

Restauration par migration de signaux 2D sous-échantillonnés

Rebuilt by Migration of Undersampled 2D Signals

par Alain HERIQUE et Wlodek KOFMAN

CEPHAG – URA 346 ENSIEG, BP 46 F-38402 Saint Martin d'Hères

résumé et mots clés

Les techniques de prospection géophysique active (sismique, radar géophysique) reposent sur la mesure d'un signal réfléchi. Cette mesure est effectuée en différents points de l'espace, elle fournit une image de l'amplitude du signal réfléchi en fonction du temps et d'une dimension de l'espace (x). A partir de ces données, nous cherchons à obtenir une coupe du sous-sol. Mais, du fait de la faible directivité des capteurs et des sources utilisées, l'image en temps et en espace n'est pas immédiatement transposable en une image fonction de deux dimensions de l'espace (x, z), d'où l'utilisation des techniques de migration pour la reconstruire.

Nous nous intéresserons ici à la migration $f - k$ qui donne une solution de l'équation de propagation dans l'espace des fréquences et des nombres d'onde, et à son comportement face au sous-échantillonnage temporel. Pour cela, nous développerons une méthode de caractérisation du sous-échantillonnage et d'estimation de l'ondelette émise. Ensuite, nous calculerons analytiquement le résultat de la migration d'un signal sous-échantillonné dans le cas d'un réflecteur simple. Ce calcul montre que la partie correctement échantillonnée du signal est focalisée par la migration, tandis que la partie repliée est étalée. Nous en déduisons une méthode de compensation du repliement fondée sur la cohérence spatiale du signal. Cette compensation — partielle — se fait au détriment du rapport signal sur bruit et peut générer des fantômes. Nous discuterons les différents aspects de cette nouvelle méthode : des simulations permettront de caractériser les performances de la méthode. Nous appliquerons l'estimation de l'ondelette et la migration aux signaux réels acquis en Antarctique par le radar géophysique développé pour la mission spatiale Mars'98.

Echantillonnage, Repliement, Signaux 2D, Migration $f - k$, Géophysique, Sismique, Radar géophysique, Glaciologie.

abstract and key words

Active geophysical prospecting techniques (seismics, ground penetrating radar) are based on the measurement of a reflected signal. This measurement is done for different points in the space and gives an image of reflected signal amplitude versus time (range) and versus one direction in space (x). We use this data to rebuild an image of the subsurface. But the fact that directivity of transmitter and receiver is low, induces that the image versus x and t is not equivalent to the subsurface image (x, z). Migration techniques are developed to derive the subsurface image.

In this paper, we use the $f - k$ migration technique which gives a solution of the wave equation in the frequency-wavenumber domain and we study the effect of undersampling in the time domain on this method. We describe a method to characterize this effect and estimate the real wavelet. We calculate the analytic result of migration of undersampled signal for a simple reflector. We find that the correctly sampled part of the signal is focused by migration and the aliased part is spread out from this calculation. We deduce a method to rebuild the well-sampled 2D signal. The weakness of this technique is a decrease of the signal to noise ratio and the generation of spurious images. We discuss all aspects of this new technique on synthetic data.

The wavelet estimation and the frequency-wavenumber migration are applied to the ground penetrating data acquired in Antarctica by the radar developed for Mars'98 mission.

Sampling, Aliasing, 2D signals, $f - k$ Migration, Geophysics, Seismics, Ground Penetrating Radar, Glaciology.

1. introduction

Différentes techniques de prospection géophysique active reposent sur le même principe : une onde est émise, elle se propage, elle est réfléchiée par les discontinuités de propriétés physiques (impédance). Le signal réfléchi est mesuré en fonction du temps, il porte des informations sur le milieu traversé, la géométrie et la nature des réflecteurs. Cette opération est répétée en différents points de l'espace afin d'obtenir une image de l'amplitude du signal réfléchi en fonction du temps et d'une dimension de l'espace (x). En général, le signal est filtré en temps avant acquisition, afin d'éviter tout repliement. Ce problème est particulièrement vif en radar géophysique où les fréquences émises peuvent atteindre quelques gigahertz : ces gammes de fréquence sont difficilement accessibles en numérique. Ainsi, la fréquence de l'échantillonnage et du stockage 8 bits est limitée à 500 MHz : l'échantillonnage stroboscopique est le palliatif classique de cette limite (Annexe A).

Ce problème est aggravé lors des applications spatiales du radar géophysique : la faible puissance disponible et les conditions extrêmes de fonctionnement (température, rayonnement, chocs) interdisent l'utilisation des composants les plus performants, le volume de données rapatrié sur terre demeure l'une des contraintes principales.

Ainsi, l'ensemble convertisseur, accumulateur et mémoire FIFO (First In, First Out) du radar PRISM développé pour la mission Mars'98 était limité à une fréquence de 30 MHz en 1991 (et environ 40 MHz aujourd'hui) : puisque la bande du signal émis dépend de la permittivité diélectrique du milieu proche, les conditions de Shannon peuvent ne pas être remplies pour certains milieux. Nous avons pris le risque de sous-échantillonner le signal acquis et nous avons volontairement omis d'utiliser un filtre anti-repliement afin de ne pas dégrader le rapport signal sur bruit et la résolution de nos profils.

Dans un premier temps, nous rappellerons le principe de la migration $f - k$ pour des signaux correctement échantillonnés. Cette migration donne une solution de l'équation de propagation dans l'espace des fréquences et permet de définir le support du signal dans l'espace ν f_x et f_y des fréquences temporelles et spatiales. Pour cela, nous nous placerons en mode émetteur/récepteur communs.

Nous étudierons ensuite le sous-échantillonnage temporel, son effet en temps et en fréquence. Nous proposerons une méthode d'estimation de l'ondelette fondée sur l'analogie entre un réflecteur plan et l'échantillonnage stroboscopique.

Enfin, nous calculerons l'expression analytique de la migration d'un signal sous-échantillonné produit par un réflecteur infini,

plan, incliné. Nous verrons comment se comportent les deux composantes du signal — la composante réelle et la composante repliée — et nous en déduirons une méthode de restauration des signaux fondée sur la cohérence spatiale.

Nous l'appliquerons à des signaux simulés afin de quantifier ces performances, puis à des signaux réels acquis en Antarctique par le radar géophysique développé pour la mission spatiale Mars'98.

Tout au long de ce travail nous nous placerons dans des conditions de sous-échantillonnage léger : nous considérerons que la fréquence d'échantillonnage est supérieure à la fréquence maximale du signal. Spectralement, cela revient à constater que le signal n'est replié qu'une seule fois. De plus, nous considérerons l'échantillonnage spatial comme parfait (cf. § 2.3).

2. migration

Les sources et les capteurs utilisés en géophysique (micro, antenne...) sont généralement peu directifs. Ainsi le signal mesuré ne provient pas d'une seule direction mais de tout le lobe d'antenne. Cela se traduit par le fait qu'un réflecteur isolé ne produit pas seulement un écho à sa verticale mais une trace hyperbolique sur l'image en t et en x (figure 1). De même, une interface inclinée qui réfléchit le signal en incidence normale apparaît avec une pente plus faible que sa pente réelle.

La migration est une technique utilisée pour corriger ces déformations. Elle focalise les hyperboles générées par un réflecteur ponctuel et reconstruit l'image en fonction de x et z . Le principe est de rétropropager le signal réfléchi en résolvant l'équation d'onde. La migration $f - k$ résout l'équation d'onde dans l'espace des fréquences spatiales et temporelles [Stolt]. Elle nécessite les hypothèses suivantes [French] :

- tout point du milieu étudié est un réflecteur potentiel;
- tout réflecteur linéaire peut être assimilé à une suite de réflecteurs ponctuels;
- la vitesse de propagation est constante dans l'ensemble du milieu;
- l'ondelette émise est la même dans toutes les directions;
- tous les points de mesure sont alignés.

Sous ces conditions, la méthode présente l'avantage de fournir une solution exacte de l'équation de propagation. Elle nous permet donc de donner une solution analytique dans le cas de réflecteurs simples.

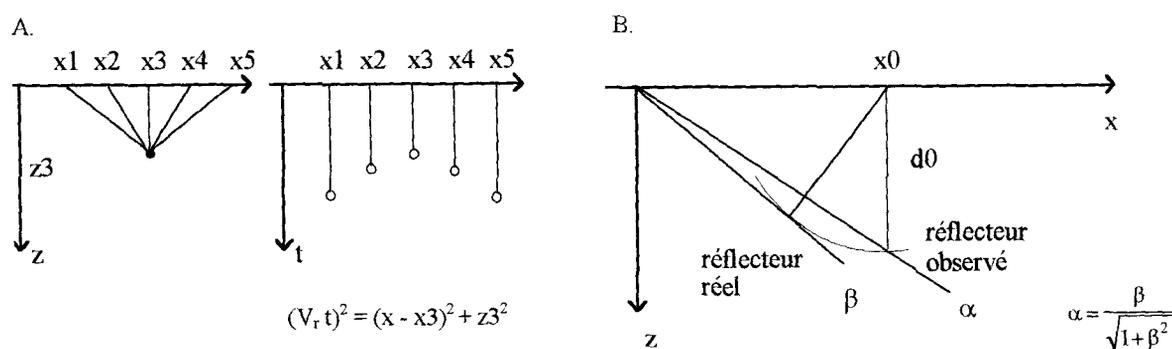


Figure 1. – A. Un réflecteur ponctuel en x, t et en x, z .
B. Un réflecteur plan de pente β .

2.1. le modèle des réflecteurs explosifs

Pour simplifier la propagation nous utilisons le modèle des réflecteurs explosifs. Nous ne prenons donc plus en compte le trajet aller-retour de l'onde mais nous considérons que chaque point réfléchissant émet au temps $t = 0$ une ondelette dans toutes les directions (Principe de Huygens). Cette ondelette se propage à une vitesse, V , égale à la moitié de la vitesse de propagation réelle. Le temps de parcours est identique dans le modèle et dans le cas réel.

La propagation de l'ondelette, tant dans le cas réel que dans le modèle, est régie par l'équation d'onde qui suit :

$$\frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \quad (1)$$

Avec V la moitié de la vitesse de propagation réelle et P la grandeur physique mesurée associée à l'onde.

Nous connaissons le signal mesuré en surface :

$$P(x, t, z = 0)$$

2.2. migration $f - k$

L'équation (1) s'exprime dans l'espace des fréquences temporelles ν , des fréquences spatiales horizontales f_x et des profondeurs z par équation différentielle du second ordre :

$$\frac{\partial^2 P(f_x, \nu, z)}{\partial z^2} = -4\pi^2 \left(\frac{\nu^2}{V^2} - f_x^2 \right) P(f_x, \nu, z)$$

La première condition aux limites de l'équation différentielle est le signal enregistré à la surface : $P(x, t, z = 0)$ connu pour tous les temps et tous les x :

$$P(f_x, \nu, z = 0) = \iint P(x, t, z = 0) e^{-2\pi j(\nu t + f_x x)} dx dt$$

La seconde contrainte est le type d'ondes recherché. Les ondes solutions sont des ondes montantes qui se propagent vers les profondeurs négatives (Figure 1).

$$P(f_x, \nu, z) = P(f_x, \nu, z = 0) e^{\text{sgn}(\nu) j \phi z}$$

avec la phase ϕ : $\phi = 2\pi \sqrt{\frac{\nu^2}{V^2} - f_x^2}$

Nous cherchons l'image des réflecteurs. Dans le modèle des réflecteurs explosifs, cela revient à chercher le signal émis à la date $t = 0$. Ce signal est calculé par transformée de Fourier inverse, pour tout x et pour $t = 0$:

$$P(x, t = 0, z) = \iint P(f_x, \nu, z = 0) e^{\text{sgn}(\nu) j \phi z} e^{2\pi j f_x x} df_x d\nu \quad (2)$$

2.3. occupation de l'espace des fréquences

Dans l'espace des fréquences f_x, f_z, ν , l'équation d'onde définit un cône, surface support de l'énergie du signal. L'équation de dispersion est :

$$\frac{\nu^2}{V^2} = f_x^2 + f_z^2$$

Ce cône est généré par la droite $\nu = V f_x$ (Figure 2). La localisation de l'énergie sur ce support permet de calculer simplement le spectre en f_z du signal :

$$P(f_x, \nu, f_z) = P(f_x, \nu, z = 0) \delta \left(f_z - \sqrt{\frac{\nu^2}{V^2} - f_x^2} \right)$$

Dans cet espace, la rétropropagation est une projection du plan (f_x, ν) sur le cône puis sur le plan (f_x, f_z) . Cette représentation de l'équation d'onde nous permet de filtrer les données avant migration. En effet, les ondes solutions de l'équation de propagation

ont ce cône comme support. Dans le plan (f_x, ν) , elles sont localisées dans la partie où $\nu > V f_x$. Ce secteur correspond à une phase ϕ réelle : la migration somme différentes contributions en leur appliquant un retard.

Par contre, l'autre secteur correspond aux ondes évanescentes qui ne se propagent pas et sont atténuées rapidement — ou amplifiées si nous ne regardons que la solution mathématique. La phase ϕ est imaginaire : il s'agit d'une compensation d'amplitude, amplification ou atténuation.

Le signal réel est mesuré en champ lointain : il ne comprend que des ondes se propageant (ϕ réel). L'énergie éventuellement présente dans la seconde partie du plan est du bruit seul, par exemple le bruit propre à chaque capteur décorrélé d'un point de mesure à l'autre, donc spatialement blanc. Ce bruit peut être amplifié et dégrader fortement la qualité de l'image migrée. La partie du plan (f_x, ν) où $\nu < V f_x$ est donc coupée avant la migration.

Cette dernière équation nous permet de définir la fréquence d'échantillonnage spatiale en champ lointain en fonction de la fréquence la plus grande du signal émis : $f_{xe} = \nu_{\max}/V$. Elle permet aussi de localiser le signal rétropropagé dans le plan f_x, f_z . Le signal porté sur le cône est projeté sur ce plan. Pour une fréquence d'échantillonnage $2\nu_o$ donnée, le signal reconstitué est projeté dans le cercle de rayon secteur ν_o/V (figure 2).

La résolution finale spatiale de l'image est définie par la fréquence d'échantillonnage et la bande de l'ondelette. Tout filtrage tendant à limiter le repliement se fera au détriment de la résolution spatiale.

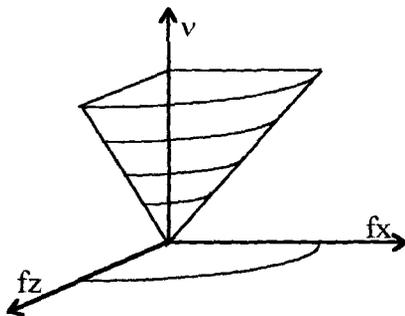


Figure 2. – Surface définie par l'équation d'onde

3. le sous-échantillonnage

Avant d'étudier les effets du sous-échantillonnage sur la migration, nous le caractériserons en montrant ses effets sur le signal temporel et sur la densité spectrale d'énergie. Nous développerons ainsi une méthode d'estimation de l'ondelette fondée sur la cohérence spatiale du signal. Dans la pratique, cette estimation nous permettra de connaître la bande du signal réel et guidera le filtrage appliqué après la reconstruction par migration.

3.1. spectre d'un signal sous-échantillonné

Une ondelette, w , arrivant à la date d , est échantillonnée avec un pas d'échantillonnage T . Le signal temporel s'écrit :

$$s(t) = w(t - d) \sum \delta(t - nT)$$

et son spectre s'écrit, en fonction du spectre de l'ondelette, W :

$$S(\nu) = \sum_n W\left(\nu - \frac{n}{T}\right) e^{-2\pi j d \nu} e^{2\pi j \frac{d n}{T}}$$

Nous nous plaçons dans le cas d'un sous-échantillonnage faible, avec une fréquence d'échantillonnage, $F_e = 1/T$, supérieure à la fréquence maximale du signal (fréquence la plus haute portant de l'énergie). La bande de l'ondelette est donc entièrement contenue dans l'intervalle $\pm F_e$.

Dans l'expression précédente, seules les contributions pour $n = 0$ et $n = 1$ sont non nulles sur la bande $0, F_e/2$:

$$S(\nu) = e^{-2\pi j d \nu} \left(W(\nu) + W\left(\nu - \frac{1}{T}\right) e^{2\pi j \frac{d}{T}} \right)$$

La densité spectrale d'énergie (dse) du signal échantillonné est la somme de la dse de l'ondelette, de la dse de l'ondelette repliée et de l'interspectre de l'ondelette avec l'ondelette repliée :

$$\gamma_x(\nu) = \gamma_w(\nu) + \gamma_w\left(\nu - \frac{1}{T}\right) + 2\text{Re} \left(W(\nu) W^*\left(\nu - \frac{1}{T}\right) e^{-2\pi j \frac{d}{T}} \right)$$

Ce dernier terme est modulé en fonction de la date d'arrivée de l'ondelette par rapport au peigne d'échantillonnage.

$$\gamma_x(\nu) = \gamma_w(\nu) + \gamma_w\left(\nu - \frac{1}{T}\right) + 2\gamma(\nu) \cos\left(\Phi(\nu) - 2\pi \frac{d}{T}\right)$$

avec $\gamma(\nu)$, le module de l'interspectre et $\Phi(\nu)$, sa phase.

En particulier, la dse s'écrit pour la moitié de la fréquence d'échantillonnage :

$$\gamma_x\left(\frac{1}{2T}\right) = 2\gamma_w\left(\frac{1}{2T}\right) \left[1 + \cos\left(\Phi\left(\frac{1}{2T}\right) - 2\pi \frac{d}{T}\right) \right]$$

Suivant la date d'arrivée de l'ondelette, cette fréquence est amplifiée ou atténuée. Physiquement, cela revient à constater que le peigne d'échantillonnage temporel peut tomber sur les zéros de l'ondelette à cette fréquence ou sur des points non nuls. Pour une ondelette brève ce phénomène est identique pour l'ensemble des hautes fréquences.

L'énergie totale du signal varie suivant la date d'arrivée de l'ondelette. Cette variation est périodique, de période égale à la période d'échantillonnage $1/T$.

$$E_x = E_w + 2 \int_{-1/2T}^{1/2T} \gamma(\nu) \cos \left(\Phi(\nu) - 2\pi \frac{d}{T} \right) d\nu$$

avec E_x l'énergie du signal et E_w l'énergie de l'ondelette.

Nous considérons un réflecteur plan incliné : la date d'arrivée de l'ondelette varie continûment. L'énergie de l'ondelette est modulée avec une périodicité égale à une période d'échantillonnage. Il apparaît alors un phénomène de scintillement régulier le long du réflecteur (figure 3). Son caractère systématique, cette régularité d'un réflecteur à l'autre et cette périodicité d'un pas d'échantillonnage permettent de différencier le repliement d'un phénomène d'interférence provoqué par deux réflecteurs proches.

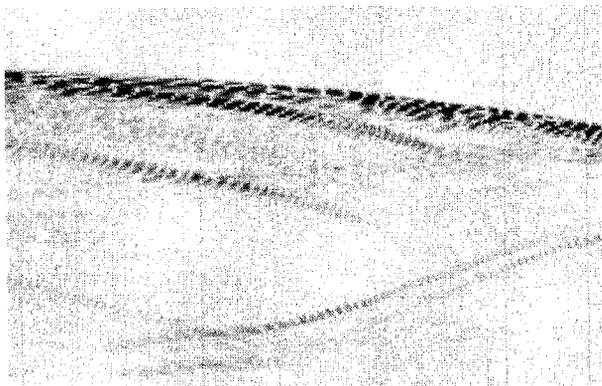


Figure 3. – Scintillement provoqué par le sous-échantillonnage (profil radar géophysique acquis en Antarctique – amplitude du signal reçu).

3.2. reconstruction du signal par échantillonnage stroboscopique

La cohérence spatiale permet de reconstruire l'ondelette correctement échantillonnée et d'estimer son spectre. Dans le cas d'un réflecteur plan suffisamment long, le signal et sa partie repliée peuvent être séparés dans le plan $f - k$, mais en pratique cette méthode n'est que rarement utilisable. Les données réelles ne présentent pas de réflecteur plan suffisamment long et le résultat est biaisé par de nécessaires apodisations.

Nous pouvons par contre reconstruire l'ondelette dans le domaine temporel, pour un réflecteur isolé, continu, incliné, de forme quelconque en simulant un échantillonnage stroboscopique. Nous considérons alors les différentes ondelettes le long du profil comme plusieurs réalisations d'un même signal et la pente du réflecteur comme le décalage temporel entre les différents peignes d'échantillonnage (figure 4).

Sélectionnons un morceau de réflecteur sur lequel l'ondelette ne varie pas. Soit $f(x)$, l'équation du réflecteur, le signal réfléchi s'écrit :

$$s(t, x) = w(t - f(x))$$

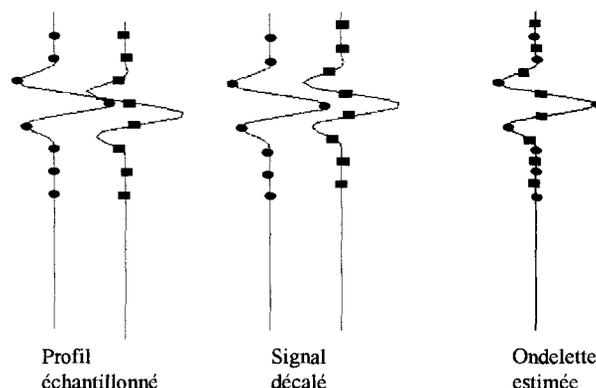


Figure 4. – Reconstruction d'une ondelette mal échantillonnée.

Après échantillonnage en temps avec un pas T et en espace Δx , l'expression du signal réfléchi est :

$$s_e(t, k) = w(t - f(k\Delta x)) \sum_m \delta(t - mT)$$

Nous rééchantillonnons le signal en intercalant $N - 1$ échantillons de valeur nulle entre chaque échantillon. Le signal s'écrit en temps et espace discrets :

$$s_d(n, k) = w \left(\frac{nT}{N} - f(k\Delta x) \right) \sum_m \delta_c(n - mN)$$

avec δ_c symbole de Kronecker.

Nous compensons alors au mieux la forme géométrique du réflecteur en décalant le signal d'un nombre entier d'échantillons. Le signal redressé est :

$$s_r(n, k) = s_d \left(n - E(f(k\Delta x)), k \right) \\ s_r(n, k) = w \left(\frac{nT}{N} - D(f(k\Delta x)) \right) \sum_m \delta_c \left(n - mN + E(f(k\Delta x)) \right)$$

avec $E(x)$ la partie entière

et $D(x)$ la partie décimale : $D(x) = x - E(x)$.

Nous estimons l'ondelette en sommant alors sur l'ensemble du réflecteur, avec un gain $G^{-1}(n)$ variable dans le temps :

$$\hat{w}(n) = \frac{1}{G(n)} \sum_k s_r(n, k)$$

L'estimateur se simplifie et peut être écrit :

$$\hat{w}(n) \approx \frac{1}{G(n)} w \left(\frac{nT}{N} \right) \sum_{k,m} \delta_c \left(n - mN + E(f(k\Delta x)) \right)$$

avec l'approximation suivante, pour $D(f(k\Delta x))$ petit devant les variations de l'ondelette :

$$w \left(\frac{nT}{N} - D(f(k\Delta x)) \right) \approx w \left(\frac{nT}{N} \right)$$

En choisissant un gain adapté, nous obtenons un estimateur non biaisé de l'ondelette. Avec pour chaque n , $G(n)$ égal au nombre d'échantillons non nuls sommés à cette date :

$$G(n) = \sum_{k,m} \delta_c \left(n - mN + E(f(k\Delta x)) \right)$$

et

$$\hat{w}(n) \approx w \left(\frac{nT}{N} \right)$$

Dans la pratique, cette estimation de l'ondelette à T/n présente trois limites :

- La reconstitution suppose que l'erreur de correction de la géométrie du réflecteur soit faible face aux variations de l'ondelette. Dans le cas contraire, l'imprécision sur la prise d'échantillons atténue les hautes fréquences par effet de « jitter ». Comme l'erreur d'échantillonnage est de l'ordre de la nouvelle période d'échantillonnage, il est nécessaire de rééchantillonner le signal avec une nouvelle fréquence d'échantillonnage grande face à la bande du signal réel.

- Naturellement, la reconstitution réclame au moins un point présentant du signal pour chaque point reconstitué ($G(n) \neq 0$). Cette lapalissade tend à limiter le facteur de sur-échantillonnage N , d'autant plus que la longueur du réflecteur est faible.

- Par ailleurs, il est nécessaire d'utiliser un réflecteur isolé. La présence d'un réflecteur parallèle et proche du réflecteur utilisé biaisera l'estimation (biais identique dans le cas correctement échantillonné) tandis que la présence d'un réflecteur non parallèle bruyera l'estimation (sommation incohérente de puissance plus faible que la somme cohérente le long du réflecteur redressé).

La qualité de la reconstitution dépend donc principalement de la longueur du réflecteur. Un grand nombre de traces permettra un fort sur-échantillonnage et une bonne estimation sans atténuation des hautes fréquences.

4. migration et sous-échantillonnage

Il s'agit maintenant de comprendre le comportement du signal replié lorsque des données sous-échantillonnées sont migrées : la partie du signal correctement échantillonnée, régie par l'équation de propagation, est focalisée tandis que la partie repliée — artefact ne se propageant pas — n'est pas *a priori* compressée. Nous en déduisons ensuite une méthode de reconstruction du signal correctement échantillonné au prix d'un traitement assez simple.

4.1. réflecteur plan sous-échantillonné

Le calcul de l'expression analytique du signal migré est complexe. Nous le développerons dans le cas simple d'un réflecteur plan, infiniment long, de pente apparente α avec une vitesse de propagation unitaire dans le modèle (figure 5). La pente α est alors comprise entre 0 et 1 : $\alpha = 0$ correspond à un réflecteur horizontal et $\alpha = 1$ correspond à un réflecteur réel vertical.

$$c(t, x) = w(t - \alpha x)$$

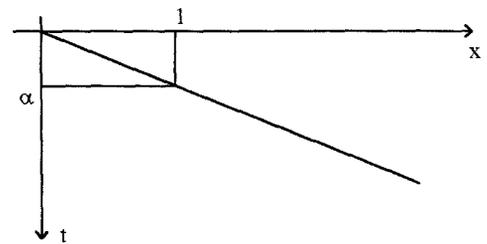


Figure 5. - Réflecteur plan.

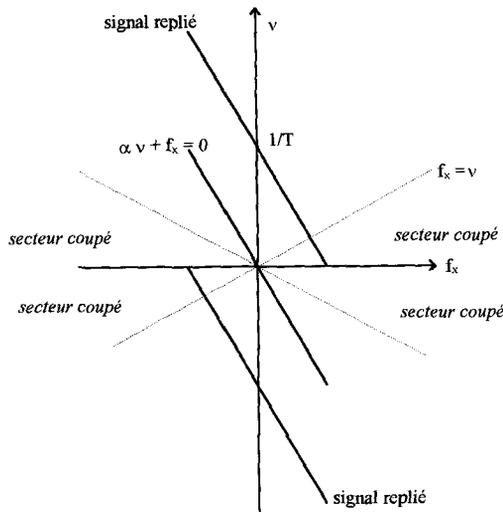
Cette onde plane est échantillonnée en temps avec une période d'échantillonnage T . Nous supposons que le repliement du signal est limité; c'est-à-dire que la bande de l'ondelette est comprise dans la bande $-1/T, +1/T$. Pour simplifier le calcul nous conserverons la dimension temporelle continue : l'échantillonnage est alors équivalent à la multiplication par un peigne de Dirac. De même, nous resterons en distances continues pour tout le calcul :

$$s(t, x) = w(t - \alpha x) \sum \delta(t - nT)$$

$$S(\nu, f_x) = \sum_n W \left(\nu - \frac{n}{T} \right) \delta \left(\alpha \nu - \frac{\alpha n}{T} + f_x \right)$$

Le signal est porté par la droite $\alpha \nu + f_x = 0$ dans le plan fréquentiel. L'échantillonnage temporel a périodisé le spectre à l'infini avec une périodicité de $\nu = 1/T$, mais sur la bande $\pm 1/T$ seules les trois contributions $n = 0$ (signal utile), $n = 1$ et $n = -1$ (signal replié) sont non nulles (figure 6). Les supports du signal et des signaux repliés sont distincts; la cohérence spatiale permet de discriminer les différentes composantes du signal dans ce plan.

La partie non repliée du signal suit l'équation de propagation, elle est contenue dans le triangle défini par $\nu > |f_x|$. Par contre, le signal replié présente de l'énergie dans les deux domaines (onde se propageant et onde évanescence). Nous pouvons couper le signal replié qui correspond aux ondes évanescences dans le plan (ν, f_x) (secteur où $f_x > \nu$, cf. § 2.3 et figure 6). Pour un réflecteur de pente α , ce secteur correspond à $\nu < \alpha/T(1 + \alpha)$.


 Figure 6. – Support du signal utile et du signal replié dans le plan $f-k$.

4.2. le signal migré dans le plan des fréquences spatiales

Nous ne pouvons calculer analytiquement l'expression en x et z du signal migré. Nous passerons donc par l'espace des fréquences spatiales f_x, f_z afin d'effectuer un calcul approché de la solution. Le résultat de la migration s'écrit comme la somme de différents termes (cf. annexe B) :

$$T(f_z, f_x) = \sum_n T_n(f_z, f_x)$$

avec :

$$T_n(f_z, f_x) = W\left(-\frac{f_x}{\alpha}\right) \delta\left(\operatorname{sgn}\left(\frac{n}{T} - \frac{f_x}{\alpha}\right) \sqrt{\frac{n^2}{T^2} + \frac{f_x^2}{\alpha^2} - \frac{2nf_x}{\alpha T}} - f_x^2 - f_z\right)$$

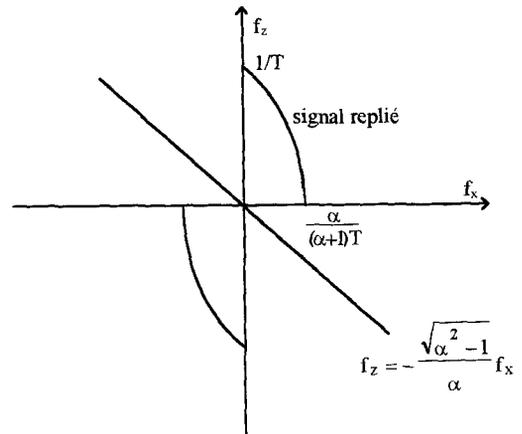
Comme nous l'avons vu, seules les composantes $n = 0, n = 1$ et $n = -1$ sont non nulles sur la bande $\pm 1/T$ (sous-échantillonnage limité).

T_0 est le signal utile :

$$T_0(f_z, f_x) = W\left(-\frac{f_x}{\alpha}\right) \delta\left(f_z + f_x \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - 1}\right)$$

$$T_0(z, x) = w\left(\sqrt{1 - \alpha^2}z - \alpha x\right)$$

T_1 et T_{-1} correspondent au signal replié. Ces deux contributions sont liées par une symétrie hermitienne. Nous ne calculerons que


 Figure 7. – Signal utile et du signal replié dans le plan f_x-f_z .

le signal analytique associé — T_1 sur la bande $0, 1/T$ — en filtrant les fréquences $f_x > \nu$.

$$T_1(f_z, f_x) = W\left(-\frac{f_x}{\alpha}\right) \delta\left(\sqrt{\frac{1^2}{T^2} + \frac{f_x^2}{\alpha^2} - \frac{2f_x}{\alpha T}} - f_x^2 - f_z\right)$$

Le support de l'énergie dans le plan f_x, f_z a comme équation :

$$f_z = \sqrt{f_x^2 \left(\frac{1}{\alpha^2} - 1\right) - \frac{2f_x}{\alpha T} + \frac{1}{T^2}}$$

Le support de l'énergie du signal est un arc d'hyperbole qui s'étend du point $f_x = 0, f_z = 1/T$ jusqu'à son sommet en $f_x = \alpha/T(\alpha + 1), f_z = 0$ (figure 7). L'ouverture de l'hyperbole dépend directement de la pente du réflecteur α . L'approximation de l'hyperbole dépend donc de ce paramètre.

4.3. solution approchée pour deux cas simples

Pour $\alpha \sim 0$

La pente du réflecteur est très faible et nous effectuons une approximation linéaire du support :

$$f_z = \sqrt{f_x^2 \left(\frac{1}{\alpha^2} - 1\right) - \frac{2f_x}{\alpha T} + \frac{1}{T^2}} \approx \frac{1}{T} - \frac{f_x}{\alpha}$$

$$T_1(f_z, f_x) = W\left(-\frac{f_x}{\alpha}\right) \delta\left(f_z + \frac{f_x}{\alpha} - \frac{1}{T}\right)$$

Le signal replié est focalisé par la migration, de la même façon que le signal utile. Le signal replié puis migré est égal au signal utile migré qui aurait ensuite été replié. Dans le domaine x, z , les deux composantes du signal ont la même localisation.

Physiquement, cela revient à constater que pour un réflecteur proche de l'horizontale le repliement n'est pas éliminé : la phase du signal replié est quasiment constante le long du réflecteur et le signal replié ne peut être dissocié du signal utile.

Pour $\alpha \sim 1$

La pente du réflecteur est forte et l'hyperbole est approximable par une parabole à l'aide du développement limité de f_x en fonction de f_z .

$$f_z = \frac{\alpha}{(\alpha + 1)T} - \frac{T}{2} f_x^2$$

$$T_1(f_x, f_z) = W \left(-\frac{f_x}{\alpha} \right) \delta \left(f_x - \frac{\alpha}{(\alpha + 1)T} + \frac{T}{2} f_z^2 \right)$$

En x et z , le signal est la convolution suivant x de l'ondelette par la réponse du milieu. Le signal analytique associé à la réponse du milieu s'écrit :

$$M_1(x, z) = \frac{e^{2\pi j \frac{\alpha x}{(\alpha+1)T}} e^{j\pi \frac{z^2}{xT}}}{\sqrt{2xT}} \left[C \left(\frac{z\sqrt{2}}{\sqrt{xT}} \right) - j S \left(\frac{z\sqrt{2}}{\sqrt{xT}} \right) \right] + C \left(\frac{(x-z)\sqrt{2}}{\sqrt{xT}} \right) - j S \left(\frac{(x-z)\sqrt{2}}{\sqrt{xT}} \right)$$

avec : $m_1(x=0, z) = \frac{e^{2\pi j \frac{z^2}{T}} - 1}{2\pi j}$

et : $C(x)$ et $S(x)$ les intégrales de Fresnel.

Nous pouvons préciser les domaines du plan présentant de l'énergie en assimilant les intégrales à leur limite à l'infini :

$C(x) \approx S(x) \approx 0,5$ pour $x > 0$

et $C(x) \approx S(x) \approx -0,5$ pour $x < 0$.

Cette approximation grossière montre que la somme des quatre intégrales de Fresnel est proche de $1 - j$ dans le triangle compris entre $x = z = 0$ et $z = x$, et qu'elle est quasiment nulle en dehors de ce triangle. Nous avons sur ce triangle, loin des bords :

$$M_1(x, z) \approx \frac{e^{2\pi j \frac{\alpha x}{(\alpha+1)T}} e^{j\pi \frac{z^2}{xT}} e^{j\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{xT}}$$

Le filtrage initial (§ 2.3) a coupé les fréquences supérieures à $\alpha/(\alpha + 1)T$; l'énergie du signal replié est donc *a priori* plus faible que l'énergie du signal utile. De plus, la partie repliée n'est pas compressée : elle est étalée sur tout ou partie du triangle $z = 0$, $z = x$ et sa puissance est inversement proportionnelle à la profondeur du réflecteur. Inversement, la partie correctement échantillonnée du signal est compressée par la migration, sa réponse est une fonction de Dirac. Comme la migration conserve les énergies, le signal replié apparaîtra comme un artefact plus faible que le signal compressé et comparable au bruit numérique de la migration.

4.4. synthèse

Ce calcul approché de l'expression analytique du signal replié migré montre l'effet de la migration sur le sous-échantillonnage. La partie correctement échantillonnée est bien focalisée par la migration tandis que la partie repliée est « étalée » de manière plus ou moins importante suivant la géométrie des réflecteurs.

Ce calcul explique le résultat de la migration de données réelles sous-échantillonnées. Classiquement, la migration est appliquée sur le domaine de fréquence $\pm 1/2T$. Dans notre cas, ce modèle comporte une partie du signal réel et une partie du signal replié : le résultat de la migration est un mélange de signaux focalisés et d'artefacts. Il y a eu perte de résolution : la bande de l'ondelette est réduite à la bande de traitement.

Nous pouvons améliorer ce résultat. Calculons le spectre par transformée de Fourier discrète sur la bande $\pm 1/T$ et migrions sur cette large bande : nous allons focaliser la totalité du signal utile. Par contre nous augmenterons l'énergie repliée, donc les artefacts.

Les simulations qui suivent nous permettent de démontrer la performance de cette technique et de caractériser les artefacts en fonction de la pente du réflecteur. Elles nous permettent également de mettre au point une méthode pratique de traitement des données avec filtrage après migration.

5. simulations

5.1. pente moyenne

Nous présentons dans un premier temps les résultats obtenus pour un profil synthétique présentant un unique réflecteur de pente moyenne ($\alpha = 0,5$).

Pour synthétiser un profil nous avons construit une ondelette dans le domaine fréquentiel sur la bande $\pm Fe$ (figure 8). Nous avons ensuite généré le réflecteur en introduisant un retard directement dans le domaine fréquentiel pour garantir une bonne continuité du signal. Nous sommes ensuite passés dans le domaine temporel avec un pas d'échantillonnage de $1/2 Fe$. Le profil traité est alors un profil de 512 traces de 512 échantillons. Nous n'en visualiserons que 350 sur 350 (figure 11.A).

Le profil a été filtré ($\nu > f_x$) puis migré sur la bande $\pm Fe$. Les résultats sont présentés par la Figure 11.B. Nous pouvons remarquer que le bruit numérique généré par la migration est faible (-35 dB) et peu étendu.

Le profil a ensuite été sous-échantillonné à la fréquence Fe . Afin de limiter le niveau des lobes secondaires, l'ondelette de chaque trace a été apodisée par une fenêtre de Hanning [Max] à la puissance 1/2 avant migration : la dse moyenne est présentée sur la figure 9; les données ont été interpolées par ajout de zéros en fréquence pour présenter les résultats à la même échelle et nous constatons que la fréquence centrale (fréquence du maximum) a

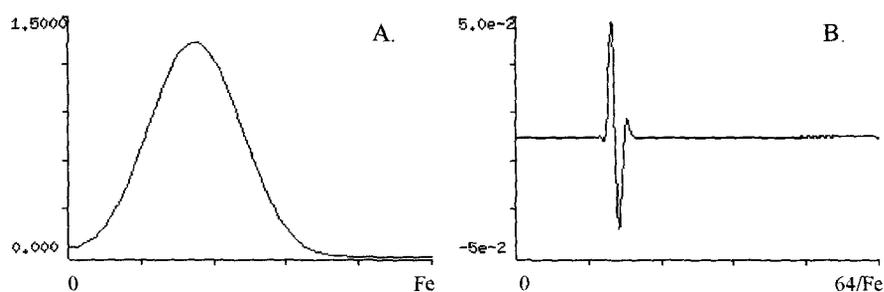


Figure 8. – Ondelette utilisée pour les simulations en fréquence et en temps.
 A. Dse moyenne du signal. B. Ondelette estimée (somme sur le réflecteur redressé).

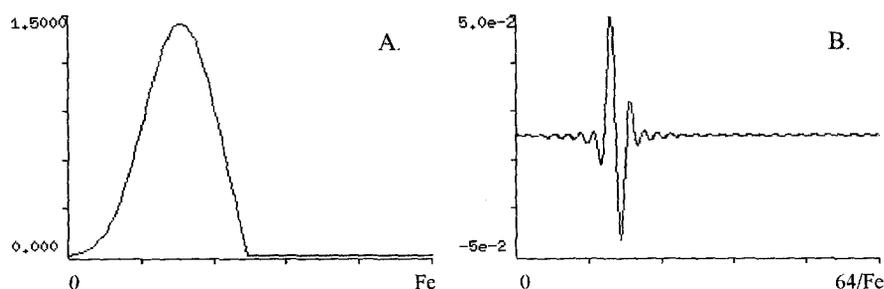


Figure 9. – Signal sous-échantillonné, apodisé puis migré sur $\pm Fe/2$.
 A. Dse moyenne du signal apodisé avant migration (moyenne de la dse de chaque trace).
 B. Ondelette estimée après migration (somme sur le réflecteur redressé).

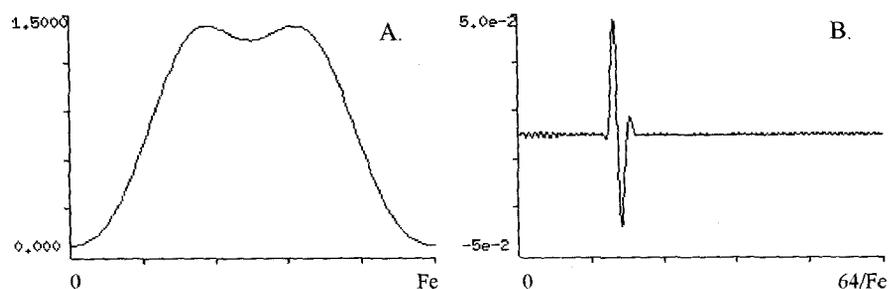


Figure 10. – Signal sous-échantillonné sur la bande initiale.
 A. Dse moyenne du signal avant migration (moyenne de la dse de chaque trace).
 B. Ondelette estimée après migration (somme sur le réflecteur redressé).

diminué en raison de l'apodisation. Ce profil a été filtré ($\nu > f_x$) puis migré sur la bande $\pm Fe/2$ (figure 11.C). Après migration l'ondelette a été estimée en effectuant une moyenne temporelle le long du réflecteur redressé (figure 9.B).

Dans cette configuration, la partie correctement échantillonnée du profil (figure 11.C) correspond au profil qui aurait été obtenu avec un filtre anti-repliement avant le sous-échantillonnage à la fréquence Fe .

Le profil ainsi traité présente un bruit numérique plus fort que le profil précédent. Il est dû au signal replié. La largeur de l'ondelette a fortement augmenté ainsi que le niveau de ses lobes

secondaires : nous nous retrouvons face au compromis éternel entre lobes secondaires et largeur de l'ondelette : une apodisation trop légère conservera une bonne résolution mais induira des lobes secondaires puissants qui risqueront de masquer d'autres réflecteurs plus faibles.

Enfin, nous avons calculé le spectre du signal sous-échantillonné sur la bande initiale ($\pm Fe$) en utilisant la périodicité de la transformée de Fourier, puis nous avons appliqué la migration sur cette bande. La dse moyenne du signal (figure 10.A) comprend de façon égale le signal réel et le signal replié. Il n'est plus nécessaire d'apodiser puisque le spectre ne présente pas de coupure brutale.

Restauration par Migration de signaux 2D

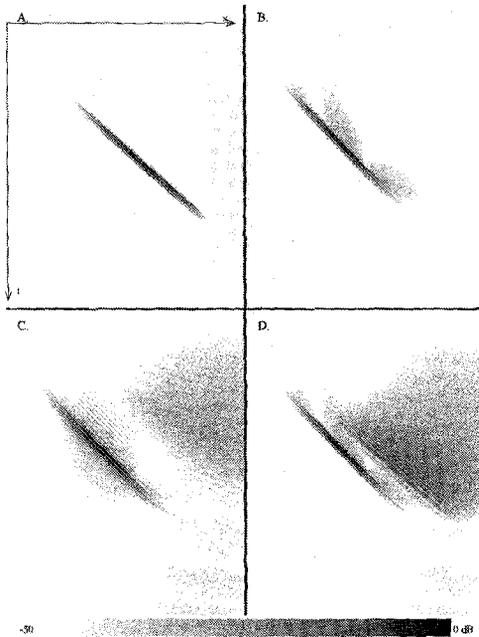


Figure 11. – Réflecteur de pente 0.5.

- A. Signal initial correctement échantillonné.
- B. Signal correctement échantillonné, migré.
- C. Signal sous-échantillonné, migré.
- D. Signal sous-échantillonné puis migré sur la bande initiale.

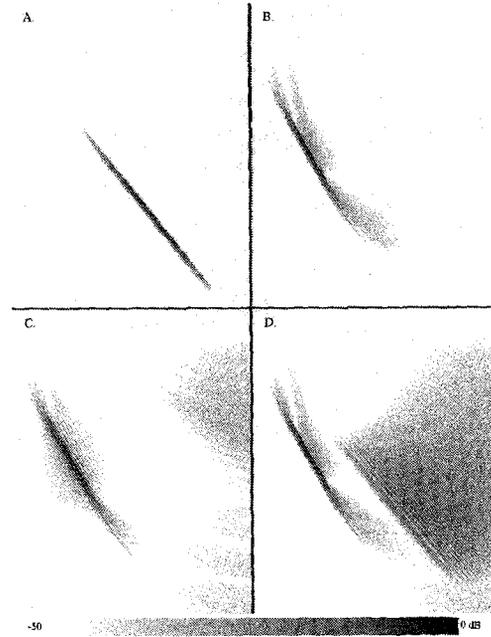


Figure 13. – Réflecteur de pente 0.7.

- A. Signal initial correctement échantillonné.
- B. Signal correctement échantillonné, migré.
- C. Signal sous-échantillonné, migré.
- D. Signal sous-échantillonné puis migré sur la bande initiale.

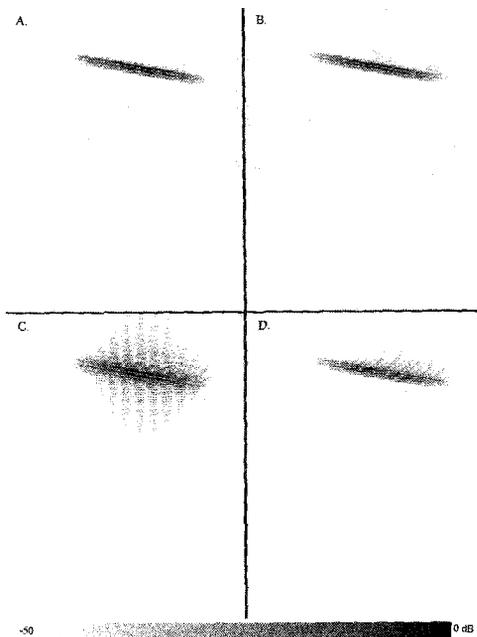


Figure 12. – Réflecteur de pente 0.1.

- A. Signal initial correctement échantillonné.
- B. Signal correctement échantillonné, migré.
- C. Signal sous-échantillonné, migré.
- D. Signal sous-échantillonné puis migré sur la bande initiale.

Le profil migré (figure 11.D) présente des artefacts de repliement. Ce bruit forme des traînées comparables au bruit numérique de la

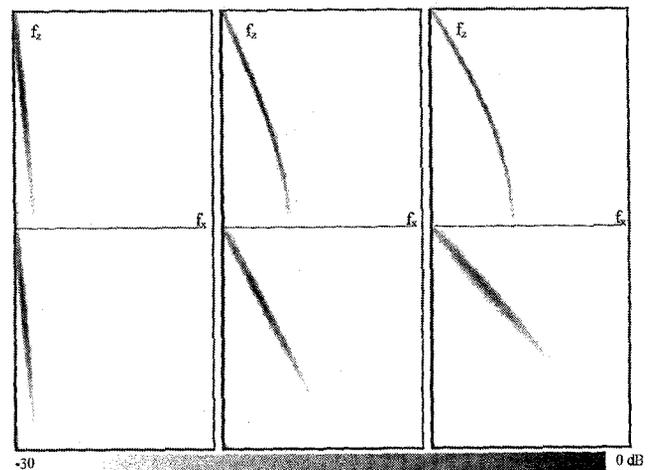


Figure 14. – Spectre des signaux migrés sur la bande initiale pour $\alpha = 0, 1; 0, 5$ et $0, 7$ de gauche à droite l'axe verticale représente f_z de $-Fe/2$ à $+ Fe/2$ et l'axe horizontal f_x de 0 à $Fe/2$.

migration, sa position correspond au calcul théorique. Il est spatialement disjoint du signal réel : une partie est située à l'emplacement du réflecteur avant migration. Son amplitude est plus faible que l'amplitude du signal réel (-25 dB). Mais la résolution est identique à celle du profil correctement échantillonné : l'ondelette a

la même fréquence centrale et la même largeur (figure 10.B). Les oscillations présentes sur cette dernière figure correspondent au bruit dû au repliement et non à une modification de l'ondelette.

Cette simulation montre l'intérêt global de ce traitement. La migration large bande permet de reconstruire un signal correctement échantillonné et supprime toute perte de résolution due en particulier aux apodisations. La position du signal replié correspond au calcul théorique tant dans le plan x, z que dans l'espace des fréquences (figure 14).

5.2. différentes pentes

Nous avons généré de la même façon et migré des réflecteurs de pentes différentes : un réflecteur peu incliné $\alpha = 0,1$ et un réflecteur très incliné $\alpha = 0,7$.

Le réflecteur peu incliné (figure 12), le profil sous-échantillonné est fortement dégradé par rapport au signal correctement échantillonné : la migration large bande ne permet pas de dissocier signal réel et signal replié. Le réflecteur présente des « marches d'escalier ». Mais ce profil n'en demeure pas moins meilleur que le profil simplement sous-échantillonné qui présente de nombreux lobes secondaires.

Le réflecteur fortement incliné (figure 13) produit des résultats similaires au réflecteur médian étudié précédemment.

Ces simulations corroborent le calcul théorique et montrent l'intérêt de la migration large bande :

- Les profils obtenus présentent une meilleure résolution que le signal simplement sous-échantillonné;
- Les artefacts générés sont localisés au dessus du réflecteur et ne semblent pas devoir noyer le signal utile;
- Enfin, la qualité du résultat dépend directement de la pente du réflecteur.

La méthode est intéressante dès les pentes moyennes et ne dégrade pas les réflecteurs très peu inclinés.

5.3. filtrage avant et après la migration

Nous pouvons affiner le traitement appliqué aux données et filtrer plus durement avant et après migration. En effet, il est peu probable, en pratique, de rencontrer des réflecteurs de très forte pente ($\alpha \sim 1$). Nous pouvons donc appliquer un filtrage plus sélectif avant la migration et couper plus fortement le signal sous-échantillonné. Le gabarit de ce filtre sera choisi au coup par coup en fonction des données.

De plus, nous avons conservé la totalité de l'énergie du signal replié, tant dans le calcul théorique que dans les simulations. Ceci est inutile : la comparaison de la dse du signal initial (figure 8.A) et du signal replié (figure 10.A) montre qu'il est possible de couper la portion du signal replié extérieure à la bande du signal originel.

Ce filtrage en fréquence supprime des artefacts et augmente le rapport signal sur bruit sans dégrader le signal réel ni générer de lobes secondaires : la bande demeure beaucoup plus large que celle du signal sous-échantillonné et la pente de coupure est faible. En filtrant plus fortement il est possible de passer de manière continue du signal migré en bande large au signal migré de manière classique et de choisir un compromis entre le niveau du bruit et la perte de résolution.

Ce filtre peut être appliqué directement dans le domaine fréquentiel avant la migration mais il peut aussi l'être après la migration : filtrer à la fréquence F dans l'espace ν, f_x revient à appliquer un filtre de gabarit circulaire dans l'espace f_x, f_z et à couper les fréquences spatiales de module supérieur à F (cf. § 2.3). En pratique, le calcul du signal migré dans l'espace f_x, f_z – opération onéreuse en temps de calcul – n'est alors effectué qu'une seule fois pour l'ensemble des données. L'opérateur peut ensuite, à faible coût, choisir le filtre le plus favorable et optimiser entre le bruit, la résolution et les lobes secondaires (figure 15 et Figure 16). Pour cela, il est guidé par la connaissance de l'ondelette, reconstruite par échantillonnage stroboscopique (cf. § 3.2).

6. données réelles

6.1. profils acquis en antarctique

Nous avons appliqué cette technique aux données acquises en Antarctique par le radar géophysique développé pour le ballon sonde de la mission spatiale Mars'98. Ce radar, de type monostatique, est en cours de spatialisation [Barbin] : il est intégré au guiderope métallique de longueur imposée (13,20 m) qui stabilise le ballon; celui-ci sert d'antenne de type dipôle plaqué sur le sol. La fréquence centrale du signal émis dépend des propriétés diélectriques (ϵ) du sol proche de l'antenne. Ainsi, la fréquence centrale du signal émis passe de 9 MHz lorsque l'antenne repose sur du sable sec ($\epsilon = 5$) à 13 MHz lorsqu'elle repose sur la neige ($\epsilon = 2$), pour une largeur de bande de 5 MHz.

L'électronique du radar est adaptée aux contraintes spatiales : résistance mécanique et thermique, encombrement, faible puissance disponible et faible flux de données vers la Terre. La solution retenue pour compenser la faible puissance à l'émission (~ 10 W) est l'accumulation de 256 réalisations pour chaque tir avec sommation cohérente sur 16 bits (quantification initiale sur 8 bits). Cette addition cohérente augmente le rapport signal sur bruit de 24 dB et nécessite l'utilisation d'une mémoire FIFO. Le fonctionnement de cette mémoire, dans une technologie validée par le CNES, limitait la fréquence d'échantillonnage à 30 MHz en 1991 — fréquence inférieure à la fréquence de Shannon sur des milieux de faible permittivité — et à environ 40 MHz aujourd'hui. Nous ne pouvons pas recourir à l'échantillonnage stroboscopique tant pour des raisons d'encombrement que de consommation.

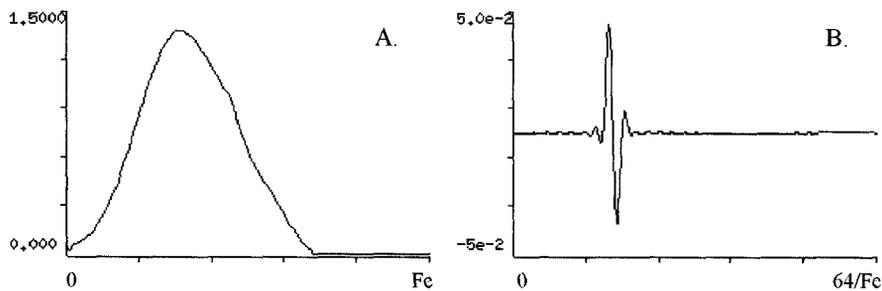


Figure 15. – Filtrage après migration.
 A. Dse moyenne du signal après migration (moyenne de la dse de chaque trace).
 B. Ondelette estimée après migration (somme sur le réflecteur redressé).

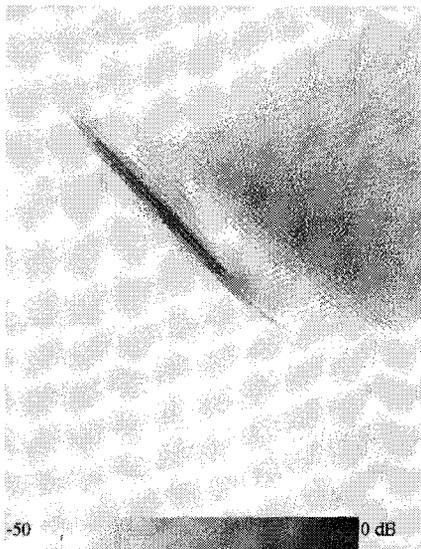


Figure 16. – Profil migré sur la bande initiale et filtré.

Cette fréquence d'échantillonnage place le fonctionnement de l'appareil en limite de sous-échantillonnage. Le fonctionnement attendu sur Mars $\epsilon \sim 4$ d'après la connaissance *a priori* que nous avons de la permittivité de la surface de cette planète — laisse présager un échantillonnage à peu près correct. Mais un sous-échantillonnage important peut apparaître si la zone d'atterrissage du ballon présente une permittivité sensiblement plus faible ou si le guiderope est décollé du sol (ϵ équivalent plus faible).

Pour cette raison, nous avons choisi de ne pas équiper le convertisseur d'un filtre anti-repliement et nous avons pris le risque de replier une partie de l'énergie du signal afin de conserver le rapport signal sur bruit dans toutes les configurations de l'expérience.

Un prototype de ce radar a été testé en Antarctique en février 93 [Herique]. Les profils acquis sur le glacier présentent de

long échos produits par le socle rocheux qui supporte le glacier. Ces signaux sont systématiquement sous-échantillonnés dans le domaine temporel. Les traitements présentés dans cet article ont été appliqués à un profil d'environ 1 km de long représenté en amplitude (figure 3) et en représentation de Wiggle (figure 19).

6.2. mise en évidence du sous-échantillonnage et estimation de l'ondelette

Ce repliement interdit de calculer la dse du signal émis en effectuant la moyenne de la dse de chaque trace (figure 17). Nous avons donc estimé l'ondelette par la méthode développée précédemment.

L'ondelette estimée et sa dse sont présentées figure 18. La fréquence centrale de l'ondelette est de 11,5 MHz et sa bande à -6 dB s'étend de 9.4 à 16.4 MHz : 12% de l'énergie de l'ondelette est portée à des fréquences supérieures à 15 MHz.

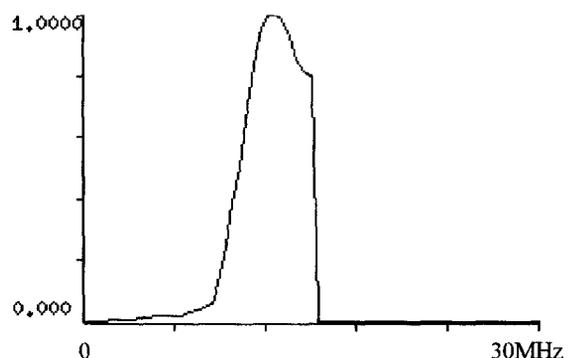


Figure 17. – Moyenne de la dse des différentes traces.

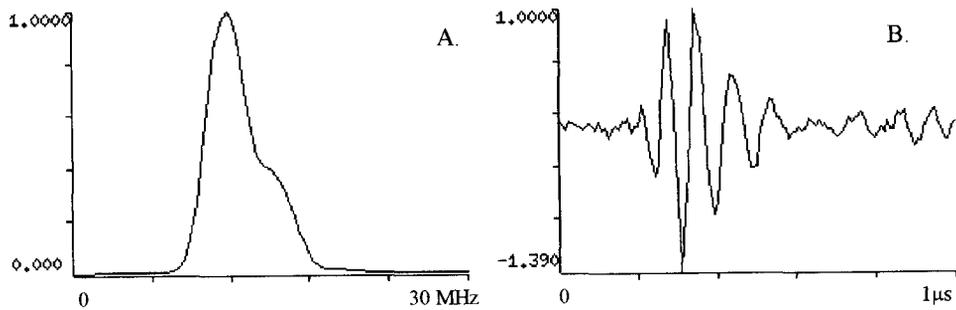


Figure 18. – Ondelette estimée en simulant un échantillonnage stroboscopique. A. la dse B. l'ondelette

6.3. reconstruction du profil

Le profil (figure 19) a été migré sur la bande correspondant à la moitié de la fréquence de Shannon, ± 15 MHz (figure 20) et sur la bande double, ± 30 MHz (figure 21). Enfin, le profil a été filtré dans le domaine des fréquences spatiales. Différents filtres circulaires ont été utilisés, en particulier un filtre dont le gabarit est une porte de Hanning de largeur 9 MHz centrée sur 12 MHz (figure 22) : l'estimation de l'ondelette (figure 18) montre que ce filtre conserve la majeure partie du signal utile.

Le signal migré sur la bande d'acquisition présente déjà du bruit qui correspond au bruit numérique de la migration et au repliement. Le profil migré large bande présente un bruit plus fort, mais une ondelette plus étroite : sa fréquence centrale est plus élevée et son nombre d'arches plus faible (trace 350 à 400, 740 m). Cela permet une meilleure interprétation du profil : la continuité des réflecteurs est améliorée (trace 300 à 400, 740 m) et il devient possible de discerner des réflecteurs proches (traces 120 à 160, 520 m).

Pour réduire les artefacts nous avons filtré le profil migré avec une famille de filtres de plus en plus sélectifs. Ces derniers permettent de passer continûment de la migration large bande à la migration classique. Dans les secteurs peu bruités (trace 350 à 400, 740 m), le filtrage dégrade la résolution sans améliorer le rapport signal sur bruit. Par contre, dans les secteurs fortement bruités (trace 250 à 320, 540 m), il élimine les fantômes et permet de suivre le réflecteur.

Nous utiliserons donc différents filtres suivant la puissance des artefacts dans la portion de profil à interpréter.

7. conclusion

La migration large bande est une méthode efficace de reconstruction de signaux 2D légèrement sous-échantillonnés. Elle permet de conserver une bande large (résolution) sans couper le spectre

brutalement et sans produire de lobes secondaires. Sa principale limite demeure l'inclinaison des réflecteurs : l'augmentation de la résolution n'est donc pas uniforme sur tout un profil. De même, les artefacts générés peuvent masquer certains réflecteurs. Il est donc important d'interpréter les données en utilisant plusieurs profils filtrés plus ou moins fortement.

Ce traitement est applicable à des données plus fortement sous-échantillonnées mais cela se traduira alors par des artefacts importants et par une forte dégradation du rapport signal sur bruit.

Cette méthode est directement transposable au repliement spatial : le bruit produit par le signal replié spatialement possède la même structure que celui rencontré ici [Yilmaz]. Mais le calcul théorique de la migration large bande diffère alors légèrement puisque les dimensions d'espace et de temps ne sont pas équivalentes dans l'équation de propagation. Nous pouvons la comparer aux techniques développées pour traiter les signaux sismiques repliés spatialement [Spitz] [Claerbout]. Ces méthodes sont des interpolations dans le domaine (x, t) ou (x, ν) , elles ajoutent une information nouvelle construite à partir d'un modèle de prédiction spatiale. Notre méthode est fondamentalement différente : il ne s'agit plus d'ajouter une information mais de réduire l'information qui n'est pas régie par l'équation de propagation.

Remerciements

Le radar géophysique de la mission spatiale Mars'98 est développé en collaboration par le CEPHAG, le Service d'Aéronomie (CNRS Verrières – France) et l'Université d'Aéronautique de Riga (Lettonie). Ce programme est financé par le CNES. Nous remercions Y.Barbin (SA — Verrières), responsable technique du projet.

Nous remercions également G.Marec (LGGE – Grenoble) et R. Ney (CRPE – St Maur) pour leur participation à la campagne de prospection en Antarctique, ainsi que l'Institut Français pour la Recherche et la Technologie Polaires.

Les simulations et les calculs présentés dans cet article ont été effectués au Centre de Calcul Intensif de l'Observatoire de Grenoble.

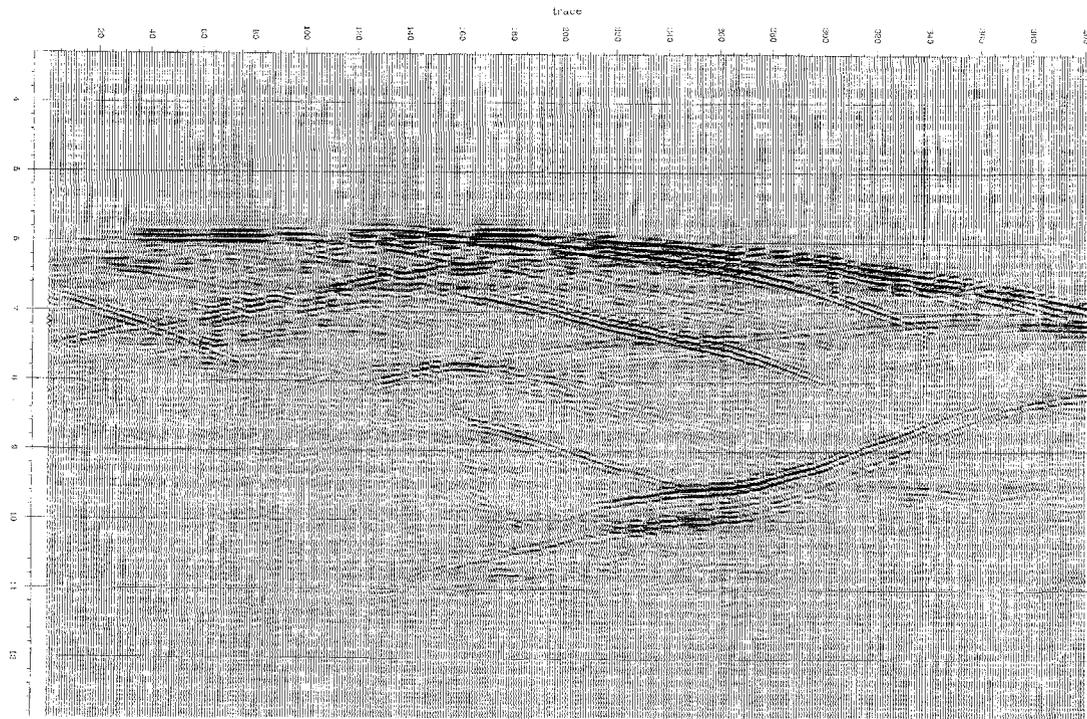


Figure 19. – Profil initial (1 km environ).

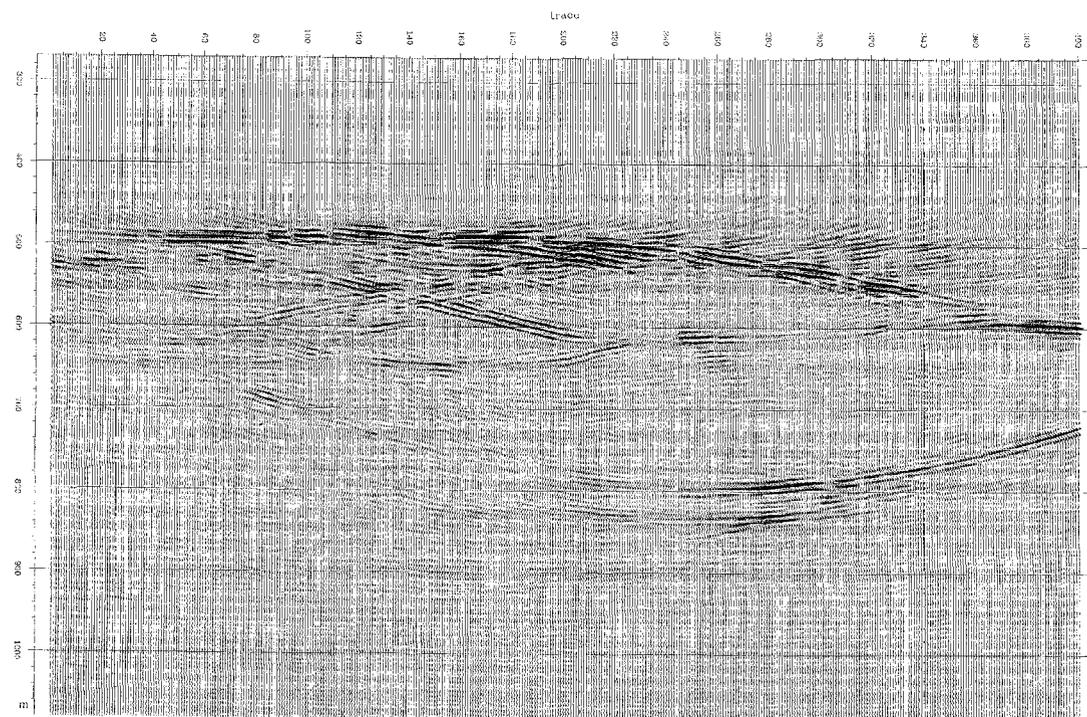


Figure 20. – Profil migré ± 15 Mhz.

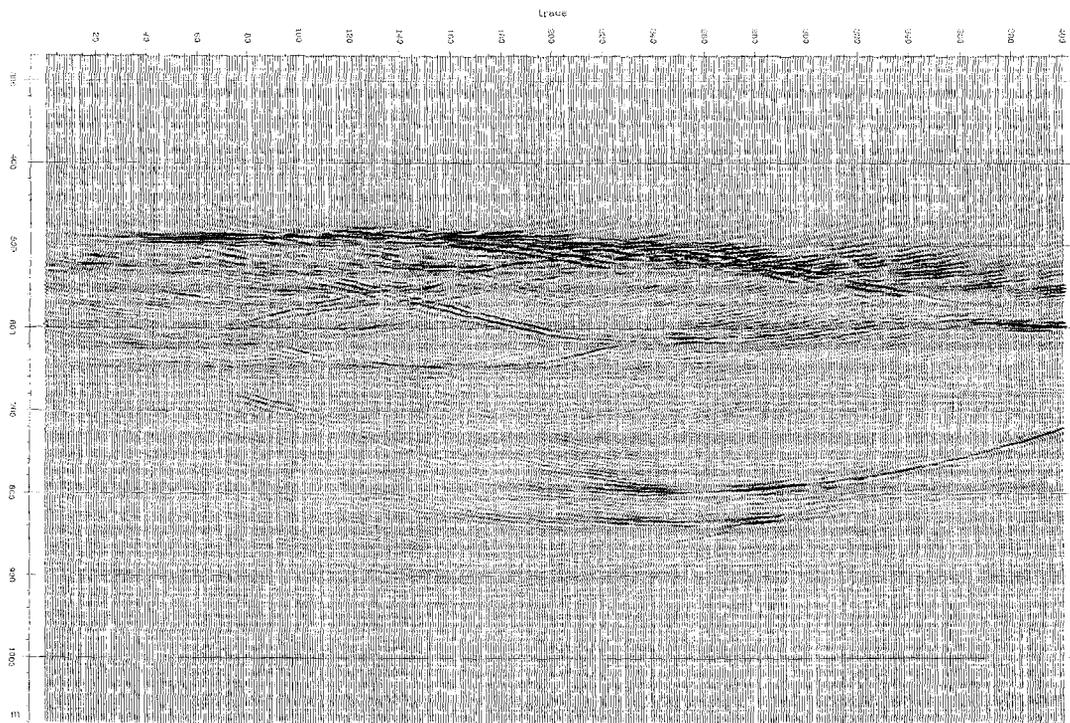


Figure 21. – Profil migré ± 30 Mhz.

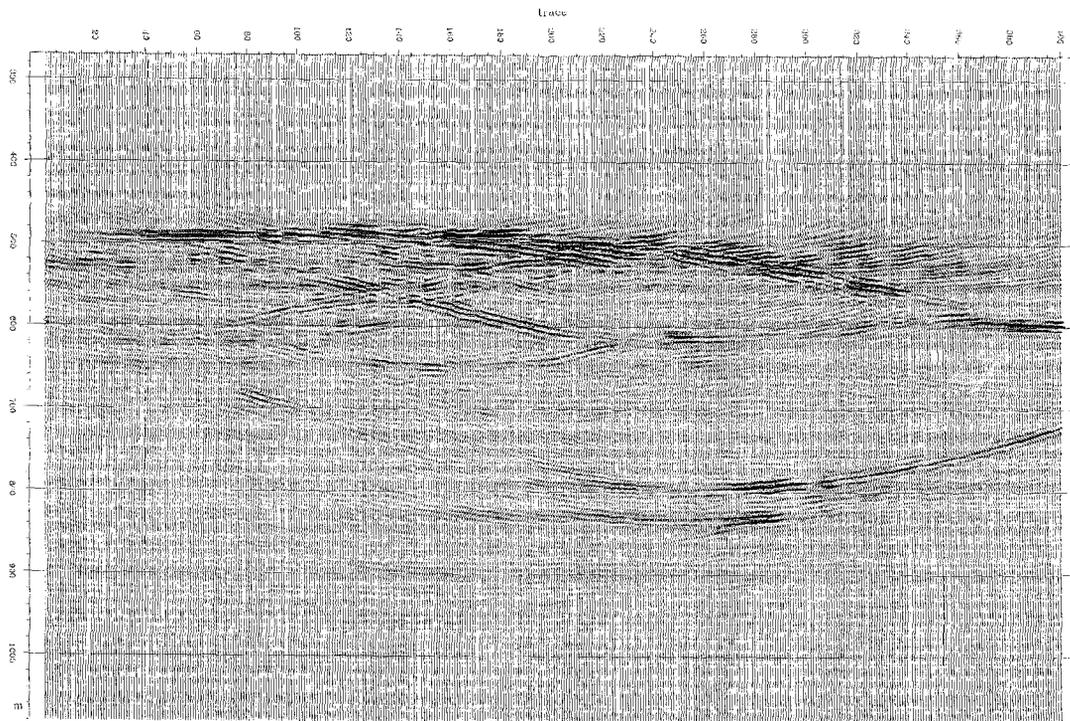


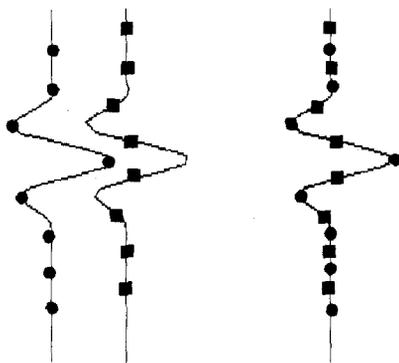
Figure 22. – Profil migré ± 30 Mhz puis filtré.

BIBLIOGRAPHIE

[Stolt] R.H. Stolt, « Migration by Fourier transform », *Geophysics*, Vol. 43, n°1, 1978, pp. 23-48.
 [French] W.S.K. French, « Two dimensional and three dimensional migration of model-experiment reflector profiles », *Geophysical Prospecting*, Vol. 39, n°3, 1974, pp. 269-277.
 [Max] J. Max et alii, *Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques*, Tome 1, 1985, Masson, Paris, 351 p.
 [Barbin] Y. Barbin, W. Kofman, M. Elkin, M. Finkelstein, V. Glotov, V. Zolotarev, « Mars'96 subsurface radar », *Int. Proc. Symp. on Radars and Lidars in Planetary Sciences*, 2-4 septembre 1991, Cannes, France, pp. 51-58.
 [Herique] A. Herique, *Reconstruction et Interprétation d'Images Géoradar, Application aux Tests en Antarctique du Radar de la mission Mars'98*, 6 février 1995, Thèse de Docteur de l'INPG, Grenoble, 267 p.
 [Claerbout] J.B. Claerbout, *Earth Sounding Analysis, Processing versus inversion*, 1992, Boston, Blackwell Scientific Publications, pp. 186-197.
 [Spitz] S. Spitz, « Seismic trace interpolation in the $F-X$ domain », *Geophysics*, Vol. 56, n°5, 1991, pp. 785-794.
 [Yilmaz] O. Yilmaz, *Seismic Data Processing*, 1987, Tulsa, Society of Exploration Geophysicist, 523 p.

Annexe A

Les méthodes d'échantillonnage stroboscopique ont été développées pour pallier la limitation de fréquences de fonctionnement des CAN et des mémoires, et permettent de numériser à plusieurs gigahertz. Cette technique réalise l'échantillonnage d'un signal à la fréquence F_e , à partir de N réalisations de ce signal, chacune échantillonnée à la fréquence F_e/N . Chaque réalisation est échantillonnée avec un peigne décalé de $1/F_e$ par rapport à la réalisation précédente. Le signal correctement échantillonné est ensuite reconstruit en prenant successivement un échantillon de chaque réalisation (figure A.1).



2 échantillonnage décalés Le signal reconstruit
 Figure A1. – Echantillonnage stroboscopique ($N = 2$)

Annexe B

Le signal mesuré s'écrit dans le domaine spectral :

$$S(\nu, f_x) = \sum_n W \left(\nu - \frac{n}{T} \right) \delta \left(\alpha \nu - \frac{\alpha n}{T} + f_x \right)$$

Soit, après migration (équation 2) :

$$T(z, f_x) = \int S(\nu, f_x) e^{\text{sgn}(\nu)j\phi z} d\nu$$

avec : $\phi = 2\pi \sqrt{\frac{\nu^2}{V^2 - f_x^2}}$

En remplaçant S par son expression, le signal s'écrit :

$$T(z, f_x) = \sum_n \int W \left(\nu - \frac{n}{T} \right) \delta \left(\alpha \nu - \frac{\alpha n}{T} + f_x \right) e^{\text{sgn}(\nu)j\phi z} d\nu$$

Nous obtenons après intégration :

$$T(z, f_x) = W \left(-\frac{f_x}{\alpha} \right) \sum_n \exp \left(\text{sgn} \left(\frac{n}{T} - \frac{f_x}{\alpha} \right) 2\pi j z \sqrt{\frac{n^2}{T^2} + \frac{f_x^2}{\alpha^2} - \frac{2nf_x}{\alpha T} - f_x^2} \right)$$

En passant dans l'espace (f_z, f_x) le signal a pour équation :

$$T(f_z, f_x) = W \left(-\frac{f_x}{\alpha} \right) \sum_n \delta \left(\text{sgn} \left(\frac{n}{T} - \frac{f_x}{\alpha} \right) \sqrt{\frac{n^2}{T^2} + \frac{f_x^2}{\alpha^2} - \frac{2nf_x}{\alpha T} - f_x^2} - f_z \right)$$

Nous pouvons alors écrire le signal migré comme la somme de la migration de chaque composante repliée :

$$T(f_z, f_x) = \sum_n n(f_z, f_x)$$

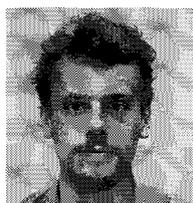
avec :

$$T_n(f_z, f_x) = W \left(-\frac{f_x}{\alpha} \right) \delta \left(\text{sgn} \left(\frac{n}{T} - \frac{f_x}{\alpha} \right) \sqrt{\frac{n^2}{T^2} + \frac{f_x^2}{\alpha^2} - \frac{2nf_x}{\alpha T} - f_x^2} - f_z \right)$$

Manuscrit reçu le 11 Octobre 1995.

LES AUTEURS

Alain HERIQUE



Alain Herique est né en 1968. Il est Ingénieur en Traitement du Signal de l'Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs Electriciens de Grenoble (1991). Il a rejoint en 1992 le groupe de recherche sur le radar de la mission Mars'98 (PRISM) au CEPHAG et a testé un prototype de ce radar en Antarctique. Il travaille sur le traitement, l'inversion et l'interprétation des données de sondage par radar géophysique et a soutenu une Thèse de Docteur en Traitement du Signal de l'Institut National Polytechnique de Grenoble en 1995.

Wlodek KOFMAN



Wlodek Kofman est né en 1945. Il est diplômé de l'Ecole Polytechnique de Varsovie (1968). Il est Docteur-Ingénieur en Traitement du Signal (Université de Grenoble, 1972) et a soutenu sa Thèse d'Etat en Physique en 1979 (INPG). Actuellement, il est Directeur de Recherche au CNRS et travaille au CEPHAG. Ses principales activités de recherche sont le domaine de la Géophysique et du Traitement du Signal : il utilise les données EISCAT et participe à la recherche spatiale comme Co-Investigateur des missions Mars'98 et Cluster. Il est l'auteur de plus de 145 publications scientifiques.