# B. Méthodes algébriques

# 1. algorithme art

## 1.1. idée générale et hypothèses

Le problème est écrit sous la forme $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{f}$ où $\boldsymbol{p}$ est le vecteur $m \times 1$ contenant toutes les données, $\boldsymbol{f}$ est le vecteur $n \times 1$ représentant l'image (2D ou 3D), et $\boldsymbol{X}$ est la matrice $m \times n$ de projections. La matrice $\boldsymbol{X}$ caractérise complètement la géométrie d'acquisition. Chaque ligne de la matrice représente l'équation d'un rayon de projection. ART est un algorithme itératif de résolution du système linéaire faisant agir une ligne de la matrice à la fois. Dans la version de base, l'idée est de corriger la solution à chaque itération de manière à la rendre consistante avec l'équation considérée à cette itération.

## 1.2. principe de la méthode

L'image est initialisée à $\boldsymbol{f}^{(0)}$. A chaque itération $k$, on ajoute à l'image $\boldsymbol{f}^{(k)}$ un terme additif correctif ne dépendant que de l'équation $\boldsymbol{j}$. Lorsque la méthode est utilisée sans relaxation, la correction est calculée de telle sorte que la $\boldsymbol{j}$ ième équation soit satisfaite. Cette correction peut être interprétée comme la rétro-projection de l'écart entre la projection mesurée et la projection calculée.

## 1.3. description sommaire de l'algorithme

On part d'une estimation initiale $\boldsymbol{f}^{(0)}$, qui peut être zéro ou une image uniforme. L'itération $\boldsymbol{f}^{(k+1)}$ peut s'écrire matriciellement sous la forme :

$$\boldsymbol{f}^{(k+1)} = \boldsymbol{f}^{(k)} + \lambda_k \frac{p_j - \boldsymbol{x}_j \boldsymbol{f}^{(k)}}{\|\boldsymbol{x}j\|^2} m\boldsymbol{x}_j^t$$

où $\boldsymbol{j} = k(mod\, m) + 1$, $\boldsymbol{x}_j$ désigne la $l$ième ligne de la matrice $\boldsymbol{X}$, $\|\boldsymbol{x}_j\|$ sa norme euclidienne, $\lambda_k$ est un facteur de relaxation compris entre 0 et 2. Le facteur de relaxation $\lambda_k$ peut être interprété comme une pondération de la rétroprojection de l'écart et permet d'accélérer la convergence.

## 1.4. caractéristiques de la méthode

Cette méthode proposée intuitivement par Hounsfield et Gordon correspond à la méthode de Kaczmarz sur le plan mathématique. Lorsque $\lambda_k = 1$, elle consiste à effectuer une suite de projections orthogonales sur les hyperplans associés à chaque équation. Lorsque le système admet au moins une solution, $f^{(0)} = 0$ et $\lambda_k$ varie dans $[0, 2[$, l'algorithme converge vers la solution de norme minimale. En pratique, une reconstruction acceptable est souvent obtenue en 5 à 10 cycles.

## 1.5. implantation

L'algorithme ART est très populaire en tomographie 2D. Les calculs de base sont de type « projection » et « rétroprojection ». Il est très économique en coût de calcul du fait qu'à chaque itération une seule ligne est utilisée à la fois (il est dit de type « row–action »). Soit les coefficients intervenant pour une équation sont calculés géométriquement à chaque itération, soit la matrice X entière est calculée une fois pour toutes pour une géométrie fixée.

Il a été appliqué pour la première fois à une reconstruction 3D dans le cas d'une acquisition à partir de sources coniques se déplaçant dans un plan (extension de la tomographie classique) [3].

## 1.6. remarques complémentaires

L'algorithme ART est instable en présence de données bruitées. Pour y remédier, Herman a proposé l'utilisation d'astuces (lissage de la solution entre 2 cycles, positivité...) qui s'apparentent à des techniques de régularisation.
Il existe un grand nombre de variantes de ART : MART (ART multiplicatif), ART2 (inclut la contrainte de positivité), ART3 (résout un système d'inégalités).

### BIBLIOGRAPHIE


[1] G.M. Hounsfield, « A Method and Apparatus for Examination of a Body by Radiation such as X or Gamma », *Pat. Spec.*, n°1283915, 1972.

[2] R. Gordon, R. Bender, G.T. Herman, « Algebraic Reconstruction Technique (ART) for Three Dimensional Electron Microscopy and X–ray Photography », *Journal Theor. Biol.*, vol. 29, 1970, pp. 471–481.

[3] J.G. Colsher, « Iterative Three–Dimensional Image Reconstruction from Tomographic Projections », *Computer Graphics and image processing*, vol. NS–21, 1977, pp. 513–537.

[4] G.T. Herman, « Image Reconstruction from Projections : the Fundamentals of Computerized Tomography », New York : Academic Press, 1980.

# 2. algorithme art par blocs

## 2.1. idée générale et hypothèses

L'idée est de résoudre le problème de reconstruction 3D à partir de projections coniques par une méthode itérative de type ART par blocs. Au lieu de traiter un rayon de projection à chaque itération, on traite tout un bloc de données, chaque bloc correspondant à une projection conique entière.

## 2.2. principe de la méthode

Le système est partitionné en blocs :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_j \\ X_M \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_j \\ P_M \end{pmatrix}$$

où $\boldsymbol{P_j}$ représente une projection conique 2D, c'est–à–dire un vecteur $NP^2 \times 1$ (si la projection conique 2D est de taille $NP \times NP$), et $\boldsymbol{X_j}$ la matrice de projection correspondante.

L'algorithme itératif est de la forme :

$$\boldsymbol{f}^{(k+1)} = \boldsymbol{f}^{(k)} + \lambda_k \, \Omega_j (\boldsymbol{P_j} - \boldsymbol{X_j f}^{(k)}) \tag{1}$$

où $\boldsymbol{j} = 1 + k(mod\ m)$, $\Omega_j$ est une matrice de relaxation $NP^2 \times NP^2$ et $\lambda_k$ un coefficient de relaxation.

## 2.3. description sommaire de l'algorithme

A chaque itération, on « rétroprojette » l'écart entre une projection conique mesurée $\boldsymbol{P_j}$ et la projection correspondante calculée $\boldsymbol{X_j f}^{(k)}$. Cet écart est pondéré, d'une part par le coefficient de relaxation $\lambda_k$, et d'autre part par la matrice $\Omega_j$. Les opérations de base sont donc comme dans ART, de type « projection » et « rétroprojection ».
La méthode peut être utilisée avec les contraintes suivantes : positivité, bornes et support.

## 2.4. caractéristiques de la méthode

Si le système est consistant, la convergence théorique de l'algorithme vers une solution, est prouvée lorsque :

$$\lim_{k \to \infty} \| X^t_{l_k} \, (\boldsymbol{I} - X_{l_k} \, X^t_{l_k} \, \Omega_{l_k}) \, X_{l_k} \|_2 < 1 \tag{2}$$

La matrice $\Omega_j = (\boldsymbol{X_j X_j^t})^{-1}$ satisfait la condition de convergence, mais est très lourde à calculer. En pratique, nous avons utilisé :

$$\Omega_j = [diag(\boldsymbol{X_j X_j^t})]^{-1} \tag{3}$$

où $diag(\boldsymbol{X_j X_j^t})$ désigne la matrice diagonale, constituée par les éléments diagonaux de $\boldsymbol{X_j X_j^t}$.

## 2.5. implantation

L'algorithme a été vectorisé et effectivement implanté sur un calculateur vectoriel (CYBER 205, puis ETA10 de Control Data). De par sa structure, il se prête bien à une implantation vectorielle. L'effort de vectorisation a porté sur des modules de calculs de « projection » et de « rétroprojection » d'une projection conique. Il a été appliqué à des données simulées et des données acquises sur le banc expérimental de GE CGR.

## 2.6. remarques complémentaires

Dans le cas de données bruitées, l'algorithme peut présenter des instabilités. Dans ce cas, l'utilisation de contraintes (positivité, bornes, support) est particulièrement importante.
La matrice $\Omega_j = [tr(\boldsymbol{X_j X_j^t})]^{-1}$ où $tr(\cdot)$ désigne la trace de la matrice, a également été utilisée. Cet algorithme, appelé SMART par blocs, converge plus lentement que l'algorithme ART par blocs, mais présente une meilleure stabilité.

### BIBLIOGRAPHIE


[1] P.P.B. Eggermont, G.T. Herman, « Iterative Algorithms for Large Partitioned Linear Systems with Applications to Image Reconstruction », *Linear algebra and its applications*, vol. 40, 1981, pp. 37–67.

[2] F. Peyrin, R. Goutte, M. Amiel, « 3D Reconstruction from Cone Beam Projections by a Bloc Iterative Technique », *SPIE Medical Imaging V : image physics*, San Jose, CA, Feb. 1991, vol. 1443, pp. 268–279.

[3] F. Peyrin, « Méthodes de reconstruction d'images 3D à partir de projections coniques de rayons X », *Thèse d'Etat INSA/Université Lyon I*, 1990.

# 3. algorithme art multirésolution avec support

## 3.1. idée générale et hypothèses

Il s'agit d'une reconstruction d'objets à fort contraste, nécessitant la définition d'une région de support (RDS) 3D contenant l'objet à reconstruire, pour limiter les calculs à cette RDS. La méthode utilise un schéma d'estimation multirésolution permettant d'optimiser le temps de calcul, et n'exige pas de conditions particulières sur la géométrie d'acquisition.

## 3.2. principe de la méthode

La méthode se décompose en deux étapes : la détection d'une RDS contenant l'objet d'intérêt, suivie d'une estimation multirésolution de la densité des voxels contenus dans la RDS. On note $N_i$ la résolution courante, avec $N_i = 2^i$. La résolution finale est notée $N_f$, l'estimation multirésolution se faisant sur les $l$ résolutions entre $N_{f-l+1}$ et $N_f$. La RDS étant elle-même modifiée quand on passe d'une résolution à une autre, on note $\mathrm{RDS}_i$ la RDS à la résolution $i$. Le vecteur–densité du volume à la résolution $i$ est note $f_i$ et ne contient que les voxels de $\mathrm{RDS}_i$.

### 3.2.1. détection

Les objets étant supposés à fort contraste, un simple seuillage des projections permet d'isoler les objets du fond et de construire une RDS initiale à basse résolution $N_{f-l+1}$. Un taux important de faux positifs lors de cette détection initiale n'est pas gênant, car ces faux positifs seront éliminés progressivement lors de l'étape d'estimation.

### 3.2.2. estimation

Pour chaque résolution $N_i$ avec $f - l + 1 < i < f$, on estime par ART ou par MART la densité des voxels contenus dans $\mathrm{RDS}_i$, en utilisant une valeur initiale provenant de l'estimation $f_{i-1}$ obtenue à la résolution précédente $i - 1$. Après estimation de $f_i$, on élimine de $\mathrm{RDS}_i$, les voxels de valeur très faible, dont on suppose qu'ils correspondent à des fausses alertes lors de la détection de la région de support initiale.

## 3.3. description sommaire de l'algorithme

Le traitement complet d'une résolution $N_i$ s'effectue en 3 étapes :

1) Estimation de $f_i$ par 1 ou plusieurs itérations d'ART ou de MART, avec utilisation d'une contrainte de positivité sur $f_i$ et de la contrainte de région de support $\mathrm{RDS}_i$.

2) Segmentation de $\mathrm{RDS}_i$ : on ne garde dans $\mathrm{RDS}_i$ (et donc dans $f_i$) que les voxels supérieurs à un seuil donné.

3) Interpolation trilinéaire de $f_i$, ce qui conduit à un volume de résolution $N_{i+1}$, noté $f_{i+1}^0$ sera utilisée comme valeur initiale dans l'estimation de $f_{i+1}$.

## 3.4. caractéristiques de la méthode

**Efficacité** : la méthode est bien adaptée aux objets « creux » (arbres vasculaires opacifiés, structures osseuses) car la place-mémoire nécessaire et le temps de calcul sont uniquement fonction du nombre de voxels « pleins » du volume. Elle permet pour de tels objets des reconstructions réalistes en $512^3$ ou $1024^3$.

**Robustesse** : bonne robustesse tenant à l'utilisation de l'ART.

**Parallélisation** : l'algorithme peut faire l'objet d'une parallélisation faible ou massive.

## 3.5. implantation

Cette méthode a été effectivement implantée sur station de travail et sur super–calculateur parallèle (Alliant FX2800, 8 processeurs). Elle a été appliquée avec succès à des reconstructions vasculaires à partir de projections soustraites (pièces anatomiques injectées : cœur et tête), à des reconstructions osseuses à partir de projections soustraites par double énergie (pièces anatomiques) et à des reconstructions os + tissus mous (pièces anatomiques). Des reconstructions correctes de structures filaires de 1 mm de diamètre ont été obtenues.

Les résultats sont corrects à partir de 6 vues sur des structures vasculaires simples (coronaires) et à partir de 15–20 vues sur des structures vasculaires plus complexes (cerveau).

## BIBLIOGRAPHIE


[1] A. Rougee, K. Hanson, D. Saint Félix, « Comparison of 3–D Tomographic Algorithms for Vascular Reconstruction », *Proc. SPIE 914*, 1988, pp. 397–405.

[2] Y. Trousset, D. Saint Félix, A. Rougee, C. Chardenon, « Multiscale Cone Beam X Ray Reconstruction », *SPIE 1231*, 1990, pp. 229–238.

[3] D. Saint Félix, Y. Trousset, C. Picard, A. Rougee, « 3D Reconstruction of High Contrast Objects Using a Multi-scale Detection/Estimation Scheme », *NATO ASI Series*, Springer–Verlag, vol. F60, 1990, pp. 147–158.

# 4. tomosynthèse par sources codées de rayons X (algorithme de Kaczmarz)

## 4.1. idée générale et hypothèses

Cette méthode requiert une géométrie d'acquisition particulière : les sources de rayons X irradiant l'objet sont disposées dans un plan, selon une certaine distribution appelée « code », d'où le nom d'imagerie par sources codées de rayons X.

## 4.2. principe de la méthode

Le volume 3D est reconstruit coupe par coupe, l'objet étant considéré comme un empilement de tranches d'épaisseur non nulle :

$$f = \sum_{z=1}^{N} f_z \tag{1}$$

Les tomogrammes 2D ainsi obtenus sont parallèles au plan de sources et au plan de projection. L'ensemble des différentes projections $p_\theta(x, y)$ constitue la projection codée $p_c(x, y)$ notée $p_c$ :

$$p_c = \sum_{z=1}^{N} R_z * f_z + N \tag{2}$$

où $R_z$ représente les réponses impulsionnelles du système associées aux différents plans de profondeur $z$ de l'objet, $f_z$ correspond aux plans objets agrandis (contenus dans le plan de projection) et $N$ est un bruit additif.

## 4.3. description sommaire de l'algorithme

La méthode consiste à reconstruire la coupe $\hat{f}_k$ en convolant l'image codée avec une fonction $R'_k$ optimale pour ce plan :

$$\hat{f}_k = p_c * R'_k \tag{3}$$

telle que

$$R_k * R'_k = \delta \tag{4}$$

$$\sum_{\substack{z=1 \\ z \neq k}}^{N} R_z * R'_k + N * R'_k = 0 \tag{5}$$

Le premier terme de l'équation (5) représente l'ensemble des plans objets hors plan focal, i.e. situés de part et d'autre du plan reconstruit, le deuxième terme représente la contribution du bruit.

La minimisation de (5) est *implicite* si l'on résout (5) par la méthode de Kaczmarz qui garantit une solution $R'_k$ à variance minimale.
La minimisation est *explicite* si l'on résout (4) et (5) simultanément.

## 4.4. caractéristiques de la méthode

- Elle utilise une géométrie particulière d'acquisition avec peu de vues (4 à 25).
- C'est une méthode algébrique permettant la prise en compte de contraintes (positivité, support, ...).
- Les fonctions $R'_k$ correspondent chacune à un plan de profondeur dans l'objet, elles *dépendent de la forme du code* et *sont indépendantes de l'objet* à reconstruire.
- Le résultat s'obtient en 4 ou 5 itérations.

## 4.5. implantation

La méthode a été mise en œuvre pour reconstruire des fantômes angiographiques 3D. Les domaines d'application privilégiés sont la recherche de défauts en contrôle non destructif et l'angiographie dans le domaine médical.

## 4.6. remarques complémentaires

On peut dupliquer la géométrie d'acquisition en réalisant deux projections radiographiques codées à 90°, avec le même code. Ceci améliore nettement la reconstruction, car l'angle de vue est beaucoup plus large.

### BIBLIOGRAPHIE

[1] I.E. Magnin, « Imagerie tridimensionnelle par sources codées de rayons X », *Thèse d'Etat, Lyon*, 1987, 177 pages.

[2] I.E. Magnin, « X-ray coded source tomosynthesis », *NATO ASI Series, Mathematics and Computer Science in Medical Imaging*, Ed M. Viergever and A. Todd-Pokropek, Springer Verlag, vol. F 39, 1988, pp. 339-349.

[3] H.H. Barrett, W. Swindell, *Radiological Imaging : The Theory Image Formation, Detection and Processing*, Ed. Academic Press, Vol. 2, 1981.

# 5. méthode SIRT (Simultaneous Iterative Reconstruction Technique)

## 5.1. idée générale et hypothèses

C'est une méthode itérative comme l'ART, mais au lieu de procéder rayon par rayon, elle procède pixel par pixel.

## 5.2. principe de la méthode

En chaque pixel, toutes les mesures de projection correspondant à tous les rayons passant par ce point sont calculées et sommées. Un facteur de correction est appliqué à la densité de ce pixel, ce facteur est fonction de la différence entre les projections estimées et les projections mesurées, soit :

$$\boldsymbol{f}_i^{(k)} = \boldsymbol{f}_i^{(k-1)} + \frac{\sum\limits_{j \text{ passant par } i} p_j}{\sum\limits_{j \text{ passant par } i} \|\boldsymbol{x}_j\|} - \frac{\sum\limits_{j \text{ passant par } i} \boldsymbol{x}_j \cdot \boldsymbol{f}^{(k-1)}}{\sum\limits_{j \text{ passant par } i} n_j} \quad (1)$$

où $\|\boldsymbol{x}_j\|$ représente la longueur du rayon numéro $j$ et $n_j$ le nombre de pixels traversés par ce rayon.

La correction peut aussi être appliquée de façon multiplicative, soit :

$$f_i^{(k)} = f_i^{(k-1)} \cdot \frac{\sum\limits_{j \text{ en passant par } i} p_j}{\sum\limits_{j \text{ en passant par } i} \|x_j\|} - \frac{\sum\limits_{j \text{ en passant par } i} x_j \cdot f^{(k-1)}}{\sum\limits_{j \text{ en passant par } i} n_j} \quad (2)$$

## 5.3. description sommaire de l'algorithme

On part d'une estimée initiale $f^{(0)}$, qui peut être une image uniforme ou l'image obtenue par rétroprojection.
On répète à chaque itération l'opération définie par (1) ou (2). Un facteur de relaxation peut être introduit afin d'assurer une convergence plus rapide.

## 5.4. caractéristiques de la méthode

C'est un algorithme qui comme l'ART, peut s'adapter à toutes sortes de géométries. Il est néammoins beaucoup plus long que l'ART : intuitivement une itération de SIRT correspond environ à $M$ itérations de l'ART ($M$ est le nombre de projections). Une comparaison effectuée par Herman a montré que la convergence du SIRT est beaucoup plus lente que celle des techniques ART [3 p. 219].

## 5.5. implantation

L'algorithme a été proposé pour des applications à 2 dimensions. Bien que le principe soit généralisable facilement à trois dimensions, la lenteur de convergence est un frein important à l'implantation dans un cas purement 3D.

## 5.6. remarques complémentaires

On peut montrer que la méthode SIRT est un cas particulier d'une minimisation par moindres carrés, où la fonctionelle à minimiser est de la forme :

$$K(\boldsymbol{f}) = (\boldsymbol{p} - X\boldsymbol{f})^t\, W_1(\boldsymbol{p} - X\boldsymbol{f}) + (\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f_0})^t\, W_2(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f_0}) \quad (3)$$

où $\boldsymbol{W_1}$ et $\boldsymbol{W_2}$ sont des matrices carrées pouvant s'écrire sous la forme générique suivante :

$$\boldsymbol{W_1} = a\boldsymbol{A} \text{ et } \boldsymbol{W_2} = b\boldsymbol{B} + c\boldsymbol{C}^{-1} \quad \text{où } a, b \text{ et } c \text{ sont des réels.}$$

Le minimum de $K$ peut être trouvé grâce à un algorithme itératif de type Richardson, dont la récurrence est donnée par la formule suivante :

$$\boldsymbol{f}^{(n+1)} = \boldsymbol{f}^{(n)} + \lambda^{(n)} \left[a\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}^t\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{f}^{(n)}) + (b\boldsymbol{C}\boldsymbol{B} + c\boldsymbol{I})(\boldsymbol{f}_0 - \boldsymbol{f}^{(n)})\right] \quad (4)$$

La méthode SIRT est un cas particulier de (2) quand :

$$\boldsymbol{W}_1 = \boldsymbol{I} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{W}_2 = \boldsymbol{0}$$

Ainsi pour un problème mal–posé, on peut introduire des informations a priori sans trop changer l'algorithme, et ce de façon beaucoup plus générale que dans un algorithme ART [2]. Toutefois, en pratique, le choix du coefficient de relaxation n'est pas simple, et il peut être plus efficace d'employer une méthode de gradient conjugué pour trouver le minimum de $K(f)$.

### BIBLIOGRAPHIE


[1] P. Gilbert, « Iterative Methods for the Three Dimensional Reconstruction of an Object from Projections », *J. Theor. Biol.*, vol. 36, 1972, pp. 105–117.

[2] A.V. Lakshminarayanan, A. Lent, « Methods of Leasts Squares and SIRT in Reconstruction », *J. Theor. Biol.*, vol. 76, 1979, pp. 267–295.

[3] G.T. Herman, « Image Reconstruction from Projections : the Fundamentals of Computerized Tomography », *Academic Press*, 1980.

# 6. décomposition sur des bases de fonctions cylindriques

## 6.1. idée générale et hypothèses

La fonction $f$, qui est de support limité, est décomposée sur une base de fonctions générées en coordonnées cylindriques, afin de traduire mieux la forme de l'objet, qui est le thorax. Les fonctions de base sont choisies de façon à pouvoir calculer analytiquement leurs projections dans la géométrie choisie.

## 6.2. principe de la méthode

Dans le cas d'une géométrie où la source de rayons X tourne sur un cercle perpendiculaire à l'axe $Oz$ du repère cylindrique $(O; r, \varphi, z)$, les fonctions de base $g_i$ sont de la forme :

$$g_i = R_k(r)\, T_l(j)\, Z_q(z) \qquad (1)$$

avec $k \in [1, K]$, $l \in [0, 2L]$, $q \in [1, 2Q-1]$ et $I \in [l, I]$,
avec $I = K(2L+1)(2M-1)$. $i$ est indexé de la façon suivante : $i = k + [(q-1) + l(2Q-1)]K$ Les fonctions sont définies ainsi :

$$R_k(r) = \left| \begin{array}{ll} 1 & \text{si } |r - r_k| < d_r/2,\ r_k = (k-1/2)d_r \\ & \text{et } d_r \text{ résolution en } r \\ 0 & \text{ailleurs} \end{array} \right.$$

$$T_l(\varphi) = \left| \begin{array}{ll} \cos\left(\frac{1}{2} l\varphi\right) & \text{si } l \text{ pair} \\ \sin\left(\frac{1}{2}(l+1)\varphi\right) & \text{si } l \text{ impair} \end{array} \right. \qquad (2)$$

$$Z_q(z) = \left| \begin{array}{ll} 1 & \text{si } |z - z_q| < d_z/2,\ Z_q(Q-q)d_z, \\ & d_z \text{ résolution en } z \\ 0 & \text{ailleurs} \end{array} \right.$$

L'objet est donc décomposé en petites coupes (indicées par $q$), dans lesquelles on découpe des couronnes (indicées par $k$), et l'angle polaire est défini par ses coefficients de Fourier.

Soit $f_i$ le coefficient de décomposition de $f$ sur $g_i$ et $p_j^i$ projection numéro $j$ de la fonction $g_i$, les coefficients $f_i$ sont choisis de façon à minimiser l'écart aux données $Err$ soit :

$$Err = \sum_{j=1}^{m} \left( p_j - \sum_{i=1}^{I} f_i p_j^i \right)^2$$

La solution optimale est obtenue en inversant le système matriciel suivant :

$$\boldsymbol{X^t p} = \boldsymbol{X^t X f}, \qquad (3)$$

$\boldsymbol{f}$ est le vecteur regroupant les $I$ coefficients $f_i$, et $\boldsymbol{X}$ une matrice de $M \times I$ éléments $X_{ij}$ avec $X_{ij} = p_j^i$.

L'indexation de $i$ est choisie de façon à pouvoir transformer la matrice $\boldsymbol{X^t X}$ en une forme diagonale par blocs pour simplifier l'inversion.

## 6.3. description sommaire de l'algorithme

Il se décompose en plusieurs étapes :

– calcul des fonctions de base et de leurs projections,

– résolution du système (3) en décomposant la matrice en blocs indépendants.

## 6.4. caractéristiques de la méthode

La difficulté de la méthode est de trouver des fonctions de base dont les projections sont facilement calculables, étant donné une géométrie d'enregistrement. Ces fonctions doivent aussi traduire les symétries du système afin de pouvoir décomposer l'inversion en une suite de petites inversions (diagonalisation du système par blocs).

## 6.5. implantation

Cette méthode a été implantée pour l'imagerie cardiaque dynamique 3D (la machine DSR de la Mayo Clinic), où les positions des sources sont situées sur un cercle perpendiculaire à l'axe de rotation du système. Cette méthode semble difficilement généralisable à d'autres géométries d'enregistrement.

### BIBLIOGRAPHIE

[1] M.D. Altschuler, G.T. Herman, « Fully Three Dimensional Image Reconstruction using Series Expansion Methods », *A Review of Information Processing in Medical Imaging*, A.B. Brill et al, Eds. Oak Ridge National Laboratory, Oak Ridge, Tenn., 1977, p. 125.

[2] M.D. Altschuler, G.T. Herman, A. Lent, « Fully Three Dimensional Image Reconstruction from Cone Beam Sources », *Proc. IEEE Conf. on Pattern Recognition and Image Processing*, Chicago, USA, 1978, pp. 194–199.

# 7. décomposition en voxels naturels avec contraintes

## 7.1. idée générale et hypothèses

La méthode consiste à développer la fonction objet en une base de fonctions adaptée à la géométrie d'enregistrement, pondérée par une fonction poids traduisant les informations a priori. Toute géométrie peut se modéliser dans cette approche.

## 7.2. principe de la méthode

En tomographie $X$, toute mesure de projection $p_i$ peut s'écrire avec une très bonne approximation sous la forme :

$$p_i = \int f(\boldsymbol{r})\, g_i(\boldsymbol{r})\, d\boldsymbol{r} \tag{1}$$

où $g_i(\boldsymbol{r}) = 1$, si $\boldsymbol{r}$ appartient à la zone qui contient les rayons allant de la source $X$ à la cellule du détecteur correspondante à la mesure n°$i$ et $g_i(\boldsymbol{r}) = 0$ en dehors. $g_i$ est appelé « voxel naturel ».
La fonction objet continue $f$ est décomposée en une somme de $m$ fonctions, soit :

$$f(\boldsymbol{r}) = \sum_{j=1}^{m} f_j\, g_j(\boldsymbol{r})\, w(\boldsymbol{r}) \tag{2}$$

où $w(\boldsymbol{r})$ est une fonction poids qui est aussi proche de l'objet que possible, étant donné les informations a priori disponibles (contrainte de support, informations de densité).

En reportant (2) dans (1), on obtient un système linéaire reliant les données $\boldsymbol{p}$ au vecteur de $m$ inconnues $\boldsymbol{f}$, qui sont les coefficients de $f$ sur la base définie en (2) :

$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{Hf}$ où $\boldsymbol{H}$ est une matrice symétrique de $m \times m$ éléments $H_{ij}$ avec

$$H_{ij} = \int g_i(\boldsymbol{r})\, g_j(\boldsymbol{r})\, w(\boldsymbol{r})\, d\boldsymbol{r} \tag{3}$$

Quand $w$ traduit une contrainte de support, $H_{ij}$ est donnée par l'aire d'intersection des deux bandes d'intégration $i$ et $j$, comprise dans la région de support. Une fois, le système (3) inversé, la fonction $f(\boldsymbol{r})$ peut être retrouvée en tout point en effectuant une rétroprojection pondérée par $w$ (cf. équation (2)).

## 7.3. description sommaire de l'algorithme

L'algorithme comprend trois étapes :

i) le calcul de la matrice $\boldsymbol{H}$, en tenant compte des éventuelles symétries. Il est à noter que $\boldsymbol{H}$ contient un grand nombre d'éléments nuls, qui n'ont pas besoin d'être stockés, et que cette étape peut être faite une seule fois pour une même géométrie et un même type d'objets,

ii) l'inversion de l'équation (3) par une méthode itérative proche du gradient conjugué,

iii) la rétroprojection des coefficient $f_i$ pour retrouver $f$ en tous les points désirés.

## 7.4. caractéristiques de la méthode

Cette méthode permet de traduire exactement le principe de formation d'images, et de relier à un ensemble de données discrètes une fonction f continue (sans passer par une discrétisation arbitraire de $f$). Son principe est très général et peut s'appliquer à toute géométrie 2D et 3D. La solution de (3) est en fait la fonction qui minimise une énergie de moindres carrés sur les projections, cette énergie étant pondérée par les fonctions poids. Le support de cette fonction est inclus dans le domaine où $w(\boldsymbol{r})$ est positif.
Une étude sur des reconstructions 2D a montré que cette méthode permettait, dans le cas où une contrainte de support était appliquée, d'estimer des fréquences spatiales de l'objet qui n'étaient pas transmises à l'enregistrement (cf. [2] pour une illustration de cet effet). Cette étude a également montré que la méthode était très stable en présence de bruit, la régularisation, dans notre mise en œuvre, s'opérant au moment de l'inversion en arrêtant le processus après un faible nombre d'itérations. La régularisation aurait aussi pu se faire en rajoutant une constante positive sur la diagonale de $\boldsymbol{H}$.

## 7.5. implantation

Cette méthode a été implantée :
- à deux dimensions dans une géométrie à angle de vue limité,
- à trois dimensions :
  - en médecine nucléaire pour un collimateur à canaux inclinés,
  - en ouverture codée à fentes.

Cette dernière implantation a été effectuée pour la reconstruction de la distribution de rayons $X$ émis par des plasmas induits par irradiation laser. En 2D, cette méthode a été appliquée à des mesures de gammamétrie enregistrées sur des tuyaux d'unités de raffinage. La méthode peut aussi être étendue dans le cas d'une géométrie à faisceau divergent.

### BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Buonocore, W.R. Brody, A. Macovski, « A Natural Pixel Decomposition for Two Dimensional Image Reconstruction », *IEEE Trans. Biomed. Engineering*, vol. 28, 1981, pp. 69–78.

[2] L. Garnéro, « Reconstruction d'images tomographiques à partir d'un ensemble limité de projections », *Thèse, d'Etat, Université Paris-Sud*, 1987.

[3] L. Garnéro, J.P. Hugonin, N. De Beaucoudrey, « Direct 3D Imaging using Constrained Natural Voxel Decomposition », *SPIE*, vol. 1137, Science and Engineering Medical Imaging, 1989, pp. 46–53.