

---

# Étude et commande robuste de systèmes logistiques soumis à une demande inconnue bornée

Charifa Moussaoui<sup>1</sup>, Rosa Abbou<sup>2</sup>, Jean Jacques Loiseau<sup>2</sup>

1. LIMOS, UMR CNRS 6158.

Campus Universitaire des Cézeaux, 1 rue de la Chebarde  
TSA 60125, CS 60026, 63178 Aubiere Cedex, France  
charifa.moussaoui@udamail.fr

2. LUNAM Université, IRCCyN UMR CNRS 6397.

École Centrale de Nantes, 44321 Nantes Cedex 3, France  
{rosa.abbou,jean-jacques.loiseau}@irccyn.ec-nantes.fr

---

**RÉSUMÉ.** Dans ce travail, nous proposons une méthode de gestion de production et de conception de commande pour un système logistique basique, visant à garantir la stabilité du stock face à une demande client incertaine et bornée. Ce travail se caractérise par la prise en compte des délais qui régissent la dynamique de ce type de systèmes, ainsi que des contraintes intrinsèques qu'impliquent leurs structures. Les délais peuvent être exacts ou estimés avec une marge d'incertitudes. L'approche développée est basée sur des méthodes de la théorie du contrôle : une structure de commande saturée de type feedback prédictif, est mise en place pour stabiliser le système, et prendre en compte les contraintes de capacité et de positivité. À travers une approche d'invariance contrôlée, des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité sont formulées, et la robustesse de la loi de commande face aux incertitudes sur l'estimation du retard est démontrée. L'applicabilité de cette approche est illustrée par des exemples de simulation.

**ABSTRACT.** This work deals with production and control design management, for basic logistics systems facing some uncertainties on customer demands and time lags estimations. The contribution is characterized by the inclusion of both the delay that governs the dynamics of these systems and the inherent constraints involved in their structures, such as positivity and saturations. The delay can be known exactly, or estimated within an uncertainty margin. Based on a control theory framework, and the use of invariance approaches, a robust saturated feedback predictor controller is used to handle stability issues of the system and the constraints meeting. The applicability of this approach is illustrated by simulation.

**MOTS-CLÉS :** régulation des stocks, commande saturée, feedback prédictif, étude de robustesse.

**KEYWORDS:** inventory control, saturated command, feedback predictor, robustness control.

---

DOI:10.3166/JESA.49.703-723 © Lavoisier 2016

## 1. Introduction

Depuis les travaux pionniers de l'économiste Simon (1952) portant sur l'étude de la dynamique de systèmes logistiques par une approche dite de Servomécanisme, différents travaux tels que (Forrester, 1961 ; Towill, 1982 ; Edghill et Towill, 1989 ; Sterman, 1989 ; Riddalls *et al.*, 2000) ont initié l'analyse des systèmes logistiques en mettant en œuvre des approches d'études issues de la théorie de la commande. Ces travaux ont donné lieu à des modèles tels que l'*Automatic Pipeline Inventory Ordered Base Production Control System*, APIOBPCS, qui sont aujourd'hui utilisés en industrie (John *et al.*, 1994). Ces modèles ont permis de mettre en évidence la connexion entre les différents éléments du système manufacturier, à savoir les ordres de production, les demandes des consommateurs et les variations des niveaux des stocks, à travers des fonctions de transfert du système et des paramètres de commande. Un des paramètres les plus critiques identifié est le retard. L'importance de ce dernier dans la dynamique de ces systèmes a été établie depuis les tous premiers travaux de Simon et de Forrester, en particulier pour son rôle dans le déclenchement de l'effet Bullwhip. Ce phénomène d'amplification de la variation de la demande en amont du système logistique est un problème majeur. La prise en compte du retard, sans approximation, dans l'étude de la dynamique des systèmes logistiques est pourtant relativement récente. C'est avec l'avancée des recherches sur la stabilité et la stabilisation des systèmes à retards, que des travaux tels que (Warburton, 2004) et (Sipahi *et al.*, 2010) ont amené des solutions exactes aux équations différentielles gouvernant la dynamique de ces systèmes, complétant les études et les travaux susmentionnés.

Cependant, certains aspects des systèmes logistiques ne sont pas pris en compte dans ces travaux, à savoir les limitations physiques et technologiques des ressources entrant dans les processus logistiques. En effet, les stocks sont des ressources à capacités finies et les machines de production sont conditionnées par leurs caractéristiques technologiques qui sont aussi limitées. La même contrainte s'applique pour les ressources de transport. D'autres contraintes apparaissent du fait qu'un niveau de stock ne peut avoir de valeurs négatives, pas plus qu'un ordre de production. Peu d'auteurs se sont intéressés à cette problématique, tels (Wang *et al.*, 2012 ; 2013) qui ont traité la contrainte de positivité des ordres de production uniquement, sans considérer les contraintes de saturation. La prise en compte de toutes les contraintes auxquelles est soumis un système de production reste une question largement ouverte.

Un autre aspect peu présent dans la littérature est la conception de commande robuste vis-à-vis des retards. En effet, dans un système logistique, l'estimation des différents délais est souvent entachée d'erreurs et d'incertitudes, qu'il est souvent difficile de quantifier et d'anticiper. On peut alors rapidement se trouver en situation de pénurie si les marges de sécurité sont insuffisantes, ou au contraire, si les marges prévues sont trop importantes, l'entreprise se retrouve en situation de surplus qui peut induire des pertes considérables.

Dans cet article, nous considérons un système logistique élémentaire, constitué d'une unité de production et d'un stock de produits finis. L'unité de production est

caractérisée par un délai qui peut être connu avec précision, ou qui peut présenter des incertitudes. Le but de notre étude est de contrôler le système logistique, de façon à ce que les contraintes sur le niveau de stock et sur les taux de production soient respectées, tout en répondant aux commandes des consommateurs, malgré la présence d'incertitude sur l'estimation du délai.

Dans la section 2, nous présentons le modèle dynamique d'un système logistique élémentaire, et nous formalisons les contraintes et spécifications de fonctionnement. On y présente également la structure de commande feedback prédictive saturée, et nous justifions le choix de cette commande. En sections 3 et 4, nous présentons notre méthodologie de travail, ainsi que l'essentiel de nos résultats, d'abord pour le cas d'un système sans incertitudes sur le délai, puis en considérant les incertitudes sur le retard. Cette étude est complétée par une discussion sur la base d'un modèle de simulation que nous présentons en section 5. Enfin, une conclusion générale et des perspectives terminent ce travail.

## 2. Modélisation et commande de la dynamique d'un système logistique

Un système logistique élémentaire est constitué d'une unité de production ou de transformation, et d'une unité de stockage. L'unité de production est caractérisée par une cadence (taux de production), et le délai nécessaire à l'accomplissement de ses tâches. La cadence est conditionnée par les capacités physiques des actionneurs et des machines de production, qui peuvent atteindre des seuils de saturation, correspondant à leurs capacités maximales de productivité. L'unité de stockage, ou simplement le stock, est caractérisée par le flux entrant de matières (produits) issu de la production, et le flux sortant des matières correspondant aux demandes des clients. Tout comme l'unité de production, l'unité de stockage est une ressource dont la capacité est limitée. Dans cette section, nous proposons un modèle dynamique générique pour un tel système logistique, qui prend en compte les différents éléments susmentionnés: à savoir la dynamique du stock, les contraintes physiques du système et ses retards.

### 2.1. Dynamique du stock

La dynamique de ce niveau de stock est régie par l'équation différentielle retardée suivante

$$\dot{y}(t) = \begin{cases} u(t - \theta) - d(t) & \text{pour } t \geq \theta \\ \varphi(t) - d(t) & \text{pour } t < \theta, \end{cases} \quad (1)$$

où  $y(t)$  est le niveau du stock instantané,  $u(t)$  correspondant au taux de production,  $\theta$  est le délai nécessaire à l'accomplissement des tâches de production, et  $d(t)$  est la demande client qui correspond au flux sortant.  $\varphi(t)$  est la fonction des conditions initiales qui décrit l'état du système de production durant le temps mort initial, entre les instants  $t = 0$  et  $t = \theta$ .

## 2.2. Contraintes du système logistique

Les contraintes auxquelles est soumis le système logistique sont liées aux limitations des structures qui le composent. D'une part, le niveau de stock ne peut prendre que des valeurs positives, car il représente une quantité de matière, mesurée en nombre de pièces ou de lots, ou en unités de masse ou de volume. D'autre part, la capacité de stockage est limitée. Elle conditionne alors les activités et les cadences de production du système. Nous noterons la capacité de stockage maximale par  $y_{max}$ . On a ainsi

$$y(t) \in [0, y_{max}], \text{ pour } t \geq 0, \quad (2)$$

De même,  $u(t)$  est un flux physique de matière qui est lié à la capacité des actionneurs et des machines mis en œuvre. De ce fait, le taux de production ne peut prendre de valeurs négatives, et ne peut excéder la capacité maximale du système considéré qu'on note  $u_{max}$ . Cette seconde contrainte est exprimée sous la forme suivante

$$u(t) \in [0, u_{max}], \text{ pour } t \geq 0, \quad (3)$$

Une dernière spécificité à présenter concerne la demande client  $d(t)$ . A l'instar du flux physique de matière, le flux de demande aussi ne peut prendre de valeurs négatives. Comme nous l'avons présenté dans l'introduction, nous considérons dans ce travail que la demande client est inconnue d'avance, et qu'elle est bornée. Elle varie arbitrairement entre un minimum et un maximum tels que

$$d(t) \in [0, d_{max}], \text{ pour } t \geq 0, \quad (4)$$

## 2.3. Structure de commande proposée

La commande de notre système est la variable  $u(t)$ , qui est la consigne instantanée de niveau de production. Gérer la production revient alors à maîtriser ces flux de produits de façon à atteindre les objectifs globaux fixés par la stratégie générale du système logistique. Cette stratégie vise à garantir un taux de service de cent pour cent, pour toute demande de la forme (4), avec la maîtrise des variations des niveaux de stock, et le respect des contraintes de positivité et de saturation exprimées par les relations (2) et (3) respectivement. D'un point de vue système, il s'agit de mettre au point une commande  $u(t)$  qui permet de stabiliser le système tout en prenant compte les différentes contraintes et spécifications de fonctionnement, ainsi que le retard présent dans sa dynamique. Pour ce faire, nous introduisons une loi de commande du type feedback prédictif saturé qui se présente sous la forme suivante

$$u(t) = \text{sat}_{[0, u_{max}]}[K(y_c - z(t))] \text{ pour } t \geq 0, \quad (5)$$

où  $y_c$  est le niveau de référence du stock,  $K$  est le gain du système qui définit la cadence de production, et  $z(t)$  est la prédiction de l'état futur du stock qui est définie dans ce qui suit.

Les commandes saturées sont souvent employées dans des systèmes où les actionneurs présentent des caractéristiques de saturation dues à leurs limitations physiques, permettant alors la prise en compte de ces limitations de capacité. Des travaux tels que (Hu, 2001) et (Tarbouriech *et al.*, 2011), ont montré l'efficacité de l'utilisation de ces commandes saturées. L'utilisation de ce type de commande introduit néanmoins des non-linéarités dans le système bouclé. En effet, pour une fonction donnée  $f(t)$ , avec  $a$  et  $b$  deux nombres réels, la fonction  $\text{sat}_{[a,b]}[f(t)]$  est définie par :

$$\text{sat}_{[a,b]}[f(t)] = \begin{cases} b & \text{si } f(t) > b, \\ f(t) & \text{si } a \leq f(t) \leq b, \\ a & \text{si } f(t) < a. \end{cases}$$

Pour ce type de systèmes non-linéaires, les conditions de stabilité et de stabilisation peuvent être obtenues en caractérisant des ensembles dits invariants dans lesquels les contraintes du système sont satisfaites. La définition de l'invariance est donnée dans la section 3.2. Le choix d'utiliser une structure de commande du type de feedback prédictif pour résoudre notre problématique, est justifiée par le fait que cette structure est bien connue pour ses propriétés stabilisantes, permettant de faire du placement de pôle fini pour des systèmes à retard (Manitius et Olbrot, 1979), (Mirkin et Raskin, 2003). Aussi connue sous le nom de réduction d'Artstein (Artstein, 1982), elle est basée sur le principe de compensation du retard, donnant lieu à un système réduit sans retard, grâce à la mise en place d'une prédiction de l'état futur du système, déduite de son équation d'évolution (1), sous la forme

$$z(t) = \begin{cases} y(t) + \int_{t-\theta_0}^t u(\tau) d\tau & \text{pour } t \geq \theta_0, \\ y(t) + \int_t^{\theta_0} \phi(\tau) d\tau + \int_0^t u(\tau) d\tau & \text{pour } t < \theta_0, \end{cases} \quad (6)$$

où  $\theta_0$  est une estimation du retard  $\theta$ . Cette structure de commande permet une compensation exacte et une anticipation des effets du retard sur la dynamique du système, à condition que ce retard soit estimé avec précision, c'est-à-dire  $\theta_0 = \theta$ . On parle alors de modèle nominal. Or, l'estimation en ligne du délai dans un système logistique peut être entachée d'incertitudes diverses et d'aléas (pannes, retards de livraison, grèves...), et de ce fait, la prédiction donnée par la relation (6), et qui est basée sur l'estimation  $\theta_0$  perd son exactitude. Nous proposons alors d'étudier le contrôle du système logistique dans les deux situations suivantes: cas nominal lorsque l'estimation du délai est conforme au délai réel, et le cas avec incertitude où le délai réel est défini dans un intervalle d'incertitude tel que:  $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ , les bornes minimale et maximale  $\theta_1$  et  $\theta_2$  étant connues, et  $\theta_0$  appartenant également à cet intervalle. Pour chacun des deux cas, nous étudierons

l'évolution du système sous l'action de la commande, afin de pouvoir paramétrer correctement le contrôleur, dans le but de garantir le respect des contraintes énoncées précédemment.

### 3. Commande de la dynamique du système: cas nominal

Dans cette section, nous étudions la dynamique du système contrôlé (1)-(5) dans le cas nominal, c'est-à-dire, lorsque le délai est connu avec exactitude. Tout au long des développements, nous utiliserons la notation unique pour désigner le délai.

#### 3.1. Dynamique du système contrôlé

Comme nous l'avons expliqué dans la section 2.3, pour le cas nominal, l'utilisation d'une structure feedback prédictif permet d'aboutir à un système réduit sans retard. En effet, en utilisant les équations (1) et (6), la prédiction  $z(t)$  se réécrit sous la forme

$$z(t) = y(t + \theta) + \int_t^{t+\theta} d(\tau)d\tau, \text{ pour } t \geq 0 \quad (7)$$

Par dérivation temporelle de cette dernière expression, on aboutit au système suivant

$$\dot{z}(t) = u(t) - d(t), \text{ pour } t \geq 0 \quad (8)$$

où, compte tenu de la loi de commande (5)

$$\dot{z}(t) = \text{sat}_{[0, u_{max}]}[K(y_c - z(t))] - d(t) \quad (9)$$

On constate que le système (8) apparaît sans retard. Il représente la réduction du système (1)-(5). Aussi, une loi de commande  $u(t)$  est admissible pour le système en boucle fermée (1)-(5), si et seulement si cette même commande est admissible pour le système (8) (Artstein, 1982). Par ailleurs, il est établi que ces deux systèmes ont les mêmes propriétés dynamiques. Nous utilisons alors ce résultat pour étudier les comportements dynamiques de notre système logistique (1)-(5). En effet, notre démarche consiste à utiliser le système réduit (8)-(5) pour concevoir les paramètres de notre contrôleur qui répondent aux contraintes (2) et (3). Il s'agit d'étudier la dynamique du système considéré de façon à déterminer les intervalles d'évolution du signal de sortie  $y(t)$  et du signal d'entrée  $u(t)$ , afin de formuler par la suite les conditions sous lesquelles les contraintes (2) et (3) seront bien respectées. À partir de l'équation (7), nous pouvons constater que,  $y(t + \theta)$  s'exprimant sous la forme

$$y(t + \theta) = z(t) - \int_t^{t+\theta} d(\tau)d\tau, \text{ pour } t \geq 0. \quad (10)$$

La contrainte (2) est vérifiée si  $z(t)$  et le terme  $\int_t^{t+\theta} d(\tau)d\tau$  sont tous les deux bornés, de façon à ce que  $y(t + \theta)$  évolue de dans l'intervalle  $[0, y_{max}]$ . Sous

l'hypothèse que la spécification (4) soit bien satisfaite, on constate que le terme  $\int_t^{t+\theta} d(\tau)d\tau$  est borné dans l'intervalle  $[0, d_{max}]$  pour tout  $\theta \geq 0$ . De ce fait, la prédiction  $z(t)$  doit être aussi limitée par des bornes  $z_{min}$  et  $z_{max}$  vérifiant la relation (10) tel que  $0 \leq z_{min} - \theta d_{max}$  pour  $y(t + \theta) = 0$  et  $z_{max} \leq y_{max}$  pour  $y(t + \theta) = y_{max}$ .

Somme toute, le système (1)-(5) vérifie la contrainte (2) si et seulement si la condition exprimée par

$$z(t) \in [\theta d_{max}, y_{max}] \tag{11}$$

avec  $\theta d_{max} < y_{max}$ , est vérifiée pour le système réduit (8)-(5). Le problème de commande consiste à trouver les paramètres du contrôleur de façon à ce que l'intervalle  $[\theta d_{max}, y_{max}]$  soit  $\mathcal{D}$ -invariant pour le système (9), sous l'action de la demande  $d(t)$ , l'ensemble  $\mathcal{D}$  étant défini par l'ensemble de variation de  $d(t)$  et est décrit par l'intervalle (4). Le principe d'invariance est introduit dans la section suivante.

### 3.2. Principes d'invariance : définitions et théorèmes

De façon générale, un ensemble est dit invariant pour un système dynamique, si toutes les trajectoires initialisées dans cet ensemble évoluent de façon bornée dans ce même ensemble. Le principe d'invariance répond aussi bien aux questions d'existence de contrôleurs réalisables pour des systèmes contraints, ainsi qu'aux problèmes de commande robuste et de rejet de perturbation (Milani, 1994). Dans ce travail, nous nous intéressons en particulier au problème de rejet de perturbation, pour lequel nous utilisons la notion de  $\mathcal{D}$ -invariance. Afin de définir cette dernière, nous introduisons d'abord des résultats de base, qui formalisent la condition d'invariance d'un ensemble fermé, pour des systèmes de la forme générale  $\dot{x}(t) = f(x(t))$ .

**DÉFINITION 1. — (Cône contingent).** *Étant donné un ensemble convexe fermé  $\Omega$  et  $x$  un élément de  $\Omega$ , le cône contingent à  $\Omega$  au point  $x$  est défini par l'ensemble suivant*

$$T_{\Omega}(x) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n, \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\text{dist}(x+hz, \Omega)}{h} = 0 \right\},$$

où  $\text{dist}(x, \Omega)$  est la fonction distance.

**THÉORÈME 2. — (Condition d'invariance)** (Nagumo, 1942) *Soit un système dynamique de la forme  $\dot{x}(t) = f(x(t))$ , et  $\Omega$  un sous-ensemble de son espace d'état, qui admet une solution unique pour toute condition initiale  $x(0)$  appartenant à  $\Omega$ . L'ensemble  $\Omega$  est dit invariant pour ce système si et seulement si la condition suivante est vérifiée pour tout  $x$  appartenant à*

$$f(x(t)) \in T_{\Omega}(x). \tag{12}$$

La condition d'invariance donnée par le théorème 2, a été initialement proposée par Nagumo (1942), et reprise dans la littérature notamment dans l'ouvrage de Blanchini (1999), auquel nous nous référons pour la démonstration de ce résultat. La condition de ce théorème peut être interprétée de la façon suivante. Les trajectoires générées par le système restent dans l'ensemble  $\Omega$ , si à tout point  $x$  appartenant au contour de  $\Omega$ , la dérivée du système est dirigée vers l'intérieur de l'ensemble.

À partir de ce théorème, nous formulons les conditions explicites d'invariance d'intervalles fermés dans le cas de systèmes mono-variable.

**THÉORÈME 3.** — *Soit un système dynamique de la forme  $\dot{x}(t) = f(x(t))$ , qui vérifie  $x(0) \in \Omega$ , avec  $\Omega = [\alpha, \beta]$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  étant donnés.  $\Omega$  est invariant pour ce système si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées*

$$f(\alpha) \geq 0 \quad \text{et} \quad f(\beta) \leq 0.$$

**PREUVE 4.** — La preuve de ce théorème est apportée en appliquant le théorème 2. On caractérise en premier lieu les cônes contingents pour l'intervalle  $\Omega$ . Pour  $x \in ]\alpha, \beta[$ , on remarque que  $T_{\Omega}(x) = \mathbb{R}$ , puisque la distance  $\text{dist}(x + hz, \Omega)$  est nulle pour tout  $z \in \Omega$  lorsque  $h$  tend vers 0. Lorsque  $x(t) = \alpha$ ,  $z$  doit être positif de façon à ce que le cône soit dirigé vers l'intervalle. On constate en effet, que si  $z$  est négatif, alors  $\alpha + hz$  n'appartient pas à l'intervalle donné. Dans ce cas,  $z$  étant positif on obtient

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\text{dist}(x + hz, \Omega)}{h} = \frac{hz}{h} = z,$$

de ce fait,  $T_{\Omega}(x) = \mathbb{R}^+$ . De la même façon, lorsque  $x(t) = \beta$ ,  $z$  doit être négatif, et le cône contingent en ce point est  $T_{\Omega}(x) = \mathbb{R}^-$ , d'où les conditions du théorème. ■

Maintenant, nous considérons le cas de systèmes avec une entrée supplémentaire qui s'interprète comme une entrée de perturbation. Notre but est de formuler les conditions d'invariance, sous l'effet de la variation de l'entrée  $d(t)$  évoluant dans un ensemble noté  $\mathcal{D}$ . On parle alors de  $\mathcal{D}$ -invariance.

**DÉFINITION 5.** — ( **$\mathcal{D}$ -invariance**) (Blanchini, 1999) *Soit un système dynamique de la forme  $\dot{x}(t) = f(x(t), d(t))$  donné, avec  $\Omega$  un sous-ensemble de son espace d'état, et une perturbation  $d(t)$  appartenant à un ensemble  $\mathcal{D}$  donné. L'ensemble  $\Omega$  est dit  $\mathcal{D}$ -invariant pour ce système si, pour toute condition initiale dans  $\Omega$ , les trajectoires générées par ce système sont toutes incluses dans  $\Omega$ , pour tout  $t$ , et toute perturbation  $d(t)$  évoluant dans l'ensemble  $\mathcal{D}$ .*

Ainsi, en se basant sur cette définition et sur le théorème 2, nous formulons la condition de  $\mathcal{D}$ -invariance pour un système dynamique de la forme  $\dot{x}(t) = f(x(t), d(t))$  par le théorème suivant.

**THÉORÈME 6.** — *Soit un système dynamique de la forme  $\dot{x}(t) = f(x(t), d(t))$  qui vérifie  $x(0) \in \Omega$  avec  $\Omega = [\alpha, \beta]$ , et  $d(t) \in \mathcal{D}$  avec  $\mathcal{D} = [\gamma, \delta]$ .  $\Omega$  est  $\mathcal{D}$ -invariant pour ce système si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*



$$f(\alpha) \geq \delta \quad \text{et} \quad f(\beta) \leq \gamma.$$

PREUVE 7. — La preuve est obtenue directement en considérant la preuve du théorème précédent. En effet, le calcul du cône contingent est identique, de sorte que  $T_{\Omega}(x) = \mathbb{R}$  pour  $x \in [\alpha, \beta]$ ,  $T_{\Omega}(x) = \mathbb{R}^+$  pour  $x = \alpha$  et  $T_{\Omega}(x) = \mathbb{R}^-$  pour  $x = \beta$ . Pour  $x(t) = \alpha$  on vérifie alors que  $f(\alpha) - d(t) \geq 0$ , ou de façon équivalente  $f(\alpha) \geq d(t)$ , et que  $f(\beta) - d(t) \leq 0$  soit  $f(\beta) \leq d(t)$  pour  $x(t) = \beta$ .  $d(t)$  étant borné dans l'intervalle  $\mathcal{D} = [\gamma, \delta]$ , les inégalités précédentes établissent les conditions d'invariance données par ce théorème. ■

Dans le cadre de ce travail, les résultats présentés dans cette section nous sont utiles pour définir les conditions de  $\mathcal{D}$ -invariance de l'ensemble  $[\theta d_{max}, y_{max}]$  pour le système (8)-(5). Ce dernier se présente en effet sous la forme générale  $\dot{x}(t) = f(x(t), d(t))$  où  $x(t) = z(t)$  et  $d(t)$  est l'entrée de perturbation évoluant dans l'intervalle  $\mathcal{D} = [0, d_{max}]$  et qui représente la demande client. L'existence d'un tel ensemble invariant pour le système non-linéaire (8)-(5) permet d'apporter des conclusions concernant sa stabilité, en particulier en termes de BIBO (*Bounded Input, Bounded Output*)-stabilité. La nature du système considéré, avec la présence intrinsèque d'un délai, nous mène à la définition de ce qu'on appelle l'ensemble des conditions initiales admissibles.

### 3.3. Conditions initiales admissibles

Le système (1) étant un système à retard sur entrée, l'ensemble des conditions initiales est défini pour  $0 \leq t < \theta$ , et à cause de la présence du retard, la loi de commande ne peut agir sur ce profil initial qu'à partir de l'instant  $t = \theta$ . En effet, comme le montre l'équation (1) pour les instants  $t$  entre 0 et  $\theta$ , la dynamique du stock dépend uniquement de la fonction  $\phi(t)$  et de la demande  $d(t)$ . S'assurer que les contraintes sont bien respectées dans cet intervalle de temps, mène à décrire ce qu'on appelle l'ensemble des conditions initiales admissibles, qui garantissent le respect de ces contraintes. Cet ensemble est caractérisé comme suit.

En utilisant l'équation (1), pour  $0 \leq t < \theta$ , le niveau du stock est donné par :

$$y(t) = y_0 + \int_0^t \phi(\tau) d\tau - \int_0^t d(\tau) d\tau$$

avec  $y_0$  est le niveau du stock à l'instant  $t = 0$ . La première intégrale du terme de droite représente l'encours de production. Lorsque  $t = \theta$ , on parle d'encours initial qu'on note  $wip_0$ , tel que  $wip_0 = \int_0^\theta \phi(\tau) d\tau$ . Étant donné que le terme  $\int_0^t d(\tau) d\tau$  est bornée dans l'intervalle  $[0, \theta d_{max}]$ , alors  $y(t)$  est aussi borné dans l'intervalle  $[0, y_{max}]$  pour tout  $t \in [0, \theta[$  si et seulement si les conditions initiales sont telles que :

$$\theta d_{max} \leq y_0 + wip_0 \leq y_{max}$$

Dans le cas où les conditions initiales ne sont pas admissibles, le système subit cette configuration initiale, et son évolution dynamique présente une phase transitoire qui peut être plus ou moins longue selon les états des stocks et des encours au début des opérations. D'un point de vue pratique, il est important de s'assurer que la conception initiale et la mise en route du système logistique ne présentent pas de risques majeurs, et de prendre en considération cette phase transitoire dans la définition et la vérification des spécifications de sécurité et de qualité du système. Dans la suite de ce travail, nous considérons que les conditions initiales du système sont toujours admissibles.

### 3.4. Paramétrisation du contrôleur

La conception du contrôleur et sa paramétrisation consistent à choisir le gain  $K$  et le niveau de référence  $y_c$  de façon à ce que le système contrôlé respecte bien les contraintes et les spécifications de fonctionnement. Cette conception passe par deux phases essentielles. Premièrement, étant donné les paramètres du système physique, à savoir  $u_{max}$  et  $y_{max}$ , et connaissant  $d_{max}$ , existe-t-il un jeu de paramètres réalisable qui permet au contrôleur d'atteindre les performances visées. Si la réponse à cette première phase est positive, alors en second lieu, se pose la question du choix de ce jeu de paramètres.

Dans cette section, nous apportons les réponses à ces deux questionnements sous forme du théorème suivant. Ces résultats sont basés sur la formulation de conditions nécessaires et suffisantes garantissant la  $\mathcal{D}$ -invariance de l'intervalle (11) ainsi que le respect des contraintes du système.

**THÉORÈME 8.** — *Étant donné un système de la forme (1), il existe une commande de la forme (5), pour laquelle le système est BIBO-stable et les contraintes (2) et (3) sont satisfaites, pour tout  $d(t) \in [0, d_{max}]$ , si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées.*

$$\theta d_{max} < y_{max} ; \quad (13)$$

et

$$d_{max} \leq u_{max} \quad (14)$$

*De plus, si les conditions (13) et (14) sont vérifiées, alors les contraintes (2) et (3) sont satisfaites par le contrôleur (5) si et seulement si les paramètres de ce dernier sont choisis tels que*

$$\theta d_{max} + \frac{d_{max}}{K} \leq y_c < y_{max} \quad (15)$$

**PREUVE 9.** — La preuve de ce théorème découle directement des conditions de  $\mathcal{D}$ -invariance de l'intervalle  $[\theta d_{max}, y_{max}]$  donné en (11). La condition (13) est nécessaire pour garantir l'existence de cet intervalle, de sorte qu'il soit non vide, sa suffisance étant immédiate. Les conditions (14) et (15) sont obtenues en appliquant le théorème 6. L'intervalle (11) est  $\mathcal{D}$ -invariant pour le système (9) si et seulement si

$$\text{sat}_{[0, u_{max}]}[K(y_c - \theta d_{max})] \geq d_{max}; \quad (16)$$

et

$$\text{sat}_{[0, u_{max}]}[K(y_c - y_{max})] \leq 0; \quad (17)$$

En utilisant la définition de la fonction sat donnée en section 2.3, on constate que l'inégalité (16) accepte une solution si et seulement si  $u_{max} \geq d_{max}$ , ce qui établit la condition (14), et  $y_c$  est tel que  $\theta d_{max} + d_{max}/K \leq y_c$  ce qui montre la partie gauche de la condition (15) du théorème. L'inégalité de droite quant à elle équivaut à (17), ce qui achève la démonstration. ■

Les résultats présentés s'interprètent en termes de viabilité de la stratégie de gestion proposée, et de sa réalisation par le système de pilotage mis en place, qui correspond dans ce cas à la commande feedback prédicteur saturée. Dans ce contexte, la stratégie de gestion vise à satisfaire la demande en évitant toute rupture du stock ou risque de sur-stockage, en prenant en compte les limitations des ressources de production. Les conditions (13) et (14) sont intrinsèquement liées aux dimensions des ressources de production et de stockage, et montrent que pour éviter toute rupture, il suffit de disposer d'un stock qui puisse répondre à la demande cumulée durant le délai, et d'une capacité de production qui soit au moins égale à la demande maximale prévue. Le choix final de la consigne  $y_c$  et du gain  $K$  qui vérifient la condition (15), sera déterminé selon la stratégie appliquée par le gestionnaire du système logistique. Par exemple, l'augmentation du gain  $K$  permet d'améliorer la réactivité du système en augmentant la cadence de production, ce qui aura pour effet de diminuer les niveaux de consignes nécessaires pour éviter les ruptures. Aussi, l'utilisation d'un niveau de consigne proche de la capacité de stockage maximale  $y_{max}$  aura pour effet d'augmenter le taux d'occupation du stock. Cela montre une grande flexibilité de la loi de commande proposée, qui par un simple choix des paramètres, permet de régler finement les performances du système logistique. L'analyse approfondie des résultats donnés par ce théorème nous amène à formuler le corollaire suivant qui donne les bornes atteintes par les différentes variables du système, sous l'effet d'une loi de commande répondant aux conditions données par le théorème 8.

**COROLLAIRE 10.** — *Étant donné un système de la forme (1) avec des conditions initiales admissibles, et une loi de commande de la forme (5), vérifiant les conditions (13), (14) et (15). L'intervalle de variation final de  $y(t)$  et de  $u(t)$  est donné respectivement par*

$$y(t) \in [y_c - \theta d_{max} - \frac{d_{max}}{K}, y_c]; \quad (18)$$

et

$$u(t) \in [0, d_{max}]; \quad (19)$$

pour tout  $t \geq 0$  et  $d(t) \in [0, d_{max}]$ .

PREUVE 11. — À partir de l'équation (9), on voit que sous les hypothèses du théorème 8 les implications suivantes sont vraies pour tout  $t \geq 0$ ,

$$z(t) \geq y_c \Rightarrow \dot{z}(t) \leq 0 \text{ et } z(t) \leq y_c - \frac{d_{max}}{K} \Rightarrow \dot{z}(t) \geq 0$$

Ceci montre que l'intervalle effectif de variation de  $z(t)$  est

$$z(t) \in \left[ y_c - \frac{d_{max}}{K}, y_c \right] \quad (20)$$

qui n'est autre que le plus petit intervalle invariant pour le système (9). En effet, sous ces mêmes hypothèses, on constate que l'intervalle (20) est inclus dans l'intervalle (11). De ce fait, en réutilisant les expressions (10) et (5), on peut reformuler les intervalles de variations de  $y(t)$  et de  $u(t)$  qui apparaissent dans le corollaire.

L'analyse de ces résultats montre que l'application de la commande saturée permet de maîtriser la variation du taux de production  $u(t)$ , qui est comprise entre 0 et un maximum  $d_{max}$ , tant que la condition  $d_{max} \leq u_{max}$  est vraie. Cela montre que pour répondre à une demande  $d(t)$  variant arbitrairement entre 0 et  $d_{max}$ , sans causer d'engorgement dans les unités de production, il suffit de choisir  $u_{max} = d_{max}$ . Ainsi, il n'est pas nécessaire de surdimensionner les ressources de production en choisissant une capacité de production maximale  $u_{max}$  arbitrairement plus grande que  $d_{max}$ . La commande employée permet aussi de maîtriser la variation du niveau du stock. Les bornes obtenues pour  $y(t)$  étant dépendantes des paramètres de pilotage  $K$  et  $y_c$ , il est alors possible de moduler ces paramètres de façon à ce que l'intervalle de variation du stock corresponde aux attentes et aux spécifications de la stratégie de gestion appliquée. Ceci montre la flexibilité de la loi de commande proposée, et permet de définir les paramètres de commande pour lesquels le système logistique répond positivement aux contraintes et aux spécifications exigées.

#### 4. Commande robuste de la dynamique du système: incertitudes sur le retard

Dans cette section, nous étudions la dynamique du système contrôlé (1)-(5) dans le cas où le délai  $\theta$  est mal connu. Dans ce cas incertain, le retard est estimé dans un intervalle d'incertitude défini par  $[\theta_1, \theta_2]$ ,  $\theta_1$  et  $\theta_2$  étant respectivement les bornes minimale et maximale du retard. Notre but est d'appliquer le contrôleur proposé, de façon à ce qu'il garantisse les mêmes performances obtenues dans le cas nominal concernant le respect des contraintes de positivité et de saturation des stocks et des taux de production, et ce malgré la présence de l'incertitude sur le retard. On parle alors de commande robuste.

##### 4.1. Dynamique du système contrôlé avec incertitudes

L'introduction de l'incertitude sur le retard ne modifie en rien l'expression de la dynamique de  $y(t)$  définie par la relation (1). Elle intervient dans la définition de la

commande (5), où la prédiction  $z(t)$  utilisée est basée sur l'estimation  $\theta_0$  du retard réel  $\theta$ . Cette estimation est choisie dans l'intervalle d'incertitude  $[\theta_1, \theta_2]$ , et la prédiction  $z(t)$  est exprimée par la relation ci-dessous

$$z(t) = y(t) + \int_{t-\theta_0}^t u(\tau) d\tau. \quad (21)$$

En intégrant l'équation (21), entre les instants  $t$  et  $t + \theta$ , et en utilisant l'expression de  $z(t)$ , on constate que  $y(t + \theta)$  s'exprime sous la forme suivante.

$$y(t + \theta) = z(t) - \int_t^{t+\theta} d(\tau) d\tau + \int_{t-\theta}^{t-\theta_0} u(\tau) d\tau. \quad (22)$$

La comparaison de cette dernière expression avec la relation (10), montre que le terme additionnel  $\int_{t-\theta}^{t-\theta_0} u(\tau) d\tau$  correspond à l'erreur induite par l'incertitude sur le retard. En effet, en notant  $\bar{z}(t)$  la prédiction exacte connaissant le retard réel  $\theta$ , et dont la forme est donnée par:  $\bar{z}(t) = y(t) + \int_{t-\theta}^t u(\tau) d\tau$ , ou de façon équivalente

$$\bar{z}(t) = y(t + \theta) + \int_t^{t+\theta} d(\tau) d\tau. \quad (23)$$

Cette dernière peut se réécrire en fonction de la prédiction  $z(t)$  de la façon suivante :

$$\bar{z}(t) = z(t) + \int_{t-\theta}^{t-\theta_0} u(\tau) d\tau. \quad (24)$$

La difficulté de l'analyse de la dynamique du système dans ce cas, vient du fait que la présence de ce terme d'erreur  $\int_{t-\theta}^{t-\theta_0} u(\tau) d\tau$ , ne permet pas de borner  $z(t)$  de façon sans équivoque contrairement à ce que l'on obtient dans le cas nominal. En effet, du fait de la définition de  $u(t)$ , le terme d'erreur dépend implicitement de  $z(t)$  et des deux retards  $\theta$  et  $\theta_0$ . Le retard  $\theta$  n'étant pas connu en temps réel et son estimation  $\theta_0$  étant définie dans l'intervalle  $[\theta_1, \theta_2]$ , les bornes de  $z(t)$  deviennent difficiles à déterminer avec exactitude. Pour pallier à cette difficulté, nous allons utiliser l'expression donnée en (23), avec la définition de  $\bar{z}(t)$ , pour définir la réduction du système retardé (1). Cela nous permettra d'appliquer la même méthodologie de résolution que nous avons appliquée pour le cas nominal, à savoir utiliser la dynamique du système réduit, afin de définir un ensemble  $\mathcal{D}$ -invariant, dans lequel les contraintes du système sont respectées, et les incertitudes sur les retards assimilés. C'est l'objet de la section suivante.

#### 4.2. Paramètres de la commande robuste

Pour étudier la robustesse de la commande, il faut s'assurer que la sortie du système reste effectivement bornée, de façon à conserver la propriété de BIBO-stabilité, et que les contraintes sur  $y(t)$  soient bien respectées. De la même façon que pour le cas nominal, nous utilisons l'équation donnée en (23) qui montre que  $y(t + \theta)$  est borné si  $\bar{z}(t)$  est borné, de sorte que pour tout  $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$

$$\bar{z}(t) \in [\theta_2 d_{max}, y_{max}] \text{ avec } \theta_2 d_{max} \leq y_{max} \quad (25)$$

Au même titre que l'intervalle (11) pour le cas nominal, nous montrons dans ce qui suit, que l'intervalle (25) est  $\mathcal{D}$ -invariant pour le système réduit dont la dynamique est donnée par :

$$\dot{z}(t) = u(t) - d(t), \quad (26)$$

ou plus explicitement, en utilisant la relation (24)

$$\dot{z}(t) = \text{sat}_{[0, u_{max}]} \left[ K \left( y_c - \bar{z}(t) + \int_{t-\theta}^{t-\theta_0} u(\tau) d\tau \right) \right] - d(t). \quad (27)$$

Dans cette expression, notons que le terme intégral d'erreur  $\int_{t-\theta}^{t-\theta_0} u(\tau) d\tau$  peut-être borné de sorte que, pour tout  $\theta_0 \in [\theta_1, \theta_2]$  nous avons

$$\int_{t-\theta}^{t-\theta_0} u(\tau) d\tau \in [(\theta_1 - \theta_0)u_{max}, (\theta_2 - \theta_0)u_{max}] \quad (28)$$

Nous pouvons ainsi résumer nos résultats d'analyse par le théorème suivant.

**THÉORÈME 12.** — *Étant donné un système de la forme (1), avec une incertitude sur le retard réel  $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ ,  $\theta_1$  et  $\theta_2$  étant connus, et soumis à une demande de la forme (4). Une commande de la forme (5)-(21), où  $\theta_0$  est l'estimation du retard, permet de garantir la BIBO-stabilité du système et le respect des contraintes (2) et (3) pour tout  $d(t) \in [0, d_{max}]$  si les conditions suivantes sont vérifiées*

$$d_{max} \leq u_{max}, \quad (29)$$

et

$$\frac{d_{max}}{K} + \theta_2 d_{max} + (\theta_2 - \theta_1)u_{max} \leq y_{max}, \quad (30)$$

*De plus, si les conditions (29) et (30) sont vérifiées, alors les contraintes (2) et (3) sont satisfaites par le contrôleur (5)-(21) si les paramètres de ce dernier sont tels que*

$$\theta_2 d_{max} + \frac{d_{max}}{K} + (\theta_1 - \theta_0)u_{max} \leq y_c \quad (31)$$

et

$$y_c \leq y_{max} - (\theta_2 - \theta_0)u_{max}. \quad (32)$$

**PREUVE 13.** — Les conditions exprimées dans ce théorème résultent des conditions de  $\mathcal{D}$ -invariance de l'intervalle (25). Le système (27) est en effet de la forme générale  $\dot{x}(t) = f(x(t)) - d(t)$ , où  $x(t) = \bar{z}(t)$ . L'application du théorème 6 montre que l'intervalle (25) est  $\mathcal{D}$ -invariant pour le système (27) sous les conditions suivantes :

$$\text{sat}_{[0, u_{\max}]} \left[ K \left( y_c - \theta_2 d_{\max} + \int_{t-\theta}^{t-\theta_0} u(\tau) d\tau \right) \right] \geq d_{\max} \quad (33)$$

et

$$\text{sat}_{[0, u_{\max}]} \left[ K \left( y_c - y_{\max} + \int_{t-\theta}^{t-\theta_0} u(\tau) d\tau \right) \right] \leq 0 \quad (34)$$

Les conditions du théorème 12 sont obtenues en appliquant la même méthodologie que dans la preuve 9 du théorème 8, en considérant les bornes de l'intervalle (28) d'évolution du terme d'erreur  $\int_{t-\theta}^{t-\theta_0} u(\tau) d\tau$ , qui apparaît dans les équations (33) et (34). ■

Comme pour le cas nominal, les résultats de cette section s'interprètent dans le domaine de la logistique comme étant des aides au pilotage et au dimensionnement du système considéré. En effet, les conditions données établissent comment il convient de choisir les paramètres de fonctionnement, en fonction des capacités disponibles de production et de stockage. Ces conditions assurent le respect des contraintes et des spécifications de fonctionnement données, même en présence d'incertitude sur le délai estimé. Cela dit, bien que l'effet de l'incertitude soit maîtrisé concernant la stabilité et le respect des contraintes de positivité, contrairement au cas nominal, où nous avons pu établir que le surdimensionnement des ressources n'est pas nécessaire, la robustesse apporté par la commande dans ce cas incertain nécessite en effet des ressource plus importantes. Ceci est l'objet de la section suivante.

#### 4.3. Dynamique du système contrôlé avec incertitudes sur le retard

Dans cette section, nous analysons le comportement dynamique du système en boucle fermée. Sous les hypothèses du théorème 12, nous allons formuler les bornes atteintes par les variables de flux  $y(t)$  et  $u(t)$ , afin d'identifier les répercussions réelles des incertitudes du retard sur le système. Le corollaire qui va suivre résume ces résultats.

PROPOSITION 14. — *Étant donné le système de la forme (1) et une perturbation  $d(t)$  de la forme (4), avec une commande saturée de la forme (5)-(21) vérifiant les hypothèses du théorème 12, les inclusions suivantes sont vraies*

i.  $u(t) \in [0, \omega]$ ,

ii.  $y(t) \in \left[ y_c - \frac{d_{\max}}{K} + \theta_2 d_{\max} + (\theta_1 - \theta_0)\omega, (\theta_2 - \theta_0)\omega \right]$ ,

avec  $\omega$  défini par :

$$\omega = \begin{cases} u_{\max} & \text{si } K\gamma \geq \frac{u_{\max} - d_{\max}}{u_{\max}} \\ \frac{d_{\max}}{1 - K\gamma} & \text{si } K\gamma < \frac{u_{\max} - d_{\max}}{u_{\max}} \end{cases} \quad (35)$$

et  $\gamma = \theta_2 - \theta_1$

PREUVE 15. — Pour démontrer ces résultats, on montre dans un premier temps que  $u(t)$  peut être bornée dans un intervalle  $[0, \alpha_i]$  pour tout  $t \geq 0$  et  $i \geq 0$ , où  $\alpha_i$  est une séquence récursive définie par

$$\alpha_i: \begin{cases} \alpha_0 = u_{max} & \text{pour } i = 0 \\ \alpha_{i+1} = \min(u_{max}, d_{max} + K\gamma\alpha_i) & \text{pour } i \geq 0 \end{cases} \quad (36)$$

Puis, dans un second temps, on montre que  $\omega$  tel que défini dans la proposition, n'est autre que la limite vers laquelle converge la séquence  $\alpha_i$  lorsque  $i$  tend vers l'infini.

Nous utilisons une démonstration par récurrence. On suppose que  $u(t) \in [0, \alpha_i]$ . On constate que cette propriété est vérifiée pour  $i = 0$ , du fait de la définition de la fonction sat. En utilisant ces nouvelles bornes de  $u(t)$ , l'intervalle (27) d'évolution du terme d'incertitude  $\int_{t-\theta}^{t-\theta_0} u(\tau) d\tau$  se réécrit  $[(\theta_1 - \theta_0)\alpha_i, (\theta_2 - \theta_0)\alpha_i]$ . En remplaçant les bornes de cet intervalle dans l'expression (26) de  $\bar{z}(t)$ , on peut déduire des bornes minimale et maximale pour  $\bar{z}(t)$ , de sorte que

$$\bar{z}(t) \in \left[ y_c - \frac{d_{max}}{K} + (\theta_1 - \theta_0)\alpha_i, (\theta_2 - \theta_0)\alpha_i \right],$$

et de la même façon en remplaçant ces nouvelles bornes de  $\bar{z}(t)$  dans l'expression (24) de  $z(t)$ , on constate que  $z(t)$  est borné dans l'intervalle  $[z_1, z_2]$  avec  $z_1 = y_c - \frac{d_{max}}{K} + (\theta_1 - \theta_0)\alpha_i - (\theta_2 - \theta_0)\alpha_i$ , et  $z_2 = y_c + (\theta_2 - \theta_0)\alpha_i - (\theta_1 - \theta_0)\alpha_i$ , ce qui après simplification, mène à l'expression suivante.

$$z(t) \in \left[ y_c - \frac{d_{max}}{K} \gamma \alpha_i, y_c + \gamma \alpha_i \right].$$

Enfin, en utilisant la définition (5) de  $z(t)$ , on peut formuler ses bornes en remarquant successivement que

$$y_c - z(t) \in \left[ -\gamma \alpha_i, \frac{d_{max}}{K} + \gamma \alpha_i \right]$$

et que la quantité  $-\gamma \alpha_i$  étant négative, par la définition de la fonction sat,  $u(t)$  vérifie alors l'inclusion  $u(t) \in [0, \min(u_{max}, d_{max} + K\gamma\alpha_i)]$ , dans laquelle le terme  $\min(u_{max}, d_{max} + K\gamma\alpha_i)$  correspond à la séquence  $\alpha_i$ . L'hypothèse de la récurrence  $u(t) \in [0, u_{max}]$  est donc bien établie.

Maintenant intéressons-nous à la séquence  $\alpha_i$ . Pour  $i = 0$ ,  $\alpha_i = u_{max}$ . Pour  $i = 1$ ,  $\alpha_1 = \min(u_{max}, d_{max} + K\gamma\alpha_0)$ , c'est-à-dire

$$\alpha_1 = \begin{cases} u_{max} & \text{si } u_{max} \leq d_{max} + K\gamma u_{max} \\ d_{max} + K\gamma u_{max} & \text{si } u_{max} > d_{max} + K\gamma u_{max}. \end{cases}$$

En réitérant pour  $i = 2$ , on obtient  $\alpha_2 = \min(u_{max}, d_{max} + K\gamma\alpha_1)$ , c'est-à-dire

$$\alpha_2 = \begin{cases} u_{max} & \text{si } u_{max} \leq d_{max} + K\gamma\alpha_1 \\ d_{max} + K\gamma\alpha_1 & \text{si } u_{max} > d_{max} + K\gamma\alpha_1. \end{cases}$$



Remarquons que la condition  $u_{max} \leq d_{max} + K\gamma\alpha_1$  se réécrit

$$u_{max} \leq d_{max} + K\gamma \min(u_{max}, d_{max} + K\gamma u_{max}).$$

Or, nous avons déjà établi à l'itération  $i = 1$ , que si  $u_{max} > d_{max} + K\gamma u_{max}$  ou de façon équivalente,  $K\gamma < 1 - \frac{d_{max}}{u_{max}}$ , alors  $\min(u_{max}, d_{max} + K\gamma u_{max}) = d_{max} + K\gamma u_{max}$ . On peut alors de nouveau formuler  $\alpha_2$  qui s'écrit:

$$\alpha_2 = \begin{cases} u_{max} & \text{si } K\gamma \geq 1 - \frac{d_{max}}{u_{max}} \\ d_{max} + K\gamma d_{max} + (K\gamma)^2 u_{max} & \text{si } K\gamma < 1 - \frac{d_{max}}{u_{max}}. \end{cases}$$

De la même façon, et en utilisant les mêmes arguments, on peut voir que

$$\alpha_{i+1} = \begin{cases} u_{max} & \text{si } K\gamma \geq 1 - \frac{d_{max}}{u_{max}} \\ d_{max} + K\gamma\alpha_i & \text{si } K\gamma < 1 - \frac{d_{max}}{u_{max}}. \end{cases}$$

où  $d_{max} + K\gamma\alpha_i = d_{max}(1 + K\gamma + (K\gamma)^2 + \dots + (K\gamma)^i) + (K\gamma)^{i+1}u_{max}$ .

De plus, sous l'hypothèse de la proposition que  $d_{max} \leq u_{max}$ , on constate que  $K\gamma < 1 - \frac{d_{max}}{u_{max}}$  et de ce fait,  $0 < 1 - K\gamma < 1$ . Sous cette condition, lorsque  $i$  tend vers l'infini, on obtient que  $1 + K\gamma + (K\gamma)^2 + \dots + (K\gamma)^i = \frac{1}{1-K\gamma}$ , et on vérifie alors que  $\alpha_i$  vaut  $\frac{d_{max}}{1-K\gamma} = \omega$ . L'intervalle de variation de  $y(t)$  se déduit en remplaçant les nouvelles bornes de  $u(t)$  et de  $\bar{z}(t)$  dans l'expression (24). ■

Les résultats de cette section permettent de caractériser les bornes atteintes par la variable de commande  $u(t)$  et la variable du niveau du stock  $y(t)$ . Ces bornes dépendent étroitement des paramètres de commandes  $K$  et  $\theta_0$  qui est l'estimation du retard réel. Elles dépendent également des valeurs  $\theta_1$  et  $\theta_2$  qui caractérisent l'intervalle d'incertitude du retard, et de la demande maximale  $d_{max}$ . Contrairement aux cas nominal, ces résultats montrent que la présence d'incertitudes sur le retard implique une augmentation des capacités de production et de stockage. En effet, en comparaison avec le cas nominal, où  $u(t)$  varie entre 0 et  $d_{max}$ , dans le cas présent la capacité de production doit dans certains cas (suivant la valeur de  $K$  et des retards) être supérieure à la valeur de la demande pour pouvoir  $y$  répondre. La même remarque est formulée pour la valeur de  $y_{max}$  qui, à paramètres de valeurs égales ( $K$  et  $y_c$ ) avec ceux du cas nominal, apparaît comme plus grande dans le cas avec incertitude. La robustesse de la loi de commande vis-à-vis des incertitudes sur le retard, se paie donc par un investissement plus important sur les ressources du système. Les résultats obtenus permettent de définir avec précision ces besoins, en quantifiant les capacités de production et de stockage minimales, nécessaires pour garantir le bon fonctionnement du système. En plus d'être des outils de pilotage du

système logistique, les résultats et les conditions obtenus sont aussi des outils d'aide à la conception de ces systèmes.

### 5. Exemple de simulation

Dans cette section, nous illustrons les résultats obtenus dans cet article pour un système logistique basique inspiré des travaux de (Riddalls *et al.*, 2000). Pour cela, nous utilisons un modèle de simulation Matlab et Simulink, avec les paramètres suivants du système. La demande client est modélisée par un signal rectangulaire intervenant entre 15 et 45 unités de temps, avec une amplitude maximale  $d_{\max} = 240$ . Les capacités maximum de stockage et de production sont  $y_{\max} = 3000$  et  $u_{\max} = 300$  respectivement. Les paramètres du contrôleur  $K$  et  $y_c$  sont déterminés en fonction des théorèmes 1 et 2. En effet, commençons nos simulations avec un cas nominal pour lequel le retard  $\theta = 6$ . On choisit  $K = 0,6$  et conformément à la condition (15), nous choisissons  $y_c = 1840$ . Aussi, les conditions initiales sont admissibles et choisies de façon à éviter les comportements transitoires du système, notre intérêt étant porté sur le régime établi. Les résultats de cette première simulation sont présentés sur la figure 1.

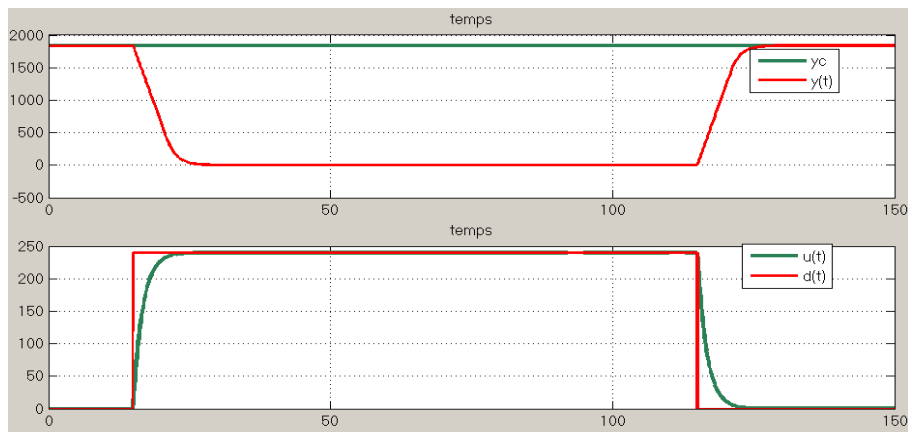


Figure 1. Résultats obtenus :  $y_c = 1840$  - cas nominal

On peut voir que les bornes données dans le corollaire 10 sont atteintes de façon exacte. Effectivement, pour ces valeurs des paramètres, on voit bien que  $y(t) \in [0, 1840]$  et  $u(t) \in [0, 240]$ . On peut aussi constater que la compensation du retard est optimale dans le sens où les variations du niveau de stock sont entièrement maîtrisées, éliminant ainsi l'effet Bullwhip. La demande est totalement satisfaite et les contraintes de positivité, de capacité ainsi que de saturation sont respectées.

La seconde partie des simulations porte sur le cas incertain. Cette fois-ci, les paramètres du contrôleur sont choisis en fonction des conditions du théorème 12. Le

retard incertain  $\theta$  appartient à l'intervalle  $[\theta_1, \theta_2] = [6, 8]$ , et le retard estimé est  $\theta_0 = 7$ . On vérifie évidemment que les valeurs de  $y_{\max}$  et  $u_{\max}$  précédentes sont bien admissibles, ce qui est bien le cas. Il suffit alors de choisir  $K$  et  $y_c$ . Dans notre cas, nous gardons  $K = 0,6$ , mais pour répondre aux conditions de théorème 12,  $y_c$  doit être augmenté pour anticiper les effets des incertitudes. On choisit  $y_c = 2620$ .

Sur la figure 2, où le retard réel est différent de son estimation, on voit que les réponses du système à la même demande précédente présentent des fluctuations, avec un premier dépassement de près de 21 % de la valeur maximale de la demande. Cependant, ces fluctuations sont décroissantes, et s'estompent après une période transitoire, ce qui là aussi permet de maîtriser l'effet Bullwhip qui pourrait en résulter. Les contraintes de positivité et de saturation sont respectées, aussi bien sur le niveau du stock que sur le signal de commande. Ce résultat illustre la robustesse de la loi de commande saturée face aux incertitudes de modélisation et sur le retard.

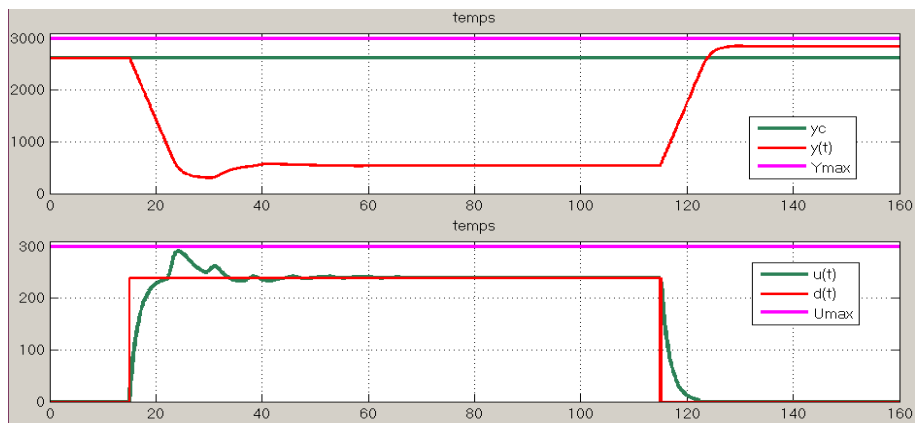


Figure 2. Résultats obtenus :  $y_c = 2620$  et  $\theta = 7$ ,  $\theta_0 = 6$

## 6. Conclusion et perspectives

Les résultats présentés dans cet article concernent l'étude et la commande robuste de système logistique, en présence d'incertitudes sur les délais et d'une demande client bornée mais inconnue d'avance. La méthode développée est basée sur l'utilisation de méthodes bien connues dans le domaine de l'automatique et de la régulation des systèmes à retards. Leur application cependant reste inédite pour la résolution de problèmes non linéaires contraints de ce type, et pour une application aux systèmes logistiques en particulier, où elles se présentent comme des outils d'aide au pilotage et à la conception de ce type de systèmes. Par cette approche, nous avons pu démontrer l'importance et l'impact des retards sur la dynamique de ces systèmes. La connaissance exacte des délais mène à une compensation complète de leurs effets sur le système logistique et de ce fait, à l'élimination totale de l'effet Bullwhip.

En présence d'incertitudes, la loi de commande proposée se révèle être robuste vis-à-vis de ces incertitudes. En effet, nous avons vu à travers les résultats de simulation, que les erreurs d'estimation du retard engendrent effectivement l'apparition de fluctuations sur le niveau de stock et de production. Cela dit, contrairement à l'effet Bullwhip, ces fluctuations ne sont pas d'amplitude croissante. La loi de commande mise en œuvre, permet de neutraliser ces fluctuations tout en répondant efficacement aux contraintes et aux spécifications du système. L'étude présentée dans cet article concerne un système logistique basique. Parmi les extensions de ce travail, vient la commande robuste de systèmes logistiques plus complexes, à savoir des chaînes logistiques en cascade ou en réseau avec des incertitudes sur les retards. En effet, des premiers résultats concluants ont été présentés pour des chaînes logistiques en cascade (Moussaoui *et al.*, 2014), en considérant des retards connus sans incertitudes, avec une élimination totale de l'effet Bullwhip le long de la chaîne. Notre objectif est d'étendre ces résultats en prenant en compte des incertitudes sur les retards des différents niveaux de la chaîne, afin d'étudier les performances du système dans cette configuration, notamment concernant l'effet Bullwhip.

### Bibliographie

- Artstein Z. (1982). Linear systems with delayed controls: A reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*. Vol. 27, n° 4, p. 869-879.
- Blanchini F. (1999). Set invariance in control. Survey paper. *Automatica*, vol. 35, n°11, p. 1747-1767.
- Edghill J.S., Towill D.R., (1989). The use of systems dynamics in manufacturing systems. *Transaction of the Institute of Measurement and Control*, vol. 11, n° 4, p. 208-216.
- Forrester J. W. (1961). *Industrial Dynamics*. Cambridge MA: MIT press. Hu T. L. Z. (2001). *Control Systems with Actuator Saturation: Analysis and Design*. Birkhäuser, Boston.
- John S., Naim M.M., Towill D.R. (1994). Dynamic analysis of a WIP compensated decision support system. *International Journal of Management Systems and Design*, vol. 1, n° 4, p. 283-297.
- Manitius A., Olbrot A. (1979). Finite spectrum assignment problems for systems with delays. *IEEE Trans. Automatic Control*. 24, p. 541-553.
- Milani B.E.A. (1994). Robust linear regulator design for continuous-time systems under state and control constraints. *33rd IEEE Conference on Decision and Control*. Vol. 3, p. 2067-2068.
- Mirkin L., Raskin N. (2003). Every stabilizing dead-time controller has an observer predictor-based structure. *Automatica*. Vol. 39, n°10, p. 1747-1754.
- Moussaoui C., Abbou R., Loiseau JJ. (2014). Controller Design for a Class of Delayed and Constrained Systems: Application to Supply Chains. In *Low Complexity Controllers for Time-Delay Systems*. *Advances in Delays and Dynamics*, vol. 2, p. 61-75.
- Nagumo M. (1942). Über die Lage der Integalkurven gewöhnlicher Differentialgleichungen. *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan*. p. 551-559.

- Riddalls C.E., Bennett S. and Tipi N.S. (2000). Modeling the dynamics of supply chains. *International Journal of System Science*, 31, p. 969- 976.
- Simon H. A. (1952). On the application of servomechanism theory in the study of production control. *Econometrica*, vol. 20, p. 247-268.
- Sipahi R., Delice I.I. (2010). Stability of Inventory Dynamics in Supply Chains with Three Delays. *International Journal of Production Economics*, vol. 123, n°1, p. 107-117.
- Sterman J. D. (1989). Modelling managerial behaviour misinterpretations of feedback in a dynamic decision-making experiment. *Management science*, vol.35, n°3, p. 321-339.
- Towill D.R. (1982). Dynamic analysis of an inventory and order based production control system. *International Journal of Production Research*, vol. 20, n° 6, p. 671-687.
- Wang X., Disney S.M. and Wang J. (2012). Stability analysis of constrained inventory systems with transportation delay. *European Journal of Operational Research*, vol. 223, n° 1, p. 86-95.
- Wang X., Disney S.M. and Wang J. (2014). Exploring the oscillatory dynamics of a forbidden returns inventory system. *International Journal of Production Economics*, p. 3-12.
- Warburton R. D. H. (2004). An exact analytical solution to the production inventory control problem. *International Journal of Production Economics*, 92, p. 81-96.
- Manitius A., and Olbrot A. (1979). Finite spectrum assignment problems for systems with delays. *IEEE Trans. Automatic Control*, 24, p. 541-553.
- Mirkin L., and Raskin N. (2003). Every stabilizing dead time controller has an observer predictor-based structure. *Automatica*, vol. 39, n° 10, p. 1747-1754.
- Tarbouriech S., Garcia G., Da Silva J., and Queinnec I. (2011). *Stability and Stabilization of Linear Systems with Saturating Actuators*. Springer.
- Warburton R. D. H., Disney S. M., Towill D. R. and Hodgson J. P. E. (2004). Technical Note: Further insights into 'the stability of supply chains', *International Journal of Production Research*, vol. 42, n° 3, p. 639-648.

Article reçu le 18 mai 2015

Accepté le 5 novembre 2015

