Le problème de livraisons jointes multiproduits multisites

Mouna Rahmouni, Jean-Claude Hennet

Aix Marseille University, CNRS, ENSAM, Toulon University, LSIS UMR 7296, 13397, Marseille, France
mouna.rahmouni@gmail.com ; jean-claude.hennet@lsis.org

RÉSUMÉ. Le problème de livraisons jointes de produits (JDP) consiste à planifier les livraisons de différents produits aux différents sites de consommation ou de distribution en traitant les problèmes de groupement, de livraison et de stockage. Il s'agit de construire des tournées de livraison sur un horizon de planification, en satisfaisant les demandes et en minimisant le coût total de commande, de livraison et de stockage. Les coûts fixes de commande portent d'une part sur le lancement d'une tournée, d'autre part sur chaque couple (produit, site) présent dans la tournée. Dans notre approche, le problème est formulé en temps discret et nous choisissons comme période type commune de cyclicité un multiple de la période élémentaire, et cette période type sert d'horizon de planification. Ainsi, les livraisons restent périodiques à travers la répétition de l'horizon de planification, mais les livraisons pendant l'horizon de planification ne sont pas contraintes à être périodiques. Les résultats numériques montrent en particulier la supériorité de cette approche sur une solution cyclique pour chaque couple (produit, site).

ABSTRACT. The joint delivery problem of products (JDP) consists in planning deliveries of different products to different consumption or distribution sites by treating the grouping, delivery and storage problems. It comes to building the delivery schedule over the planning horizon, to satisfy demands while minimizing the total cost of ordering, delivery and storage. Fixed ordering costs are associated with each tour launching and each couple (product, site) present in the tour. In our approach, the problem is formulated in discrete time and we choose a multiple of the elementary period as a common cycle time, which is the considered planning horizon. Thus, deliveries stay periodic through repetition of the planning horizon, but deliveries during the planning horizon are not constrained to be periodic. The numerical results show in particular that the results of this approach are better than the solution with periodical delivery for each couple (product, site).

MOTS-CLÉS : problèmes de livraisons conjointes, problème de réapprovisionnement conjoint, problèmes de dimensionnement des lots, programmation linéaire.

KEYWORDS: joint delivery problem, joint replenishment problem, lot sizing problem, linear programming.

DOI:10.3166/JESA.49.659-676 © Lavoisier 2016

1. Introduction

Le couplage entre production et transport est une réalité industrielle dont l'importance est souvent sous-estimée dans les modèles de planification et de pilotage. En gestion des chaînes logistiques, il s'agit de synchroniser les productions et les approvisionnements de différentes entreprises en réseau, de façon à limiter les stocks de produits en amont, en interne et en sortie de chaque entreprise. Ainsi, ce couplage joue un rôle essentiel sur les performances des chaînes logistiques, à travers la chaîne de valeur et les critères économiques mais aussi pour les critères de qualité et les critères énergétiques, qui interviennent directement dans les objectifs d'économie de transport et de développement durable.

La principale raison de cette lacune tient à la complexité des modèles de planification de la production et du transport. Celle-ci est liée à la grande variété des produits, aux caractères aléatoires ou incertains des temps de cycle et des durées d'approvisionnement, ainsi qu'à la nécessité d'une prévision à moyen terme des flux et des activités. En outre, le caractère combinatoire des problèmes de gestion de production, en particulier à travers l'existence de différentes gammes de fabrication, se combine aux caractères eux aussi combinatoires des problèmes de transport, liés par exemple à la multimodalité (bateau, camions, trains…) et à l'existence de nombreuses possibilités envisageables (véhicules, routes, destinations…).

Pour concilier la complexité des systèmes et le caractère multicritère des décisions à prendre, la décomposition est certes un outil privilégié, mais elle peut s'appliquer plus facilement aux objets, au temps et à l'espace qu'aux aspects fonctionnels.

Dans le cadre général des réseaux d'entreprises multiproduits et multisites, un des problèmes mathématiques génériques est le problème de livraison jointe de produits (*Joint Delivery Problem,* JDP), intégrant la gestion de stocks et l'optimisation des tournées. Ce problème peut être analysé du point de vue du fournisseur qui gère les stocks de ses clients, en utilisant une approche intégrée du type VMI (*Vendor Managed Inventory*), devenue très courante lors de la dernière décennie (Zheng *et al.,* 2009), ou dans un cadre multi-acteur où les acheteurs coopèrent en groupant leurs commandes, comme dans (Triqui et Hennet, 2012).

Au-delà des techniques d'optimisation statique, on cherche à construire des politiques d'approvisionnement dynamiques, ayant par exemple un caractère cyclique, comme dans les méthodes de résolution du problème de réapprovisionnement joint (JRP).

Dans cette étude, l'hypothèse classique de livraisons périodiques pour chaque couple (produit, site) a été levée afin de mieux utiliser les degrés de liberté dans le programme de livraison sur un cycle commun, utilisé dans l'optimisation comme horizon de planification. En supposant fixé cet horizon de planification, la formulation proposée pour le modèle de livraison jointe (JDP) prend la forme d'une extension multisite du problème LSP (*Lot Sizing Problem*) multiproduit classique (Sambasivan et Yahya, 2005 ; Jans et Degraeve, 2008 ; Deleplanque *et al.,* 2012), mais avec des coûts de set-up majeurs et mineurs. C'est un problème de programmation linéaire mixte en nombres entiers (MILP) ayant des variables réelles et des variables binaires. En tant que tel, il est connu comme problème NP-difficile.

Les modèles de dimensionnement de lots (LSP) sont souvent utilisés dans la littérature pour gérer les tailles des lots lors de la production afin d'obtenir leur séquence optimale qui minimise la somme des coûts de set-up et d'inventaire. Certaines recherches sont focalisées sur le développement d'un modèle de LSP classique à produit unique (Brahimi *et al.,* 2006). L'objectif de ce modèle est de déterminer les périodes de production des lots de ce produit et les quantités produites durant cette période en minimisant le coût total de set-up et d'inventaire.

Pour représenter les situations réelles avec plus de détails et d'une manière précise, les modèles LSP multiproduits ont besoin d'intégrer les contraintes de capacités de transport (Norden et Velde, 2005) et de ressources (Hindi, 1995 ; (Millar et Yang, 1993). Pour la résolution de ce type de problème, certains algorithmes évolutionnaires ont été développés, tels que les algorithmes génétiques, qui permettent de résoudre le problème de LSP multiniveau avec coûts de set-up variables dans le temps (Dellaert *et al.,* 2000) et le problème de LSP classique avec contrainte de capacité de ressources (Xie, et Dong, 2002).

Cependant, les modèles de LSP développés habituellement sont orientés vers la planification de la production par lots. Il s'agit de déterminer les quantités produites à chaque période de l'horizon de planification. Il ne s'agit pas en fait de regrouper les différents produits en satisfaisant toutes les demandes dans un cycle commun de production ou de livraison, comme dans notre modèle.

Le modèle à cycle commun proposé ici permet d'organiser les tournées de livraison pour les dates T, $2T$, ... pT, de façon à minimiser la fonction de coût total sur l'horizon de temps, pT, tout en satisfaisant la demande et les contraintes de capacité de transport et de stockage. Pour chaque produit et sur chaque site, les niveaux des stocks à la fin de l'horizon sont imposés égaux aux niveaux initiaux, afin de construire une politique d'approvisionnement qui peut être répétée périodiquement avec une périodicité pT.

Cet article est organisé comme suit : dans la deuxième section, nous développons et expliquons le modèle de gestion des livraisons jointes proposé (JDP) ainsi que son extension prenant en compte le choix des tournées (JDPR). Ces modèles sont validés par les résultats numériques de la troisième section. Enfin, nous concluons en donnant quelques perspectives d'avenir sur le problème posé et les modèles étudiés.

2. Les modèles de JDP

Considérons un réseau de livraison de n produits à m sites de vente à partir d'un entrepôt unique. Les demandes pour les différents produits sont supposées indépendantes et sans substitution. Le problème JDP est donc multiproduit multisite avec groupement indirect des livraisons, sous contraintes de transport et de stockage dans les différents sites de vente.

2.1. La formulation de base du modèle JDP

Chaque site j est supposé avoir un taux de demande constant, noté D_{ij}, pour le produit i. Chaque tournée a un coût fixe, noté S. Chaque commande (*i,j*) a un coût fixe additionnel de commande, noté s_{ij}, indépendant de la quantité commandée et un coût variable $c_{ij} q_{ijk}$, proportionnel à la quantité livrée, q_{ijk} . Le modèle de base ne considère pas explicitement les tournées. Le problème de choix des tournées sera intégré dans le modèle JDPR (*Joint Delivery Problem with Routing*).

Les notations du modèle de base sont les suivantes, tous les coûts étant supposés positifs :

n: nombre de produits

m: nombre de sites

p: nombre de périodes élémentaires par cycle de réapprovisionnement

T: période élémentaire du plan d'approvisionnement

D_{ij}: taux de demande de produit *i* au site *j*.

h_{ij}: coût unitaire de stockage du produit *i* au site *j* par unité de temps

x_{ijk}: variable binaire égale à 1 si la demande de produit *i* au site *j* est livrée au tour *k*

u_k: variable binaire égale à 1 si le tour *k* est actif

q_{ijk}: quantité de produit *i* livrée au site *j* au tour *k*

S: coût fixe de livraison

s_{ij}: coût fixe additionnel de livraison par produit *i* et par site *j*

c_{ij}: coût de livraison du produit *i* au site *j* par unité de produit et par unité de temps

z_{ijk}: quantité de produit *i* stockée au site *j* au tour *k* avant livraison du tour *k*

Z_{ij}: capacité de stockage du produit *i* dans le site *j* (mesurée en nombre de produits)

v_i: volume de produit *i*

z_i *: volume unitaire du produit i en stock*

V: capacité de livraison à chaque tour.

En notant HC le coût total de stockage pendant l'horizon de planification *pT*, la fonction de coût total sous l'horizon *pT* s'écrit :

$$TC=\sum_{k=1}^{p} u_k S + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}(x_{ijk}s_{ij} + c_{ij}q_{ijk}) + HC \tag{1}$$

sous les contraintes

$$\forall\ i,\ j,\ \sum_{k=1}^{p} q_{ijk} = D_{ij}\, pT \tag{2}$$

$$\forall \; i,\, j,\, k,\; q_{ijk} \le x_{ijk} D_{ij}\, pT \tag{3}$$

$$\forall \; i,\, j,\, k,\; z_{ijk+1} - z_{ijk} - q_{ijk} = -D_{ij} T \tag{4}$$

$$\forall \; i,\, j,\, k,\; z_i q_{ijk} \le Z_{ij} \tag{5}$$

$$\forall \; k,\; \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} v_i q_{ijk} \le V u_k \tag{6}$$

$$\forall \, i,\, j,\, k,\; x_{ijk} \in \{0,1\}, u_k \in \{0,1\}, q_{ijk} \ge 0, z_{ijk} \ge 0 \tag{7}$$

La fonction objective (1) minimise la somme des coûts de commande, de livraison et de stockage durant l'horizon de temps de planification *pT*. Le terme de coût total de stockage, HC, sera calculé de façon détaillée à la section 2.2.

L'équation (4) d'évolution des stocks, couplée avec les contraintes de non-négativité (7), garantit la satisfaction de la demande à chaque période pour chaque couple *(i,j)*. En imposant de plus la contrainte (2), on impose la périodicité du plan de livraison, qui pourra être reproduit à l'identique sur l'horizon [*(p+1)T 2pT*] et sur les cycles suivants, tant que les paramètres du problème gardent la même valeur.

Les contraintes logiques (3) relient les quantités de livraison q_{ijk} aux variables binaires de décision x_{ijk}, comme dans la plupart des modèles de dimensionnement de lots (LSP). Les contraintes (5) représentent les contraintes de capacité de stockage en supposant que chaque produit *i* a un lieu de stockage spécifique dans chaque site *j*. Sous d'autres hypothèses, comme des entrepôts de stockage communs à plusieurs produits, les contraintes de stockage seraient bien sur différentes mais resteraient linéaires. Les contraintes (6) représentent les contraintes de capacité de livraison à chaque tour *k* si le tour est actif ($u_k = 1$). On peut noter que les variables binaires x_{ijk} et u_k doivent aussi satisfaire les contraintes suivantes :

$$\forall \; i,\, j,\, k,\; x_{ijk} \le u_k \tag{8}$$

Mais les contraintes (8) peuvent être relâchées dans la mesure où elles sont impliquées par la conjonction des contraintes (3) et (6). En effet, $u_k = 0$ implique par (6) $q_{ijk} = 0 \;\; \forall \; i,\, j$. Dans ce cas, d'après (3), $x_{ijk} = 0 \;\; \forall \; i,\, j$ est admissible et donc optimal d'après l'expression du critère, dans lequel tous les coûts sont supposés positifs on nuls.

2.2. Détermination du coût total de stockage

Pour déterminer la fonction de coût total de stockage, HC, considérons le niveau de stock optimal à la période courante k, juste après la date de livraison. Il vaut : $z_{ijk} + q_{ijk}$ avec : $D_{ij}T \leq z_{ijk} + q_{ijk} \leq pD_{ij}T$. D'après une propriété classique en gestion de stocks, toute livraison ne peut intervenir que lorsque le niveau de stock est minimal (0 en l'absence de stock de sécurité). Elle doit couvrir la demande sur un nombre entier de périodes. Si $z_{i\,jk} \neq 0$ alors $q_{ijk} = 0$. Sinon, $z_{i\,jk} = 0$, la livraison est effectuée au tour k, le terme q_{ijk} est égal à rD_{ij} pour une valeur entière de r , $1 \leq r \leq p$. Le niveau de stock en fin de période k vaut :

$$z_{ijk+1} = z_{ijk} + q_{ijk} - D_{ij}T \tag{9}$$

En supposant que les livraisons arrivent en début de période, le niveau de stock moyen pendant la période k peut s'écrire :

$$\frac{z_{ijk} + q_{ijk} + z_{ijk+1}}{2} = z_{ijk} + q_{ijk} - \frac{D_{ij}T}{2} \tag{10}$$

On peut donc écrire :

$$HC = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} h_{ij} \left(\sum_{k=1}^{p} \left(z_{ijk} + q_{ijk} \right) - \frac{pD_{ij}T}{2} \right). \tag{11}$$

Or d'après l'équation (2), la quantité totale livrée sur l'horizon est fixe, ce qui implique :

$$HC = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} h_{ij} z_{ijk} + \frac{pT}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} h_{ij} D_{ij} \tag{12}$$

La fonction de coût total sous l'horizon pT s'écrit donc :

$$TC = \sum_{k=1}^{p} u_k S + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} x_{ijk} s_{ij} + pT\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij} D_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} h_{ij} z_{ijk} + \frac{pT}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} h_{ij} D_{ij} \tag{13}$$

Comme le terme $pT\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(c_{ij} + \frac{h_{ij}}{2})D_{ij}$ est constant, on peut minimiser de façon équivalente le coût total réduit suivant :

$$OC = \sum_{k=1}^{p} u_k S + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} x_{ijk} s_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} h_{ij} z_{ijk} \tag{14}$$

Le problème JDP peut donc être résolu par programmation linéaire mixte en minimisant par rapport aux variables $u_k, x_{ijk}, z_{ijk}, q_{ijk}$ la fonction de coût (14) sous les contraintes (2)-(7).

2.3. Formulation étendue

Dans la formulation précédente du problème JDP, le caractère multi-site n'apparait pas clairement, ou plutôt tous les couples *(i,j)* sont indépendants entre eux et donc assimilables à des produits différents. Pour indiquer que des produits *(i,j)* et *(i',j)* sont livrés au même site *j* et utiliser cette propriété dans le problème d'optimisation, il est nécessaire d'expliciter les routages et d'intégrer leur coût dans la fonction à optimiser. De nombreux auteurs se sont intéressés à ce problème dans le cadre du problème IRP (*Inventory Routing Problem*) introduit par Bell *et al.* (1983). Ce problème vise à coupler les décisions de livraison et de routage. Son extrême complexité vient du fait que les décisions de routage sont généralement optimisées pour chaque tournée (Coelho *et al.,* 2012). L'approche que nous proposons repose sur les hypothèses que les coûts des trajets ne varient pas dans le temps et que le nombre de sites n'est pas très grand (10 au maximum). Il est alors possible de résoudre a priori tous les problèmes de voyageur de commerce (TSP) associés à tous les sous-ensembles de sites. Dans les cas les plus simples, le problème TSP peut être résolu par énumération. Mais il existe aussi des méthodes exactes très performantes de résolution du TSP déterministe, comme la méthode « Concorde », proposée par Appelgate *et al.,* (2002).

Soit donc *S(l)* un sous-ensemble quelconque de sites. Le nombre total de sous-ensembles non vides est $M = 2^m - 1$. On suppose que le coût minimal de transport C_l a été calculé pour chaque sous-ensemble *S(l)* par résolution du TSP associé. On introduit alors les variables logiques y_{lk} définis par :

$$\begin{cases} y_{lk} = 1 \text{ si le sous-ensemble de sites } l \text{ est choisi} \\ \text{pour le tour } k \\ y_{lk} = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Pour relier les variables binaires de sous-ensembles aux variables logiques de sites, on peut noter que tous les sites du sous-ensemble peuvent être livrés, et qu'un site non livré ne peut pas appartenir au sous-ensemble retenu. Pour représenter ces relations, nous introduisons aussi des variables logiques associées aux sites, w_{jk}, définies par:

$$\begin{cases} w_{jk} = 1 \text{ si le site j est visité au tour } k \\ w_{jk} = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Les relations couplant les variables logiques peuvent alors s'écrire ainsi :

$$\forall \ i,\ j,\ k,\ x_{ijk} \le w_{jk} \tag{15}$$

$$\forall k, \forall l \in \{1,\cdots,M\}, \begin{cases} \forall j \in S(l),\ y_{lk} \le w_{jk} \\ \forall j \notin S(l),\ w_{jk} \le 1 - y_{lk} \end{cases} \tag{16}$$

et

$$\forall \ k, \forall \ l \in \{1,\cdots,M\},\ y_{lk} \le u_k \tag{17}$$

Le problème de livraisons jointes avec choix des tournées, noté JDPR (*Joint Delivery Problem with Routing*) se formule ainsi :

$$\underset{u_k, x_{ijk}, z_{ijk}, y_{jk}}{\text{minimiser}}\ OCR = \sum_{k=1}^{p} u_k S + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} x_{ijk} s_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} h_{ij} z_{ijk} + \sum_{l=1}^{M}\sum_{k=1}^{p} C_l y_{lk} \tag{18}$$

sous les contraintes

$$\forall \ i,\ j,\ \sum_{k=1}^{p} q_{ijk} = D_{ij}\, p\, T \tag{18a}$$

$$\forall \ i,\ j,\ k,\ q_{ijk} \le x_{ijk} D_{ij}\, p\, T \tag{18b}$$

$$\forall \ i,\ j,\ k,\ z_{ijk+1} - z_{ijk} - q_{ijk} = -D_{ij} T \tag{18c}$$

$$\forall \ i,\ j,\ k,\ z_i q_{ijk} \le Z_{ij} \tag{18d}$$

$$\forall \ k,\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} v_i q_{ijk} \le V u_k \tag{18e}$$

$$\forall \ i,\ j,\ k,\ x_{ijk} \le w_{jk} \tag{18f}$$

$$\forall k, \forall l \in \{1,\cdots,M\}, \begin{cases} \forall j \in S(l),\ y_{lk} \le w_{jk} \\ \forall j \notin S(l),\ w_{jk} \le 1 - y_{lk} \end{cases} \tag{18g}$$

$$\forall \ k, \forall \ l \in \{1,\cdots,M\},\ y_{lk} \le u_k \tag{18h}$$

$$\forall\, i, j, k,\ x_{ijk} \in \{0,1\}, u_k \in \{0,1\}, q_{ijk} \geq 0, z_{ijk} \geq 0 \tag{18i}$$

$$\forall\, j, k,\ \mathrm{w}_{jk} \in \{0,1\}, \forall\ l, k, y_{lk} \in \{0,1\} \tag{18j}$$

3. les résultats numériques

Cette section présente les résultats numériques obtenus en utilisant le logiciel de programmation linéaire GLPK (A. Makhorin, 2012) pour l'évaluation et la validation du modèle proposé

3.1. Evaluation numérique dans le cas monosite

Pour évaluer les performances du modèle JDP proposé, considérons tout d'abord un exemple de modèle JRP classique sous contrainte de budget, présenté dans (Moon et Cha, 2006). Ce problème est formulé pour un seul site et n produits. Pour chaque produit *i*, la politique de livraison proposée dans (Moon et Cha, 2006) est périodique de période : $k_i T$, les valeurs de *T* et des k_i étant déterminées par résolution du problème suivant :

$$\text{Minimiser}\, AC = \frac{S}{T} + \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{k_i T} + \frac{T}{2} \sum_{i=1}^{n} h_i D_i k_i \tag{19}$$

$$\text{sous}\ \forall\ k,\ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} v_i D_i k_i T \leq V \tag{20}$$

Pour formuler le problème JDP relatif à cet exemple, il est nécessaire de choisir les paramètres *T* et *p* et de multiplier le critère AC par *T*p*. Une telle transformation a été présentée en détail dans (Rahmouni *et al.,* 2013). Le cycle commun de réapprovisionnement, *pT*, joue alors le rôle d'horizon de planification des livraisons. Pour cet exemple, on prend le nombre de tour *p* égal au plus petit commun multiple des périodes de livraison élémentaires k_{ij}

$k_i = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 4]$

$p = ppcm(k_{ij}) = 4$

avec $T = 0{,}1818$

Sur l'exemple du tableau 1, les politiques construites par la méthode de Moon et Cha (2006) et par optimisation du critère OC (14) ont les mêmes performances :

Coût total sur l'horizon pT : 3031,3

Coût total par unité de temps : 4168,4.

Tableau 1. Les données de l'exemple 6 produits-1 site

	D_i	h_i	s_i	S	V	v_i
Produit 1	10000	1	45	200	25000	6,25
Produit 2	5000	1	46	200	25000	6,25
Produit 3	3000	1	47	200	25000	6,25
Produit 4	1000	1	44	200	25000	6,25
Produit 5	600	1	45	200	25000	6,25
Produit 6	200	1	47	200	25000	6,25

Cependant, les politiques trouvées diffèrent dans le choix des périodes livraison des différents produits. Ce choix n'est pas explicite dans la méthode de Moon et Cha (2006). Au contraire, notre modèle permet d'expliciter la composition des tournées de façon à satisfaire au mieux la contrainte de capacité initialement représentée par (20). Voici la composition des tournées déterminées par notre algorithme présentée sur le tableau ci-dessous :

Tableau 2. Solution optimale de groupement des tournées

	Tournées obtenues par notre modèle
Tour 1	{1, 2, 3, 4}
Tour 2	{1, 2, 3, 5}
Tour 3	{1, 2, 3, 4}
Tour 4	{1, 2, 3, 5, 6}

En outre, le JDP permet de diminuer la valeur de la capacité maximale, *V*, jusqu'à des valeurs pour lesquelles le modèle de Moon et Cha (2006), qui ne cherche pas à minimiser V, ne fournit plus de solution.

3.2. Évaluation numérique dans le cas multisite

Dans le cas multisite, nous allons déterminer la route optimale en exécutant le PL représentant les équations (2) jusqu'à (7) et (15) jusqu'à (17). Pour l'exemple de modèle multisite multiproduit représenté dans le tableau 4, le cycle élémentaire de réapprovisionnement a comme valeur T = 0,055 et les valeurs des coûts minimaux de transport C_l pour chaque tour possible sont présentées dans le tableau 3.

Tableau 3. Les coûts de transports par sous ensemble de sites, l

l	C_l
0-1	100
0-2	1500
0-3	2000
0-1-2	2500
0-1-3	3000
0-2-3	3500
0-1-2-3	4000

Tableau 4. Les données de l'exemple 4 produits-3 sites

		D_{ij}	h_{ij}	s_{ij}	S	V	Z_{ij}	v_i	z_i
Site 1	Produit 1	10000	5	35	1000	250000	10000	50	1
	Produit 2	5000	5	30	1000	250000	5000	50	1
	Produit 3	3000	5	32	1000	250000	3000	50	1
	Produit 4	1000	5	40	1000	250000	1000	50	1
Site 2	Produit 1	8000	5	25	1000	250000	8000	50	1
	Produit 2	1000	5	20	1000	250000	1000	50	1
	Produit 3	12000	5	30	1000	250000	12000	50	1
	Produit 4	600	5	42	1000	250000	600	50	1
Site 3	Produit 1	1500	5	40	1000	250000	1500	50	1
	Produit 2	5000	5	30	1000	250000	5000	50	1
	Produit 3	4500	5	45	1000	250000	4500	50	1
	Produit 4	200	5	40	1000	250000	200	50	1

L'exécution de cet exemple nous a donné les résultats suivants :

Tableau 5. La route optimale obtenue

Tour	Route optimale	Quantité livrée	Capacité maximale de livraison par tour
1	0-2-3-1-0	2750	137500
2	0-2-3-1-0	2970	148500
3	0-2-3-1-0	2750	137500
4	0-2-3-1-0	2750	137500
5	0-2-3-1-0	2750	137500
6	0-2-3-1-0	3124	156200
Coût total = 54065			

3.3. Détermination de la route optimale pour le cas de Lu et al.

Pour évaluer les performances du modèle JDP proposé, considérons tout d'abord un exemple de modèle JRP classique sous contrainte de budget, présenté dans (Lu *et al.,* 2010). Ce problème est formulé pour deux sites et 6 produits. Pour chaque produit *i*, la politique de livraison proposée dans (Lu *et al.,* 2010) est périodique de période : $k_{ij}T$, les valeurs de T et des k_{ij} étant déterminées par résolution du problème suivant :

$$\text{Minimiser } AC = \frac{S}{T} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{s_{ij}}{k_{ij}T} + \frac{T}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}k_{ij}D_{ij}h_{ij} \tag{21}$$

$$\text{sous } \forall\ k,\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} v_i D_i k_i T \le V \tag{22}$$

Pour formuler le problème JDP relatif à cet exemple, il est nécessaire de choisir les paramètres T et p et de multiplier le critère AC par $T*p$ (Rahmouni *et al.,* 2013). Une telle transformation a été présentée en détails dans la section 2.2. Le cycle commun de réapprovisionnement, pT, joue alors le rôle d'horizon de planification des livraisons.

Pour cet exemple, on prend le nombre de tour p égal à la valeur maximale des périodes de livraison élémentaires k_{ij}

$$k_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$p = \max\left(k_{ij}\right) = 8 \text{ avec } T = 0{,}0713$$

Tableau 6. Les valeurs des paramètres

		D_{ij}	s_{ij}	h_{ij}	S	V	v_i
Site 1	Produit 1	10000	350	5	1000	200000	50
	Produit 2	5000	300				
	Produit 3	3000	320				
	Produit 4	1000	400				
	Produit 5	600	400				
	Produit 6	200	300				
Site 2	Produit 1	8000	250				
	Produit 2	1000	200				
	Produit 3	12000	300				
	Produit 4	6000	420				
	Produit 5	4500	450				
	Produit 6	100	400				

Sur cet exemple, les politiques construites par la méthode de Lu *et al.* (2010) et par optimisation du critère OC (22) ont les coûts suivants :

Coût de notre politique : 38729,65

Coût de la politique périodique de Lu et al. (2010) : 38799,6.

Ensuite, pour la détermination de la route optimale, nous avons proposé une matrice des coûts de transport de site *j* au site *j*' présentée ci-après :

$$((c_{jj'})) = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 40 \\ 10 & 0 & 15 \\ 40 & 15 & 0 \end{bmatrix}$$

À partir de ces données, on calcule les coûts de transport optimaux. Ce sont les coûts de transport minimaux pour chaque tour possible :

$$\begin{cases} C_1 = c_{01} + c_{10} = 20 \\ C_2 = c_{02} + c_{20} = 80 \\ C_3 = min\left(c_{01} + c_{12} + c_{20}, c_{02} + c_{21} + c_{10}\right) = 65 \end{cases}$$

Cependant, les politiques trouvées diffèrent dans le choix des périodes de livraison des différents produits. Ce choix n'est pas explicite dans la méthode de Lu *et al.* (2010). Au contraire, notre modèle permet d'expliciter la composition des tournées de façon à satisfaire au mieux la contrainte de capacité initialement représentée par (23). Le tableau 7 présente la composition des tournées déterminées par notre algorithme.

Tableau 7. Solution optimale de groupement des tournées du modèle non périodique

	La route optimale	Quantité livrée par tour
Tour 1	0-1-2-0	183597,5
Tour 2	0-1-2-0	180745,5
Tour 3	0-1-2-0	183597,5
Tour 4	0-1-2-0	183597,5
Tour 5	0-1-2-0	199640
Tour 6	0-1-2-0	167555
Tour 7	0-1-2-0	183597,5
Tour 8	0-1-2-0	183597,5
V maximal optimal		199640

En outre, le JDP permet de diminuer la valeur de la capacité maximale, *V*, jusqu'à des valeurs pour lesquelles le modèle de Lu *et al.* (2010), qui ne cherche pas à minimiser *V*, ne fournit plus de solution.

4. Minimisation de la capacité de livraison maximale

La solution optimale actuelle peut être améliorée par respect du second critère, qui est liée à la valeur de la capacité de livraison maximale, *V*, maintenant considérée comme une variable de décision. Pour réduire le coût de la capacité maximale de livraison, le terme ηV est introduit dans le critère à minimiser, la pondération η étant choisie en fonction de l'ordre de grandeur des différentes quantités intervenant dans le critère. Le problème modifié peut alors être formulé comme suit, à titre de variante du problème principal (PJDP).

$$\underset{V,u_k,x_{ijk},z_{ijk},y_{lk}}{\text{minimiser}} \quad TCR = \eta V + \sum_{k=1}^{p} Su_k + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} s_{ij}x_{ijk} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} h_{ij}z_{ijk} + \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{M} C_l y_{lk}$$

Sous contraintes :

$$\forall\, k,\ \sum_{l=1}^{M} y_{lk} = 1$$

$$\forall\ i,\ j,\ \sum_{k=1}^{p} q_{ijk} = D_{ij}\, p\, T$$

$$\forall\ i,\ j,\ k,\ q_{ijk} \le x_{ijk} D_{ij}\, p\, T$$

$$\forall\ i,\ j,\ k,\ z_{ijk+1} - z_{ijk} - q_{ijk} = -D_{ij} T$$

$$\forall\ i,\ j,\ k,\ x_{ijk} \le u_k$$

$$\forall\ i,\ j,\ k,\ x_{ijk} \le w_{jk}$$

$$\forall\ i,\ j,\ k,\ z_i q_{ijk} \le Z_{ij}$$

$$\forall\ k,\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} v_i q_{ijk} \le V u_k$$

$$\forall k, \forall l \in \{1,\cdots,M\}, \begin{cases} \forall\, j \in S(l),\ y_{lk} \le w_{jk} \\ \forall\, j \notin S(l),\ w_{jk} \le 1 - y_{lk} \end{cases}$$

$$\forall\, i,\, j,\, k,\ \mathrm{u}_k \in \{0,1\}, x_{ijk} \in \{0,1\}, y_{jk} \ge 0, q_{ijk} \ge 0$$

Pour garder la linéarité du problème de base et pour déterminer la quantité optimale de livraison maximale *V*, on doit imposer la livraison pour chaque tour (u_k=1). Le modèle PJDP sera représenté comme suit :

$$\underset{V,u_k,x_{ijk},z_{ijk},y_{lk}}{\text{minimiser}} \quad TCR = \eta V + pS + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} s_{ij}x_{ijk} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} h_{ij}z_{ijk} + \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{M} C_l y_{lk}$$

Sous contraintes :

$$\forall\ k,\ \sum_{l=1}^{M} y_{lk} = 1$$

$$\forall\ i,\ j,\ \sum_{k=1}^{p} q_{ijk} = D_{ij}\, pT$$

$$\forall\ i,\ j,\ k,\ q_{ijk} \le x_{ijk} D_{ij}\, pT$$

$$\forall\ i,\ j,\ k,\ z_{ijk+1} - z_{ijk} - q_{ijk} = -D_{ij}T$$

$$\forall\ i,\ j,\ k,\ x_{ijk} \le 1$$

$$\forall\ i,\ j,\ k,\ x_{ijk} \le w_{jk}$$

$$\forall\ i,\ j,\ k,\ z_i q_{ijk} \le Z_{ij}$$

$$\forall\ k,\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} v_i q_{ijk} \le V$$

$$\forall k, \forall l \in \{1,\cdots,M\}, \begin{cases} \forall\ j \in S(l),\ y_{lk} \le w_{jk} \\ \forall\ j \notin S(l),\ w_{jk} \le 1 - y_{lk} \end{cases}$$

$$\forall\ i,\ j,\ k, x_{ijk} \in \{0,1\}, y_{jk} \ge 0, q_{ijk} \ge 0$$

Avec les données numériques de l'exemple 4 produits 3 sites et le coût unitaire de la capacité de livraison $\eta = 1$, la valeur optimale de V est $V^* = 156200$.

Tableau 8. Les résultats de comparaison entre les deux différentes politiques

Tour k	politique optimale			politique 2		
	q_{ijk}	Coût par période	Capacité de livraison	q_{ijk}	Coût par période	Capacité de livraison
1	2750	8245	137500	17094	8090	854700
2	2970	8150	148500	0	71225	0
3	2750	8355	137500	0	56980	0
4	2750	7860	137500	0	42735	0
5	2750	7365	137500	0	28490	0
6	3124	8090	156200	0	14245	0

Le tableau 8 représente les résultats de la politique optimale comparés à ceux de l'autre politique, appelée « politique 2 ». La politique 2 correspond à une mise en œuvre simple des paramètres de périodicité T et ((k_{ij})) dans le problème de la livraison. Selon cette politique, tous les produits sont livrés à tous les sites dans la première période et la périodicité de livraison détermine leurs périodes de livraison suivantes. Il faut noter que la politique 2 nécessite une capacité de livraison maximale de 854700, beaucoup plus élevé que V *

5. Conclusion

Cet article a analysé un problème de JDP multiproduit et multisite déterministe avec contrainte de stockage et de transport. Du point de vue du coût total de livraison, les sites ont intérêt à grouper leurs commandes pour partager le coût fixe de tournée et les frais de transport. Pour les acteurs économiques, le problème de minimisation du coût total moyen se pose soit au distributeur qui a fixé ses prix de livraison et cherche à minimiser ses coûts, soit à l'ensemble des sites de ventes, qui ont décidé de collaborer et cherchent à minimiser le coût réel moyen de livraison.

Dans l'hypothèse de taux de demande constants, la périodicité de la solution a été traduite en une approche par cycle commun. Les livraisons ont ensuite été prévues sur un horizon de temps égal au cycle commun sélectionné. La périodicité est alors obtenue par la répétition du cycle commun, mais il n'y a aucune nécessité que la politique soit cyclique dans l'horizon de planification. Ainsi, le problème qui a été défini est une version relaxée de la solution totalement cyclique (avec des temps de cycle k_{ij} T) souvent proposée dans la littérature pour le problème JRP. En accord avec cette approche par relaxation, l'expérience numérique a confirmé que de meilleures performances sont obtenues par l'approche de la planification du cycle commun que par l'approche totalement cyclique classique.

Les méthodes de résolution des problèmes de livraisons jointes multiproduits et multisites (JDP) proposées dans cet article ont permis d'optimiser les tournées de livraison sur l'horizon de planification *pT*. Cependant, les logiciels de programmation linéaire en variables mixtes ne permettent pas la résolution de problèmes de grande taille, en particulier dans le cas d'un grand nombre de sites, et donc de routes possibles. La formulation de ce problème fournie en section 4 permet de le résoudre lorsque le nombre de sites est faible.

L'objectif de la méthode de résolution proposée est de déterminer la politique d'approvisionnement optimale en définissant la route optimale de visites des différents sites tout en supprimant du modèle principal les variables booléennes liées aux sous-ensembles de sites visités à chaque tour, pour le rendre plus rapide à exécuter. L'algorithme évolutionnaire que nous allons développer, basé sur les algorithmes génétiques, doit permettre de résoudre des problèmes de plus grande taille dans un temps d'exécution raisonnable.

Bibliographie

Applegate D., W. Cook, S. Dash and A. Rohe. (2002). Solution of a min-max vehicle routing problem, *INFORMS Journal on Computing,* 14 (2), p. 132–143.

Bell W. J., Dalberto L. M., Fisher M. L., Greenfield A. J., Jaikumar R., Kedia P., Mack R G. and Prutzman P. J. (1983). Improving the Distribution of Industrial Gases with an On-Line Computerized Routing and Scheduling Optimizer, *inform: interfaces*, 13 (6), p. 4-23.

Brahimi N., Dauzere-Peres S., Najid N. M. and Nordli A. (2006). Single item lot sizing problems, *European Journal of Operational Research*, 168, p. 1–16.

Coelho L.-C., Cordeau J. and Laporte G. (2012). The inventory-routing problem with transshipment, *Computers & Operations Research,* 39 (11), p. 2537–2548.

Deleplanque S., Duhamel C., Kedad-Sidhoum S., Liberalino H. and Quilliot A. (2012). Décomposition d'un Problème de Lot-Sizing Multi-site en Problèmes de Localisation et de Multi-flots, *Conférence de recherche opérationnelle et d'aide à la décision en France (ROADEF)*, France.

Dellaert N., Jeunet J. and Jonard N. (2000). A genetic algorithm to solve the general multi-level lot-sizing problem with time-varying costs, *International Journal of Production Economics*, 68, p. 241-257.

Hindi K. S. (1995). Computationally efficient solution of the multi-item, capacitated lot-sizing problem, *Computers industrial Engineering,* 28(4), p. 709-719.

Jans R. and Z. Degraeve (2008). Modeling Industrial Lot Sizing Problems: A Review, *International Journal of Production Research,* 46(6), p. 1619-1643.

Lu T, Jia S., Li Y. (2010). A modified RAND algorithm for multi-buyer Joint Replenishment Problem with resource constraints. *IEEE International Conference Software Engineering (ICISE)*; 2526–2529.

Makhorin A., (2012) GLPK Package, GNU Project, *[Online]. Available: http://www.gnu.org/software/glpk, /.*

Millar H. H. and Yang M. (1993). An application of lagrangean decomposition to the capacitated multi-item lot sizing problem, *Computers Operations Research.* 20(4), p. 409-420.

Moon I.K. and Cha B.C. (2006) the joint replenishment problem with resource restriction. *European Journal of Operational Research*, 173, p. 190–198.

Norden L. van and van de Velde S. (2005). Multi-product lot-sizing with a transportation capacity reservation contract, *European Journal of Operational Research*, 165, p. 127–138.

Rahmouni M., Hennet J.-C. and Fnaiech F. (2013). Mixed Integer Linear Programming for Delivery Planning in Joint Replenishment Problems, *Proceedings CODIT 2013, IEEE Computer Society,* p. 665-670.

Sambasivan M. and Yahya S. (2005). A Lagrangean-based heuristic for multi-plant, multi-item,multi-period capacitated lot-sizing problems with inter-plant transfers, *Computers & Operations Research*, 32, p. 537–555.

Triqui L. and Hennet J.-C. (2012). Gestion coopérative de stock de produits finis dans un réseau de distribution, *Actes Conférence internationale en modélisation, optimisation et simulation (MOSIM'12)*, hal-00728642, CNRS.

Xie J., and Dong J. (2002). Heuristic Genetic Algorithms for General Capacitated Lot-Sizing Problems, *Computers and Mathematics with Applications*, 44, p. 263-276.

Zheng H.-Z., Chu D.-H., Zhan D.-C. and Xu X.-F. (2009). A heuristic solution approach for VMI cyclic inventory routing problem, *Global congress on intelligent systems, IEEE computer society*, p. 503-508.

Article reçu le 13 mai 2015

Accepté le 18 novembre 2015