Un tenseur de Maxwell non linéaire et symétrique

Alain Bossavit

GeePs, 11 av. Joliot-Curie
91192 Gif-sur-Yvette Cedex, France
alain.bossavit@supelec.fr

RÉSUMÉ. On propose une généralisation du tenseur de Maxwell qui permet à la surface d'intégration de traverser la matière aimantée, y compris dans le cas d'une loi de comportement non linéaire et anisotrope. Le tenseur ainsi modifié est symétrique.

ABSTRACT. We propose a generalization of the Maxwell tensor that allows the integration surface to pass through magnetized matter, even when the B–H law is non-linear and anisotropic. The tensor thus modified is symmetric.

MOTS-CLÉS : Tenseur de Maxwell, forces magnétiques.

KEYWORDS: Maxwell's tensor, magnetic forces.

DOI:10.3166/EJEE.18.169-177

Extended abstract

The classical Maxwell tensor (here denoted by ${}^{\mathrm{M}}T$) allows one to compute the magnetic force over the totality of the matter contained inside a surface S by integrating the vector field ${}^{\mathrm{M}}T \cdot n$ over S, where n is the outgoing unitary vector field normal to S. Useful as it is, this technique has limitations: Surface S should only pass through materials where the linear law $B = \mu H$, with scalar μ, applies. This of course happens when S lies entirely in the air (then $\mu = \mu_0$), but does not allow to let it pass through ferromagnetic materials, or through magnets. Important applications are thus beyond the purvey of ${}^{\mathrm{M}}T$, unless one applies dubious techniques such as the digging of artificial layers of air inside ferromagnetic regions.

Such applications would be no problem if one knew a tensor T, reducing to ${}^{\mathrm{M}}T$ in the air, such that its divergence div T be equal to the magnetic force f. This would give access to *local* force, by integration of $T \cdot n$ over a small sphere centered on the point x of interest. Magnetostrictive phenomena, due to the dependence of the B–H law on local strain, make such a working program difficult to achieve in full generality, but one can, as will be shown here, construct extensions of the classical Maxwell tensor that apply to nonlinear and anisotropic materials.

The first of these extensions consists in replacing ${}^{1}/_{2}\ (H \cdot B)$, in the standard Maxwell tensor $H \otimes B - {}^{1}/_{2}\ (H \cdot B)\ \delta$, by the co-energy density $\varphi(H)$. (Notations are described in detail in the Introduction: $\otimes$ is the dyadic product symbol, and δ stands for the unit tensor.) This yields a new tensor, ${}^{\mathrm{NL}}T = H \otimes B - \varphi(H)\ \delta$, whose divergence happens to be the local force (as provided by the Virtual Power Principle (VPP)) inside nonlinear (e.g., ferromagnetic) materials, in the isotropic case where B and H are always parallel at all points. But for anisotropic laws (such as the $B = \mu_0(H + M)$ characteristic of permanent magnets), div(${}^{\mathrm{NL}}T$) would miss a part of the local force, given as $-\ {}^{1}/_{2}$ rot$(H \times B)$ by the VPP. Thanks to the vector algebra formula div$(H \otimes B - B \otimes H)$ = rot$(H \times B)$, one may construct the modified tensor ${}^{\mathrm{SM}}T = {}^{1}/_{2}\ (H \otimes B + B \otimes H) - \varphi(\mathrm{H})\ \delta$, whose divergence is indeed the local force, provided there is no dependence of the B–H law on local strain (*i.e.*, no *stricto-sensu* magnetostriction).

One notes that ${}^{\mathrm{SM}}T$ is *symmetric*, whereas ${}^{\mathrm{NL}}T$ is not, in the anisotropic case. One should not, however, consider ${}^{\mathrm{SM}}T$ as the result of a symmetrization of ${}^{\mathrm{NL}}T$, as if symmetry were a necessary attribute of a Maxwell tensor. What happens is, simply, that the anisotropy contribution to the magnetic force, namely $-\ {}^{1}/_{2}$ rot$(H \times B)$, is the divergence of the anti-symmetric part $(B \otimes H - H \otimes B)/2$ of the dyadic tensor $H \otimes B$. Thus, taking in the rot$(H \times B)$ term results in a symmetric tensor.

Another point will be raised: Why co-energy $\varphi(H)$ in ${}^{\mathrm{SM}}T$ and not the energy $\psi(B)$, give or take a minus sign? We address this apparent asymmetry, which appears to be an artefact of the vector calculus formalism, and disappears when using the differential-geometric language.

1. Introduction : notations, formules, but

On travaille en dimension trois avec le produit scalaire $X \cdot Y$, une base orthonormale où les composantes de X sont X^i, et on adopte la convention d'Einstein sur les indices répétés, de sorte que $X \cdot Y$ peut s'écrire $X^i Y^i$. La norme d'un vecteur X est notée $|X|$. Étant donnés deux champs de vecteurs X et Y, on définit $X \cdot \nabla Y$ comme le champ de vecteurs de composantes $X^j \partial_j Y^i$. Par contre, $\nabla Y \cdot X$ désigne le champ de composantes $\partial_i Y^j X^j$. On vérifie que :

$$\nabla Y \cdot X - X \cdot \nabla Y = X \times \mathrm{rot}\, Y. \tag{1}$$

On va avoir affaire à des « 2-tenseurs », c'est-à-dire des applications bilinéaires T associant un champ scalaire, noté ici $X \cdot T \cdot Y$, à une paire de champs de vecteurs X et Y. Exemple typique : le 2-tenseur $H \otimes B$, ou « produit dyadique » de deux champs H et B, caractérisé par :

$$X(x) \cdot ((H \otimes B)(x)) \,.\, Y(x) = (X(x) \,.\, H(x))\, (B(x) \,.\, Y(x))$$

en tout point x et pour toute paire de « champs-test » X et Y. (Sous forme compacte, $X \,.\, H \otimes B \cdot Y = (X \,.\, H)\,(B \cdot Y)$ pour tout X et tout Y. En composantes, $(H \otimes B)^{ij} = H^i B^j$.) Autre exemple : le produit scalaire définit lui-même un 2-tenseur, appelé ici δ, tel que $X \cdot \delta \cdot Y = X \cdot Y$ pour tout X, Y. (En composantes, $X \cdot \delta \cdot Y = X^i \delta^{ij} Y^j$, où δ^{ij} est le symbole de Kronecker.) On remarque aussi que le ∇Y de (1) est un 2-tenseur, de composantes $\partial_i Y^j$. Par $X \cdot T$ et $T \cdot Y$ on entend $X^i T^{ij}$ et $T^{ij} Y^j$.

Par définition, la *divergence à droite* d'un 2-tenseur T est le champ de vecteurs noté div T tel que $u \cdot \mathrm{div}\, \mathrm{T} = \mathrm{div}(u \cdot T)$ pour tout champ-test uniforme v. En composantes, donc, $\mathrm{div}\, T = \partial_j T^{ij}$. On fait là un choix arbitraire entre deux possibilités : La divergence à gauche serait $\partial_i T^{ij}$, mais on n'en aura pas l'usage.

Notre objectif est de construire un 2-tenseur généralisant le tenseur de Maxwell classique, en ce sens que sa divergence à droite est le champ des forces magnétiques, y compris dans le cas de lois *B–H* non linéaires et/ou non isotropes, où le tenseur classique ne s'applique pas.

2. « Le » tenseur de Maxwell

Avec les notations ci-dessus, on reconnaît en :

$$H \otimes B - {}^1\!/_2\, (H \oplus B)\, \delta, \tag{2}$$

noté dorénavant ${}^{\mathrm{M}}T$, le tenseur de Maxwell classique, dont la représentation en composantes est $H^i B^j - {}^1\!/_2\, H^k B^k \delta^{ij}$. Comme on le sait, ce 2-tenseur permet de calculer la force magnétique totale sur un corps entouré par une surface fermée S, à condition que cette surface soit entièrement contenue dans une région où $B = \mu H$, avec une perméabilité μ qui peut dépendre de la position, mais doit être scalaire. Ceci se fait en intégrant sur S la quantité scalaire $u \cdot (H \otimes B - {}^1/_2\, (H \cdot B)\, \delta) \cdot n$, où v est un champ-test uniforme et n le champ sortant de normales unitaires sur S. Cette intégrale s'interprète comme le travail virtuel des forces magnétiques sur la matiére contenue dans S pour un déplacement virtuel (rigide) de vitesse u. Laissant u de côté, on obtient donc la force totale sur le domaine entouré par S en intégrant sur S le champ de vecteurs $(H \otimes B - {}^1/_2\, (H \cdot B)\, \delta) \cdot n$. (Une procédure analogue, où l'on remplace u par un torseur $x \to a \times x$, où a est un vecteur fixe, donne accès au couple exercé sur la matière entourée par S.)

La justification de cette démarche vient de la remarque suivante, d'ordre purement mathématique : Si $B = \mu H$ et $\mathrm{div}\, B = 0$, la divergence du champ $u \cdot (H \otimes B - {}^1/_2\, (H \cdot B)\, \delta)$, avec u uniforme, se trouve être, comme on va le redémontrer plus loin, $u \cdot ((\mathrm{rot}\, H) \times B + {}^1/_2\, |B|^2\, \nabla\nu)$, où ν est la réluctivité $1/\mu$. La divergence à droite du tenseur ${}^{M}T$ est donc

$$F = (\mathrm{rot}\, H) \times B + {}^1/_2\, |B|^2\, \nabla\nu, \tag{3}$$

dont on sait qu'il s'agit de la force magnétique dans des circonstances bien précises, à savoir ν scalaire et insensible à la déformation locale du matériau (autrement dit, pas de magnétostriction au sens strict, cf. (Bossavit, 2011)). On le sait grâce à une démarche antérieure (voir par exemple (Bossavit, 2014)), l'application du principe des travaux virtuels (PTV), qui ne recourt pas à ${}^{M}T$. On ne dérive donc pas les forces de la connaissance du tenseur de Maxwell, au contraire, on construit ${}^{M}T$ de sorte que sa divergence soit le champ de forces : le PTV vient d'abord, le tenseur de Maxwell ensuite.

Outil dérivé, donc, ${}^{M}T$ n'en est pas moins intéressant, car il remplace des différentiations, comme celle de ν dans (3), qu'il faut en général interpréter au sens des distributions (Schwartz, 1966), par des intégrations, ce qui facilite le traitement des singularités. Si par exemple on s'intéresse à la force concentrée sur la surface qui sépare deux milieux de perméabilités différentes, l'intégration de ${}^{M}T$ sur la surface S suggérée par la figure 1 donne la solution, malgré la discontinuité de B au passage de l'interface matérielle. On aimerait pouvoir faire cela dans les cas où la loi B–H dans l'un (au moins) des milieux en contact est non linéaire ou même, seulement, linéaire anisotrope, les techniques souvent proposées à cet effet (creusement de couches d'air artificielles où faire passer la surface d'intégration, comme dans (Choi *et al.*, 2006 ; 2014) n'étant guère satisfaisantes en pratique. On va voir qu'il est effectivement permis de choisir une surface S traversant une région de non-linéarité, au prix d'une modification de la forme de (2), où l'on retrouve une proposition avancée par Sánchez Grandía *et al.* (2006).

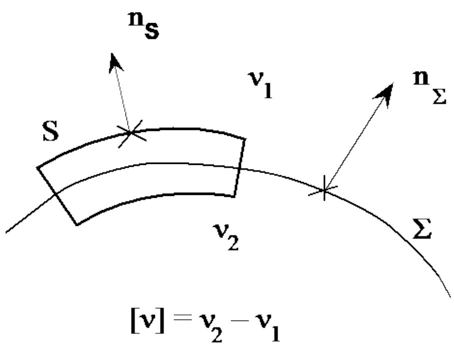

Figure 1. (Le saut [ν] *d'une quantité scalaire telle que* ν *au passage d'une interface matérielle telle que* Σ *est sa valeur « en amont » moins sa valeur 'en aval' du flot imaginaire traversant* Σ *dans le sens de la normale* n_Σ*. Ici, avec* ν *constant de part et d'autre de Σ, on a donc* $[\nu] = \nu_2 - \nu_1$*.) L'intégration de* $^{M}T \cdot n_S$ *sur la surface S donne la force magnétique exercée sur la partie de* Σ *intérieure à S. On retrouve de cette façon, et plus simplement, le résultat obtenu en interprétant l'expression* $^1/_2\,|B|^2\,\nabla\nu$ *du champ de forces au sens des distributions, soit* $^1/_2\,(|H_\tau|^2\,[\mu] - B_n^2\,[\nu])\,n_\Sigma$*, où* H_τ *et* B_n *sont les composantes tangentielle de H et normale de B au droit de Σ (cf. Bossavit, 2011).*

Par ailleurs, pourquoi $H \otimes B$ dans (2) plutôt que $B \otimes H$? Après tout, ces termes sont égaux (et donc ^{M}T est symétrique) lorsque ν dans $H = \nu B$ est scalaire. Peut-on toujours construire un tenseur *T symétrique* tel que div *T* soit le champ de forces ? On va voir que oui, au prix là aussi d'une généralisation de (2) et (3) qui tient compte de l'existence d'un champ de couples (en rot($H \times B$), cf. Bossavit, 2014) lorsque *H* et *B* ne sont pas parallèles. Cela ne conforte pas nécessairement l'idée selon laquelle le tenseur de Maxwell *devrait* être, au même titre que le tenseur des contraintes en Élasticité, symétrique. Mais ce point, sujet à controverse, ne sera pas abordé ici.

En résumé, on va montrer qu'il existe, en l'absence de magnétostriction au sens strict, un 2-tenseur symétrique ^{SM}T, dont la forme dépend de la loi *B–H*, donc éventuellement fonction non linéaire des champs *B* et *H*, tel que div(^{SM}T) soit la distribution de force (aux deux sens du mot distribution).

3. Un autre tenseur de Maxwell

Pour formuler la loi *B–H* avec assez de généralité, on introduit la densité d'énergie magnétique $\psi(x, b)$, où *b* est un vecteur 3D, et la co-énergie $\varphi(x, h)$, transformées de Fenchel l'une de l'autre (Fenchel, 1949), ce qui signifie qu'elles sont convexes en *b* et en *h* et que $\psi(x, b) + \varphi(x, h) \geq b \cdot h$ quels que soient *b* et *h*.

Pour un point x dans l'air, ou dans un matériau non magnétique, $\varphi(x, h) = {}^1/_2\ \mu_0\ |h|^2$ et $\psi(x, b) = {}^1/_2\ \nu_0\ |b|^2$ où $\nu_0 = 1/\mu_0$. La loi B–H est alors :

$$\psi(x, B(x)) + \varphi(x, H(x)) = B(x) \cdot H(x) \tag{4}$$

en chaque point x.

On note $\partial_x\psi$ et $\partial_b\psi$ les dérivées partielles de ψ par rapport à x et b. (De même, $\partial_x\varphi$ et $\partial_h\varphi$.) On rappelle que (4) équivaut à $H(x) = \partial_b\psi(x, B(x))$, et à $B(\mathrm{x}) = \partial_h\varphi(x, H(x))$. Autrement dit, le champ $x \to \partial_b\psi(x, B(x))$ n'est autre que le H associé à B par la loi de comportement. De même, $x \to \partial_h\varphi(x, H(x))$ est le champ B. Posant $\Psi(B) = \int \psi(x, B(x))\, \mathrm{d}x$ et $\Phi(H) = \int \varphi(x, H(x))\, \mathrm{d}x$, où les intégrales portent sur tout l'espace, la loi B–H s'exprime d'un coup dans tout l'espace par $\Psi(B) + \Phi(H) = \int B \cdot H$.

Pour la compatibilité avec (Bossavit 2014), et parce que le symbole ∇ dénote en général une dérivée spatiale, on notera enfin $\nabla\psi(\cdot\ , B)$ le champ de vecteurs $x \to \partial_b\psi(x, B(x))$. Même convention pour $\nabla\varphi\ (\cdot\ , H)$. Prendre garde que $\nabla\psi(\cdot\ , B)$ n'est *pas* la dérivée spatiale de la densité d'énergie magnétique, c'est-à-dire celle du champ scalaire $x \to \psi(x, B(x))$, noté plus loin $\underline{\psi}(B)$. On revient sur ce point dans quelques lignes.

On rappelle que, pour deux champs de vecteurs H et B qui ne sont pas forcément les champs physiques,

$$(\mathrm{rot}\ H) \times B = B \cdot \nabla H - \nabla H \cdot B, \tag{5}$$

et on remarque que

$$\mathrm{div}(H \otimes B) = H\ \mathrm{div}\ B + B \cdot \nabla H, \tag{6}$$

$$\mathrm{div}(H \otimes B - B \otimes H) = \mathrm{rot}(H \times B). \tag{7}$$

Enfin, la divergence du 2-tenseur δ est 0, et l'on a, si g est un champ scalaire,

$$\mathrm{div}(g\ \delta) = \nabla g. \tag{8}$$

Soient maintenant H et B les champs physiques, liés par la loi constitutive $\Psi(B) + \Phi(H) = \int B \cdot H$, avec div $B = 0$. On dira dans ce qui suit que B et H forment une 'paire magnétique' si ces relations sont satisfaites. On note que, pour ce qui est de la densité de co-énergie $\varphi(x, H(x))$, un champ scalaire qu'on va noter $\underline{\varphi}(H)$, on a, en dérivant en chaîne,

$$\nabla\underline{\varphi}(H) = \nabla\varphi(\cdot\ ,\ H) + \nabla H \cdot B. \tag{9}$$

(Attention, $\varphi(H)$, la densité de coénergie du vecteur H, est une fonction de x seulement, le H n'étant qu'une étiquette. Même remarque, et formule analogue, pour la densité d'énergie $\psi(B)$.)

On peut maintenant énoncer :
Proposition 1. *Si B et H forment une paire magnétique, on a :*

$$\operatorname{div}[{}^1\!/_2\,(H \otimes B + B \otimes H) - \varphi(\mathrm{H})\,\delta] =$$

$$(\operatorname{rot} H) \times B - \nabla\phi(\cdot\;,\;H) - {}^1\!/_2 \operatorname{rot}(H \times B). \tag{10}$$

Le second membre est l'expression de la densité de force obtenue (Bossavit, 2014) dans le cas sans magnétostriction au sens strict mais avec possible anisotropie de la loi B–H. Le terme de gauche entre crochets est ainsi un 2-tenseur symétrique dont la divergence est la densité de force. Il se réduit au tenseur de Maxwell classique lorsque $B = \mu H$ avec μ scalaire. (On notera ${}^{SM}T$ cette généralisation de ${}^{M}T$.)

Preuve de (10) : Grâce à (5), $(\operatorname{rot} H) \times B - \nabla\phi(\cdot\;,\;H) = B\cdot\;\nabla H - (\nabla\phi(\cdot\;,\;H) + \nabla H\cdot\;B) = B\cdot\;\nabla H - \nabla\varphi(H)$, compte tenu de (9). Mais ceci est $\operatorname{div}(H \otimes B - \varphi(H)\,\delta)$, grâce à (6) et (8). On a donc :

$$\operatorname{div}(H \otimes B - \varphi(H)\,\delta) = (\operatorname{rot} H) \times B - \nabla\phi(\cdot\;,\;H). \tag{11}$$

Soustrayant de (11), membre à membre, la moitié de (7), on trouve bien (10).

Lorsque B et H sont parallèles, comme c'est le cas si la loi B–H est isotrope, linéaire ou non, $\operatorname{rot}(H \times B) = 0$ et $H \otimes B = B \otimes H$, de sorte qu'il n'y a pas de différence entre (10) and (11). On peut donc (comme Sánchez Grandía *et al.* (2006) ou Henrotte et Hameyer (2007)) considérer le 2-tenseur $H \otimes B - \varphi(H)\,\delta$ (disons ${}^{NM}T$, avec N pour non-linéaire) comme une généralisation du tenseur de Maxwell adaptée au cas des lois B–H isotropes non linéaires. C'est déjà bien. Mais le domaine d'application de ${}^{SM}T$ est beaucoup plus vaste. (Et il est intéressant que cette extension apporte la symétrie du tenseur par dessus le marché. Voir sur ce point Bermúdez *et al.*, 2015.)

4. Pourquoi la coénergie plutôt que l'énergie ?

La symétrie du 2-tenseur est une chose, mais il semble qu'une autre sorte de symétrie, celle entre B et H, ou entre énergie et co-énergie, ait été recherchée (Sánchez Grandía *et al.*, 2008). Restreignons-nous aux cas où le terme $(\operatorname{rot} H) \times B$ (qui ne supporterait pas la permutation de H et de B, de toute façon) est nul. Alors,

$$\operatorname{div}(H \otimes B - \varphi(H)\,\delta) = -\;\nabla\phi(\cdot\;,\;H), \tag{12}$$

formule que l'on peut considérer comme « orientée vers H » plutôt que vers B. Puisque B et H sont liés par $\varphi(H) + \psi(B) = H \cdot B$, on a (dériver (4) par rapport à x pour le voir) $-\nabla\varphi(\cdot\,, H) = \nabla\psi(\cdot\,, B)$. Cela suggére d'essayer

$$\operatorname{div}(B \otimes H + \psi(B)\,\delta) \overset{*}{=} \nabla\psi(\cdot\,, B), \tag{13}$$

où l'astérisque met en garde, selon le modèle offert par les linguistes, quant à la validité de cette assertion. Effectivement, elle est incorrecte, comme on le vérifie aisément sur le cas linéaire.

Plutôt donc que de suivre des intuitions hasardeuses, partons de l'égalité (11) pour obtenir :

$$\operatorname{div}[(u \cdot H)B - \varphi(H)\,u\,] = -\,u \cdot \nabla\varphi(\cdot\,, H), \tag{14}$$

où u est un champ-test uniforme quelconque. Puisque $\varphi(\mathrm{H}) = B \cdot H - \psi(B)$, on a aussi :

$$\operatorname{div}[(u \cdot H)B - u\,(B \cdot H) + \psi(B)\,u] = -\,u \cdot \nabla\varphi(\cdot\,, H),$$

et la formule du double produit vectoriel, $(v \times B) \times H = (v \cdot H)B - (B \cdot H)\,v$, mène à :

$$\operatorname{div}[(u \times B) \times H + \psi(B)\,u] = u \cdot \nabla\psi(\cdot\,, B), \tag{15}$$

qu'il faut comparer à (14). La symétrie entre les deux laisse à désirer, et en particulier, $\operatorname{div}((u \times B) \times H)$ n'est *pas* égal à $u \cdot \operatorname{div}(B \otimes H)$. Les égalités (14) et (15) sont algébriquement équivalentes, mais ne se ressemblent pas autant que, par exemple, (12) et (13).

Pourtant, il y a bien entre elles une symétrie cachée, que le langage de la géométrie différentielle révèle. Rappelons que les champs de vecteurs H et B ne sont que les représentants d'objets plus fondamentaux, les formes différentielles h et b, de degrés 1 et 2 respectivement (à ne pas confondre avec les vecteurs h et b de la Section 3). Les champs scalaires $\varphi(H)$ et $\psi(B)$ représentent des formes de degré 3. Les produits intérieurs $\mathrm{i}_u h$ et $\mathrm{i}_u b$ ayant $u \cdot H$ et $B \times u$ pour représentants, les termes qui apparaissent tout à gauche de (14) et de (15) sont, respectivement, $\mathrm{i}_u h \wedge b$ et $-\mathrm{i}_u b \wedge h$ (où $\wedge$ est le produit extérieur), et la formule du double produit vectoriel n'est qu'un déguisement de ceci :

$$\mathrm{i}_u\,(h \wedge b) = \mathrm{i}_u h \wedge b - h \wedge \mathrm{i}_u b. \tag{16}$$

Les membres de gauche de (14) et (15) représentent les deux membres de l'égalité :

$$\mathrm{d}[\mathrm{i}_u h \wedge b - \mathrm{i}_u \varphi(h)] = \mathrm{d}[h \wedge \mathrm{i}_u b + \mathrm{i}_u \psi(b)] \tag{17}$$

qui elle-même résulte de l'identité (16) et de la loi constitutive $\varphi(h) + \psi(b) = h \wedge b$. La symétrie entre h et b est maintenant manifeste dans (17). Non seulement les termes entre crochets y sont égaux, comme ils le sont dans (14) et (15), mais ils se transforment l'un en l'autre par les échanges $b \leftrightarrow h$ et $\varphi \leftrightarrow \psi$. En conclusion, il n'y a donc pas, au bout du compte, de « préférence pour la co-énergie » : les tenseurs « orienté H » et « orienté B » ne font qu'un. Ce qui précède suggère que le formalisme de la géométrie différentielle pourrait peut-être éclairer d'autres aspects de la théorie du, ou plutôt des, tenseurs de Maxwell.

Remerciements

À Alfredo Bermúdez pour sa suggestion d'essayer de symétriser le tenseur classique.

Bibliographie

Bermúdez A., Rodríguez A.L., Villa I. (2015). Extended Formulas to Compute Global and Contact Electromagnetic Force and Torque from Maxwell Stress Tensors: The Role of Symmetry. *IEEE Trans. Magn.* (submitted).

Bossavit A. (2011). Virtual Power Principle and Maxwell's tensor: Which comes first? *COMPEL,* vol. 30, n° 6, p. 1804-1814.

Bossavit A. (2014). On forces in magnetized matter. *IEEE Trans. Magn.,* vol. 50, n° 2, p. 229-232.

Choi H.-S., Park I.-H., Lee S.-H. (2006). Concept of Virtual Air Gap and Its Applications for Force Calculation. *IEEE Trans. Magn.,* vol. 42, n° 4, p. 663-666.

Fenchel W. (1949). On Conjugate Convex Functions. *Can. J. Math.,* vol. 1, n° 1, p. 73-77.

Henrotte F., Hameyer K. (2007). A Theory for electromagnetic Force formulas in continuous media. *IEEE Trans. Magn.,* vol. 43, n° 4, p. 553-56.

Sánchez Grandía R., Vives Fos R., Aucejo Galindo V. (2006). Magnetostatic Maxwell's tensors in magnetic media applying virtual works method from either energy or co-energy. *Eur. Phys. J.,* vol. AP 35, p. 61-68.

Sánchez Grandía R., Aucejo Galindo V., Usieto Galve A., Vives Fos R. (2008). General Formulation For Magnetic Forces in Linear Materials and Permanent Magnets. *IEEE Trans. Magn.,* vol. 44, n° 9, p. 2134-2140.

Schwartz L. (1966). *Théorie des distributions,* Hermann, Paris.

Seo J.-H., Choi H.-S. (2014). Computation of Magnetic Contact Forces. *IEEE Trans. Magn.,* vol. 50, n° 2, p. 525-528.

Article reçu le : 29/07/2015
Article accepté le : 14/01/2016