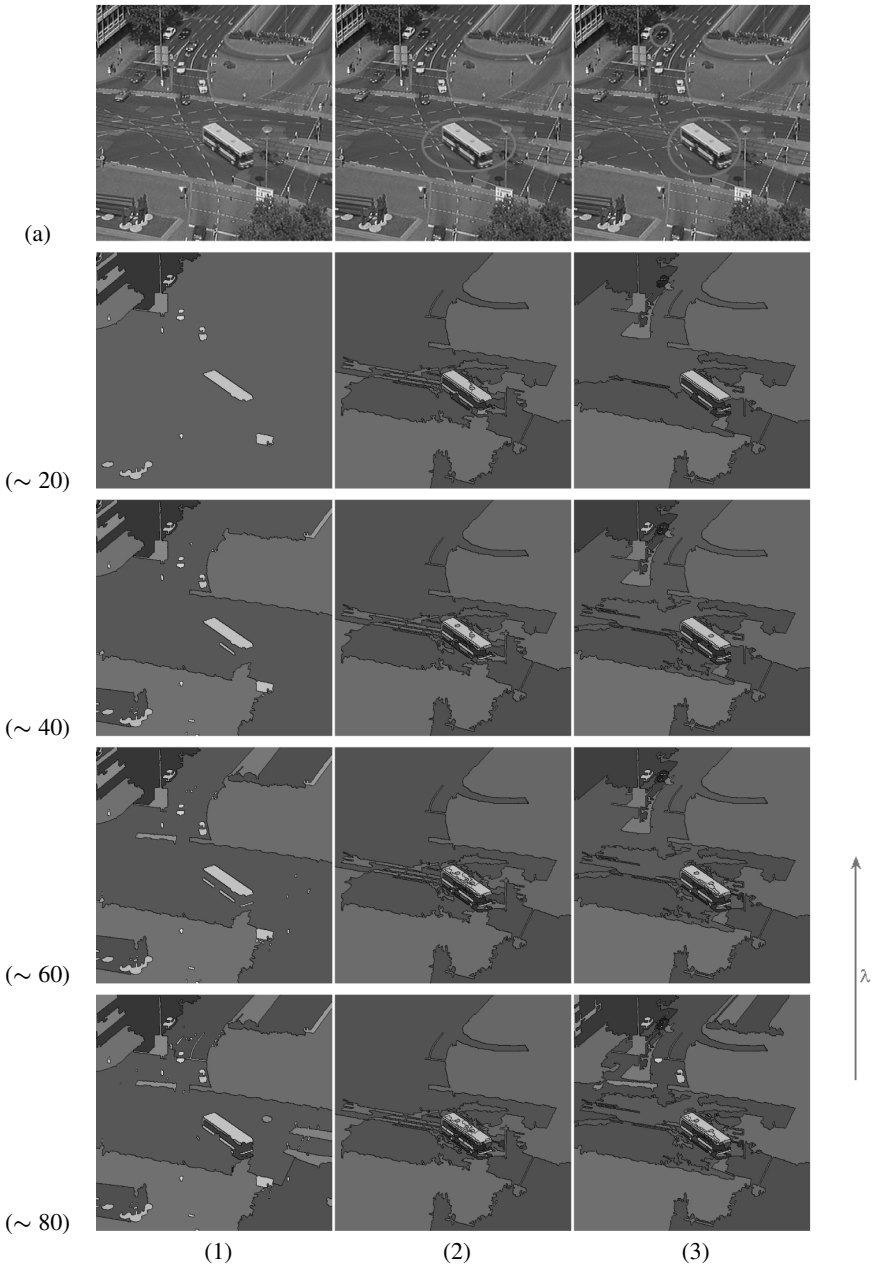


Figure 12. Coupes dans la hiérarchie ensembles-échelles avec une énergie bi-potentielle ; colonne (1) : énergie de Mumford-Shah, colonne (2) : énergie utilisant une fonction supra-additive $1/(1+|R \cap B|)$*, colonne (3) : même énergie mais avec un deuxième blob*

La colonne (2) de la figure 12 représente les coupes extraites de la hiérarchie construite avec un bi-potentiel utilisant la fonction supra-additive $1/(1+|R \cap B|)$. L'*a priori* spatial introduit contient un seul blob entourant le bus. L'exploration profonde de la hiérarchie indique que les zones composant le bus sont de plus en plus morcelées par rapport aux autres régions composant l'image. La fonction supra-additive utilisée impose une forte pénalisation entre régions adjacentes appartenant au blob. Ainsi, les régions se trouvant à l'extérieur du blob sont fusionnées en priorité. Il est clair que l'on accède ainsi plus rapidement aux régions composant le blob mais on occulte en même temps le reste des régions d'intérêt composant l'image. Le processus de fusion devient asynchrone puisque les régions à l'intérieur du blob restent sur-segmentées tandis que les objets à l'extérieur du blob sont soit sous-segmentés, soit déjà agrégés avec d'autres régions. Toutes les coupes de la première colonne ne contiennent aucun détail sur la voiture noire. La colonne (3) de cette même figure construite avec la même énergie spatiale mais sur la base des deux blobs exhibe, quant à elle, les structures de nos objets d'intérêt dès la partition de 20 régions. Le second objet d'intérêt (voiture noire) est préservé de la fusion avec d'autres régions grâce à l'injection d'un nouveau blob.

7. Conclusion

Dans cet article nous avons traité l'une des façons d'introduire des connaissances *a priori*. Nous avons proposé d'introduire un *a priori* spatial sous forme de blobs afin de souligner la pertinence de certaines zones de l'image dans l'interprétation de la scène. À partir d'une image-blob, nous avons proposé de construire une énergie spatiale « sous-additive » afin de respecter le formalisme de la théorie ensemble-échelle. Nous avons exploré différentes manières de modéliser une énergie spatiale : mono-potentielle, multi-potentielle ou bi-potentielle. Toute région sera caractérisée par une énergie spatiale qui se présente sous forme d'un vecteur dans le cas où l'*a priori* comprend plusieurs blobs. Chaque composante exprimera le degré d'attraction de la région vis-à-vis d'un blob. L'attraction est d'autant plus forte que l'énergie est faible. En présence de plusieurs blobs c'est l'intensité du vecteur des énergies qui représentera l'énergie de la région. Bien que les normes L^p soient des applications qui permettent de préserver la sous-additivité de l'énergie, elles ne reflètent pas l'attraction d'une région envers un blob en particulier. Dans le cas où l'image comporte plusieurs blobs, nous avons utilisé la fonction du minimum qui renvoie la composante énergétique la plus faible. Les différentes expériences menées sur des images de synthèse ou des images naturelles ont montré l'efficacité et le rôle d'une telle énergie dans la construction hiérarchique. Une énergie spatiale confère aux objets circonscrits un degré de pertinence plus élevé, leurs structures résistent aux processus de fusion et persistent plus longuement dans la hiérarchie. L'exploration de haut en bas de la hiérarchie permet de retrouver plus rapidement ces objets dans des coupes comportant très peu de régions. Le parallèle réalisé avec des hiérarchies construites sans *a priori* spatial conforte notre idée de départ. Des objets pertinents aux yeux d'un utilisateur peuvent ne pas l'être dans la hiérarchie et se retrouver noyés dans des partitions ayant un grand nombre de régions. L'introduction d'un *a priori* spatial permet de protéger ces objets et/ou leurs structures de la fusion avec les régions se trouvant à l'extérieur des blobs.

Concernant les différents modes d'énergie, les expérimentations n'ont pas révélé de différence significative entre énergie mono- et multi-potentielle. La prise en compte du voisinage de la région dans le calcul de son attraction vis-à-vis d'un blob donne lieu à des résultats sensiblement similaires à ceux obtenus avec l'énergie mono-potentielle. Par contre, l'utilisation d'une énergie bi-potentielle montre que les structures se trouvant à l'intérieur des blobs sont mieux préservées des fusions avec l'extérieur. Cela est dû à une plus forte pénalisation des fusions entre les structures internes au blob, ce qui permet aux régions externes aux blobs de fusionner en premier.

La construction d'une énergie spatiale exige dans un premier temps le choix d'un mode, c'est-à-dire mono-, multi- ou bi-potentiel. Il faut se munir d'une distance métrique et d'une fonction supra-additive ou faiblement sur-additive selon le mode énergétique. Expérimentalement, le mode mono- ou bi-potentiel se révèle plus pertinent. Quant à la fonction supra-additive ou faiblement sur-additive, on privilégiera des fonctions qui prennent en compte le degré d'inclusion de la région vis-à-vis du blob telle que l'intersection $|R \cap B|$ ou les ratios $|R \cap B|/|R|$ $|R \cap B|/|B|$.

Nous avons relevé durant cette étude que la qualité des frontières était inférieure à celles obtenues avec une énergie de Mumford-Shah. Il serait alors recommandé de combiner deux énergies sous-additives, la première étant le périmètre de la région qui favorisera la construction de contours réguliers et la deuxième sera notre énergie spatiale qui permettra l'émergence d'objets pertinents qui pourraient être fusionnés à cause de leur complexité et de leur faible dissemblance avec leur voisinage.

Dans cet article, nous sommes dans le cadre d'une segmentation interactive où le blob est tracé manuellement. Nous avons aussi utilisé notre algorithme dans le contexte automatique d'un système embarqué sur un véhicule comprenant deux caméras et un radar. Il s'agissait de segmenter correctement la zone susceptible de contenir un piéton. Les caractéristiques du système multi-capteur permettaient de tracer un blob rectangulaire dans une image fournie par une des caméras à partir de l'écho reçu par le radar. La dimension du blob était donnée par la hauteur probable d'un piéton à la distance fournie par le radar.

Bibliographie

Cocquerez J., Philipp S. (1995). *Analyse d'images : filtrage et segmentation*, Masson edn, Paris.

Guigues L., Cocquerez J. P., Le Men H. (2006, April). Scale-Sets Image Analyzis, *International Journal of Computer Vision*.

Haris K., Estradiadis S. N., Maglaveras N., Katsaggelos A. K. (1998). Hybrid image segmentation using watersheds and fast region merging, *IEEE Trans. on Image Processing*, vol. 7, n° 12, p. 1684-1699.

Koenderink J. (1984). The structure of images, *Biol. Cybern.*, vol. 50, p. 363-370.

Koenderink J., Van Doorn A. (1999). The structure of locally orderless images, *International Journal of Computer Vision*, vol. 31, n° 3/2, p. 159-168.

Laurent G. (2003). Modèles Multi-échelles pour la Segmentation d'Images (Multi-Scale Models for Image Segmentation), PhD thesis, Université de Cergy-Pontoise, France, Dec.

Lindeberg T. (1998). Feauture Detection with automatic Scale Selection, *Int. J. of Computer Vision*.

Mumford D., Shah J. (1989). Optimal Approximations by Piecewise Smooth Functions and Associated Variational Problems, *Comm. on Pure and Applied Math.*, vol. 17, n° 4, p. 577-685.

Perona P., Malik J. (1990). Scale space and edge detection using anisotropic diffusion, *IEEE trans. on PAMI*, vol. 12, n° 1, p. 629-639.

Witkin A. (1983). Scale-space filtering, *Proc. of 8th Int. Joint Conf. on Artificial Intell.,* Karlsruhe, West Germany, vol., p. 1019-1021.

Yousfi K. (2008). Segmentation hiérarchique optimale par injection d'*a priori* : radiométrique, géométrique ou spatial, PhD thesis, Université de Technologie de Compiègne, 3 novembre.

Article reçu le 02/03/2011
Accepté le 02/11/2011

Jean-Pierre Cocquerez *a rejoint depuis 1999 l'université de Technologie de Compiègne et il est membre du laboratoire Heudiasyc UMR 6599. Depuis 2007, il est responsable du Master « Sciences, Technologie, Santé ». Il est directeur adjoint scientifique de l'Institut des sciences de l'information et de leurs interactions (INS2I) CNRS depuis avril 2010. Ses domaines de recherche sont la segmentation d'images et la vision par ordinateur.*

Karim Yousfi *a effectué ses activités de recherche dans le laboratoire Heudiasyc (UMR 6599 du CNRS) de l'université de Technologie de Compiègne. Il a soutenu avec succès sa thèse, intitulée « Segmentation hiérarchique optimale par injection d'*a priori *: radiométrique, géométrique ou spatial », le 3 novembre 2008.*