

Une méthode d'analyse de sinusoides complexes par déconvolution du périodogramme : «Expulse»*

A Complex Sinusoids Estimation Method Based on the Deconvolution of the Periodogram : "Expulse"

par Patrick DUVAUT, Frédéric DUBLANCHET

ETIS, Groupe Signal, ENSEA
6, avenue du Ponceau
F-95014 Cergy-Pontoise cedex

Résumé

La méthode EXPULSE pallie l'une des principales limitations des techniques traditionnelles d'Analyse Spectrale à Haute Résolution ASHR (MUSIC, Norme minimale, etc.) à savoir la faible robustesse vis-à-vis d'une méconnaissance de leur nombre. Son originalité repose sur l'interprétation d'un périodogramme mis en œuvre sur un processus de raies pures noyées dans un bruit additif, comme la convolution, à un bruit près, d'un processus composite Bernoulli-Gaussien avec une fonction spectrale parfaitement connue qui dépend de la calibration retenue du périodogramme (type de fenêtre d'apodisation, lissage temporel ou fréquentiel, etc.). Les fréquences discrètes où le processus de Bernoulli prend la valeur 1 sont des raies potentielles de l'espace signal; le processus gaussien caractérise quant à lui l'amplitude des raies.

Mots clés : Périodogramme, Problème Inverse, Déconvolution, Bernoulli-gaussien, Détection-estimation conjointes, Bayésien, Vraisemblance, Récurrent, Itératif, Kalman, Sinuoides complexes, Représentation d'état, Propriété de Découplage, Analyse Spectrale, Haute-Résolution, EXPULSE, EXIT, EXPRE.

Abstract

EXPULSE method lifts the main drawback of the classical high resolution spectral analysis methods (MUSIC, MINORM, ...) which have a poor robustness with respect to an unreliable knowledge of the number of sources. Its novelty stems from the modeling of the periodogram of complex sinusoids embedded in an additive noise, as the convolution of a perfectly known kernel (depending upon the window) and a compound Bernoulli-Gaussian process, plus a noise. The discrete frequencies where the Bernoulli process takes 1 values locate the sinusoids; the gaussian process describes the amplitudes.

Key words : Periodogram, Inverse problem, Deconvolution, Bernoulli-Gaussian, Joint Detection-estimation, Bayesian, Likelihood, On line, Off line, Kalman, Complex sinusoids, State space representation, Decoupling property, Spectral analysis, High Resolution, EXPULSE, EXIT, EXPRE.

1. Introduction

1.1. LE CONTEXTE

La principale limitation des méthodes d'analyse spectrale à haute résolution ASHR, qu'elles soient fondées sur la décomposition en valeurs singulières de la matrice de données, telles que MUSIC [1], la Norme Minimale [2], Matrix-Pencil [3] etc, ou bien sur une argumentation au sens du maximum de Vraisemblance [4], réside dans une faible robustesse vis-à-vis d'une méconnaissance de la dimension de l'espace signal.

Si l'on se réfère à la théorie statistique de la décision [5] [6] [7] [8] la principale faiblesse qui vient d'être évoquée émane de la difficile prise en charge d'un *problème de détection*, au sens strict, et non d'estimation. En effet le paramètre dont la méconnaissance dégrade les performances de l'ASHR, à savoir le nombre total de sources, est à valeurs discrètes. Or, dans la problématique traditionnelle de l'ASHR, les principes sous-tendant les différents algorithmes visent surtout à atteindre une *estimation optimale* des fréquences et des amplitudes des sources, plus qu'une *détection optimale qui discriminerait au mieux l'espace-signal de l'espace-bruit*. Au moment où cette discrimination devient malgré tout indispensable dans les algorithmes, des critères de *choix et de tri*, doivent être cette fois greffés, [9] [10] mais dont l'efficacité disparaît dès que le rapport signal sur bruit descend en dessous de quelques décibels. Ce résultat n'est somme toute pas surprenant : la structure des algorithmes ne reflète que très

(*) Rapport interne ETIS GS/INV/95001, mars 1995.

partiellement une optimalité *globale de détection-estimation conjointes*. Prise en charge tard, et uniquement à l'intérieur des tâches incombant à l'estimation, l'optimalité de la détection ne pourra suggérer aucune remise en question de la structure générale des procédures.

Cette question s'avère de toute façon délicate : peu de résultats théoriques généraux existent sur des méthodologies de détection et d'estimation conjointes [11] [12].

Le présent article apporte une contribution à ce problème en reformulant l'analyse de raies noyées dans un bruit additif comme un problème inverse [13] : celui de la déconvolution du périodogramme [14]. Après régularisation (*c'est-à-dire ajout d'information*), cette déconvolution s'énonce bien comme un problème de détection et d'estimation conjointes.

1.2. LE CONTENU DE L'ARTICLE

Le § 2. précise le modèle des données à identifier, fige les hypothèses, les notations et détaille les motivations de notre démarche. L'analyse de raies en tant que problème inverse fait l'objet du § 3. La présentation du périodogramme comme un opérateur de convolution agissant sur la DSP estimée du processus sous-jacent apparaît dans le § 3.1. Le § 3.2. est consacré à la déconvolution à proprement parler. On trouve successivement la formulation bayésienne étayée par la propriété de découplage au § 3.21., EXPULSE récurrent au § 3.22. et EXPULSE itératif au § 3.23. Le compte rendu des résultats de simulation occupe le § 4. La conclusion ainsi qu'une discussion sur les travaux en cours, les extensions et applications potentielles d'EXPULSE, figurent au § 5.

2. Hypothèses, Notations, Motivations

On considère N échantillons d'un processus complexe circulaire [7] $y[n]$ composé de M raies complexes noyées dans un bruit blanc additif $\eta[n]$, indépendant de $x[n]$:

$$y[n] = x[n] + \eta[n],$$

où :

$$x[n, \omega] \triangleq \sum_{k=1}^M a_k(\omega) e^{j2\pi\nu_k n} e^{j\phi_k(\omega)} \quad (1)$$

$$\text{pour } 0 \leq n \leq N-1, \text{ avec } \nu_k \triangleq \frac{f_k}{F_e}$$

où par définition $T_e \triangleq 1/F_e$ désigne la période d'échantillonnage et ω une épreuve. Les ν_k sont les fréquences réduites. Les phases ϕ_k sont uniformément réparties sur $[0, 2\pi]$, elles sont supposées mutuellement indépendantes, et indépendantes des a_k . Les a_k

sont centrées, également indépendantes entre elles et de variance σ_k^2 .

Il s'agit d'estimer les paramètres de la DSP du modèle (1) avec une résolution plus fine que $1/N$ en ce qui concerne la détermination des fréquences ν_k . Pour ce faire, les algorithmes classiques d'analyse spectrale à haute résolution prolongent les N échantillons observés, en modélisant le signal temporel. La méthode EXPULSE procède elle par comblement fréquentiel : elle régularise les données dans l'espace fréquentiel en considérant le périodogramme standard comme un opérateur de convolution, puis inverse le mélange convolutif correspondant.

3. L'Analyse de raies en tant que problème inverse

3.1. LE PÉRIODOGRAMME STANDARD COMME UNE OPÉRATION DE CONVOLUTION

Le signal discret $y[n]$ observé sur un horizon de N échantillons est pondéré par une fenêtre $w[n]$. On note $y_w[n]$ le signal apodisé correspondant. Le périodogramme standard associé à la fenêtre $w[n]$ se définit alors, pour des fréquences réduites ν à variations continues dans un intervalle de longueur unité [8] [10] [14], par :

$$\Pi_w(\nu) \triangleq \frac{1}{N} |\mathring{y}_w(\nu)|^2 \quad (2)$$

où $\mathring{y}_w(\nu)$ désigne la *TF* de la séquence $y_w[n]$, $0 \leq n \leq N-1$. On établit [8] :

$$E[\Pi_w(\nu)] = \frac{1}{N} (\mathring{\gamma}_y @ \mathring{\gamma}_w)(\nu) \quad (3)$$

où $\mathring{\gamma}_y(\nu)$ désigne la *DSP* de $y[n]$, @ n'est autre que le produit de convolution et $\mathring{\gamma}_w(\nu)$ représente la densité spectrale d'énergie *DSE* de $w[n]$ considérée comme une séquence d'énergie finie déterministe. En d'autres termes :

$$\mathring{\gamma}_w(\nu) = |\mathring{w}(\nu)|^2 \quad (4)$$

où $\mathring{w}(\nu)$ est la *TF* de $w[n]$. Le périodogramme standard s'interprète alors, dans le domaine des fréquences continues, comme le produit de convolution de la fonction spectrale $\mathring{\gamma}_w(\nu)/N$ et de la vraie *DSP* du signal qui se confond avec :

$$\sum_{k=1}^M \sigma_k^2 \delta(\nu - \nu_k) + \sigma_\eta^2 \quad (5)$$

où σ_η^2 est la variance du bruit $\eta[n]$, voir (1). Dans la pratique, le calcul fréquentiel ne peut se faire qu'en fréquence discrète et les algorithmes déterminent la transformée de Fourier discrète (*TFD*) sur N_F points, ($N_F \geq N$). L'axe fréquentiel est donc

échantillonné à la cadence $1/N_F$ et le périodogramme discret s'écrit :

$$\Pi_w[k] \triangleq \Pi_w \left(\frac{k}{N_F} \right), 0 \leq k \leq N_F - 1 \quad (6)$$

$y[n]$ étant nul en dehors de l'intervalle $0 \leq n \leq N - 1$.

Remarque R1.

Avant de présenter la version discrétisée en fréquence de la formule (3), il convient de préciser une différence fondamentale, afin d'éviter tout malentendu, entre un « canal de résolution de Fourier » et un « canal fréquentiel ». Etant donné que seuls N échantillons temporels ont été mesurés, on appelle canal de résolution de Fourier toute fréquence discrète de la forme q/N où $0 \leq q \leq N - 1$. Le Périodogramme résoud au mieux deux raies distantes d'au moins $1/N$ approximativement. En général, de façon à augmenter le nombre de points fréquentiels sans toutefois modifier la résolution, on complète les N échantillons par des zéros pour obtenir N_F fréquences discrètes $k/N_F, 0 \leq k \leq N_F - 1$, avec $N_F = 2^\alpha N$ par exemple, où α est choisi en fonction des besoins. Les fréquences k/N_F ne peuvent être considérées en aucun cas comme des canaux de résolution de Fourier, dans la mesure où les relations d'incertitude empêchent toujours le seul Périodogramme de séparer des raies distantes de moins de $1/N$. Pour éviter toute ambiguïté, les fréquences k/N_F seront appelées des « canaux fréquentiels ». Séparer des raies distantes $1/N_F$ par déconvolution du Périodogramme revient donc à franchir la résolution de Fourier dans des proportions dictées par la valeur de α . Ce progrès ne peut être accompli que par l'ajout d'informations a priori. En résumé, dans la formule (6), k est un canal fréquentiel et non un canal de résolution de Fourier.

Un raisonnement identique à celui effectué lorsque les fréquences sont continues donne :

$$E[\Pi_w[k]] = \left(\frac{\hat{\gamma}_w}{N} @ \hat{\gamma}_y \right) [k] \quad (7)$$

@ désigne l'opérateur de convolution discrète circulaire, [8]. Dans (7), les densités spectrales ont été échantillonnées à la cadence $1/N_F$. L'espérance mathématique du Périodogramme standard discrétisé s'interprète aussi comme le produit de convolution discret d'une fonction spectrale parfaitement connue :

$$o_w[k] \triangleq \left(\frac{1}{N} \right) | \hat{w}[k] |^2$$

par une séquence discrète représentative du spectre de raies à identifier.

Dans ces conditions, la DSP discrète $s[k]$ estimée

$$s[k] \triangleq \hat{\gamma}_x(\nu)$$

peut avantageusement être décrite comme un processus composite aléatoire Bernoulli-gaussien. En effet, le modèle Bernoulli-gaussien représente explicitement une suite d'impulsions

aléatoires d'amplitude a priori gaussienne dont la probabilité de présence est régie par une loi de Bernoulli [19], de densité λ . Ainsi :

$$s[k] \triangleq \xi[k] \cdot \beta[k] \quad (8)$$

où la séquence de Bernoulli $\beta[k]$, entièrement définie par

$$Prob[\beta[k] = 1] = \lambda, Prob[\beta[k] = 0] = 1 - \lambda$$

caractérise la présence ou l'absence des raies. $\xi[k]$, processus amplitude des raies, est une variable aléatoire gaussienne. L'inversion d'une relation de la forme :

$$\Pi_w[k] \triangleq (o_w @ s)[k] + b[k] \quad (9)$$

où $b[k]$ est un terme de perturbation qui contient en partie les erreurs de modélisation et la contribution fréquentielle de $z[n]$, est donc une opération de *déconvolution impulsionnelle*. La modélisation de la DSP estimée $s[k]$ par un processus BG régularise le problème inverse mal posé, par ajout d'information a priori sur la nature de la solution. Le Périodogramme réalise donc un filtrage linéaire bruité de la DSP estimée du signal, par un filtre (F) de réponse impulsionnelle $o_w[k]$. Présentée ainsi, l'analyse spectrale d'un processus de raies pures s'interprète comme un problème bayésien de *détection* (recherche des $\beta[k]$) et d'*estimation* (identification des $\xi[k]$) conjointes.

En toute rigueur, la séquence BG $s[k]$ n'est qu'une approche du spectre de raies pures dans la mesure où la composante gaussienne ne permet pas de représenter parfaitement la densité énergétique des raies qui, par définition, est positive. Cependant, un environnement gaussien limite la description statistique au second ordre, d'où de multiples simplifications de mise en œuvre. Motivés par la même raison, nous assimilerons les perturbations temporelles qui s'ajoutent au signal $x[n]$ et filtrées par le système linéaire (F) à un bruit blanc gaussien centré $b[n]$. On tiendra compte du caractère positif de la DSP estimée en agissant sur la variance du processus $\xi[k]$.

La méthode EXPULSE considère le périodogramme discret calculé sur un processus de raies pures comme un filtre linéaire bruité, dans le domaine fréquentiel, dont les caractéristiques sont parfaitement connues et dont l'entrée $s[k]$, DSP estimée du signal, est modélisée par un processus Bernoulli-gaussien.

En résumé, EXPULSE résoud un problème inverse dans le domaine fréquentiel en déconvoluant tout ou partie du périodogramme.

3.2. LA DÉCONVOLUTION DU PÉRIODOGRAMME

3.2.1. Formulation bayésienne et propriété de découplage

3.2.1.1. Formulation bayésienne de la déconvolution du périodogramme

Les N_F échantillons fréquentiels $\Pi_w[k]$ issus du périodogramme discret sont décrits par le modèle suggéré par (9) :

$$\Pi_w[k] = \sum_{i=0}^{L-1} o_w[i] s[k-i] + b[k], 0 \leq k \leq N_F - 1 \quad (10)$$

où $b[k]$ est supposé blanc gaussien centré de variance σ_b^2 et où la *DSP estimée* $s[k]$ à restaurer est modélisée par un processus composite Bernoulli-gaussien $s[k] = \xi[k]\beta[k]$ où $\beta[k]$ est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre λ et $\xi[k]$ une variable aléatoire gaussienne centrée de variance σ^2 indépendante de $\beta[k]$. Les quantités $\{\sigma_b^2, \sigma^2, \lambda\}$ sont les *hyperparamètres* du problème de déconvolution, regroupés dans le vecteur \mathbf{h} . La relation (10) se réécrit sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{p}_w = \mathbf{O}_w \mathbf{s} + \mathbf{b} \quad (11)$$

les N_F lignes de la matrice \mathbf{O}_w étant constituées des échantillons décalés de la fonction spectrale convoluante $o_w[\cdot]$. Les composantes du vecteur \mathbf{p}_w sont les $\Pi_w[k], 0 \leq k \leq N_F - 1$. D'après (11), conditionnellement à la connaissance du processus \mathbf{s} , \mathbf{p}_w est gaussien de moyenne $\mathbf{O}_w \mathbf{s}$ et de matrice de covariance $\sigma_b^2 \mathbf{I}$. Lorsque seule la séquence de Bernoulli $\beta[k]$ est connue, \mathbf{s} est gaussien, de moyenne nulle et de matrice de covariance :

$$\mathbf{R} = \sigma^2 \text{diag}\{\beta[k]\}, 0 \leq k \leq N_F - 1 \quad (12)$$

Si l'on désigne par Q le nombre d'impulsions présentes, i.e. le nombre de 1 contenus dans une réalisation du processus $\beta[k], 0 \leq k \leq N_F - 1$, on note que le rang de la matrice \mathbf{R} est égal à Q . Conditionnellement à la séquence $\beta[k], 0 \leq k \leq N_F - 1$, le vecteur \mathbf{s} est donc un vecteur gaussien dégénéré, ayant en fait $N_F - 1 - Q$ composantes nulles. On écrira \mathbf{s}' le vecteur non dégénéré de taille Q qui contient, dans leur ordre d'arrivée, les seules composantes non nulles de \mathbf{s} . Dans le même ordre d'idée, on primera toutes les grandeurs relatives à \mathbf{s}' . Dans ces conditions, on a, toujours conditionnellement à la séquence des impulsions :

$$\mathbf{p}_w = \mathbf{O}'_w \mathbf{s}' + \mathbf{b} \quad (13)$$

où conformément à nos conventions \mathbf{O}'_w désigne la matrice des vecteurs-colonnes de \mathbf{O}_w dont les rangs coïncident avec ceux des impulsions présentes. Le vecteur \mathbf{s}' est alors gaussien de matrice de covariance :

$$\mathbf{R}' = \sigma^2 \mathbf{I}_Q \quad (14)$$

si \mathbf{I}_Q désigne la matrice-identité de taille Q . \mathbf{p}_w demeure gaussien centré de matrice de covariance :

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{O}'_w \mathbf{R}' \mathbf{O}'_w{}^T + \sigma_b^2 \mathbf{I} = \mathbf{O}_w \mathbf{R} \mathbf{O}_w{}^T + \sigma_b^2 \mathbf{I} \quad (15)$$

où le symbole T désigne la transposition. Les méthodes d'inversion restent alors dans le cadre simple de l'estimation de grandeurs gaussiennes et les techniques bayésiennes de déconvolution simple sont fondées sur la maximisation de fonctions de vraisemblance généralisée de la forme :

$$\mathcal{L}(s) \triangleq f(s | \mathbf{p}_w, \mathbf{h}, \mathbf{o}_w) \quad (16)$$

avec :

$$\mathbf{o}_w \triangleq [o_w[L-1] o_w[L-2] \dots o_w[0]]^T \quad (17)$$

où $f(\cdot)$ représente une densité de probabilité dont seul l'argument précise la nature, afin de ne pas alourdir les notations. Dans toute la suite, \mathbf{q} désigne le vecteur de taille N_F dont les composantes sont les $\beta[k], 0 \leq k \leq N_F - 1$ et $f_q(\cdot)$ est une densité de probabilité conditionnellement à \mathbf{q} . Dans la mesure où le noyau de convolution est parfaitement déterminé par la calibration du périodogramme et où les hyper-paramètres sont supposés connus et localement invariants, nous omettrons dans l'écriture des lois de probabilités, le conditionnement par \mathbf{o}_w et \mathbf{h} .

Comme déjà mentionné, le problème de déconvolution du Périodogramme, tel qu'il est abordé dans cette approche bayésienne, nécessite de *détecter* la position des raies d'une part et d'*estimer* leurs amplitudes respectives d'autre part. Des considérations stratégiques se posent quant à l'estimation de deux quantités : *simultanément, indépendamment ou séquentiellement*.

Une certaine cohérence des résultats déconseille tant une estimation indépendante des deux processus qu'une procédure de détection des événements à la suite de l'estimation du processus amplitude. Se présentent alors deux stratégies possibles :

Stratégie Conjointe

Détection-Estimation conjuguée de q et s par maximisation de la densité conjointe a posteriori

$$\mathcal{L}_C(\mathbf{q}, \mathbf{s}) \triangleq f(\mathbf{q}, \mathbf{s} | \mathbf{p}_w) \quad (18)$$

ce qui revient à maximiser, par rapport à \mathbf{q} et \mathbf{s} :

$$\mathcal{V}_C(\mathbf{q}, \mathbf{s}) = f(\mathbf{p}_w | \mathbf{q}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s} | \mathbf{q}) f(\mathbf{q}) \quad (19)$$

Stratégie Marginale

Détection-Estimation séquentielle où l'étape de détection est réalisée par maximisation de la densité marginale a posteriori

$$\mathcal{L}_M(\mathbf{q}) \triangleq f(\mathbf{q} | \mathbf{p}_w)$$

ce qui revient à maximiser par rapport à \mathbf{q} :

$$\mathcal{V}_M(\mathbf{q}) = f(\mathbf{p}_w | \mathbf{q}) f(\mathbf{q}) \quad (20)$$

et la procédure d'estimation par maximisation de la vraisemblance conjointe :

$$\mathcal{V}_C(\hat{\mathbf{q}}, \mathbf{s}) \quad (21)$$

avec

$$\hat{\mathbf{q}} \triangleq \text{Arg}\{\max\{\mathcal{V}_M(\mathbf{q})\}\} \quad (22)$$

Quand \mathbf{q} est connu, le critère d'estimation \mathcal{V}_C représente la vraisemblance a posteriori de \mathbf{s}/\mathbf{q} et la distribution gaussienne de la variable conditionnée $\mathbf{s} | \mathbf{q}$ permet d'estimer au sens du maximum a posteriori (MAP) [5] [6] [7] [8] :

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{R} \mathbf{O}_w^T \Gamma^{-1} \mathbf{p}_w \quad (23)$$

Une détection optimale nécessiterait le calcul des vraisemblances pour les 2^{N_F} réalisations possibles de la séquence de Bernoulli, calcul réhibitoire pour un échantillonnage fréquentiel trop fin (i.e. N_F trop élevé). Il convient par conséquent d'envisager à défaut une *détection sous-optimalité* par exploration d'un nombre limité de réalisations du processus de Bernoulli. Nous avons retenu deux approches de cette sous-optimalité justifiées par leur bon compromis complexité calculatoire/performances. La première élabore une approximation *récurrente* du critère utilisé et maximise ce dernier de manière optimale. La seconde consiste à calculer, sans approximation et dans une procédure *itérative* d'optimisation, une suite convergente de vraisemblances d'un sous-ensemble de l'espace des réalisations possibles de \mathbf{q} . Ces deux techniques sont respectivement détaillées aux § 3.22. et 3.23.

3.2.1.2. Propriété de découplage

Qu'il s'agisse de l'approche récurrente ou itérative, les algorithmes correspondants reposent sur un résultat largement utilisé dans [17] initialement établi par MENDEL [15], selon une approche algébrique nécessitant de nombreux calculs. Nous proposons ici une nouvelle démonstration de ce résultat, directe, sans développements algébriques particuliers. D'autre part, ce résultat revêt une forme enrichie par rapport à [15], qui constitue ce que nous avons appelé ci-dessous la *propriété de découplage*.

Au préalable, nous introduisons les notations suivantes. Si besoin est, toute densité de probabilité d'un vecteur gaussien \mathbf{u} s'écrira sous la forme du produit $c(\mathbf{u})g(\mathbf{u} - E[\mathbf{u}])$ où $c(\cdot)$ est la constante de normalisation et où $g(\cdot)$ désigne le terme exponentiel correspondant. Pour fixer les idées si \mathbf{u} , vecteur gaussien réel non dégénéré de taille K , a une valeur moyenne égale au vecteur \mathbf{m} et une matrice de covariance confondue avec \mathbf{B} , alors :

$$c(\mathbf{u}) = \frac{1}{2\pi^{K/2}} \frac{1}{\det^{1/2}(\mathbf{B})} \quad \text{et} \\ g(\mathbf{u} - \mathbf{m}) = \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\mathbf{u} - \mathbf{m})^T \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{u} - \mathbf{m}) \right\} \quad (24)$$

En cohérence avec ce qui précède, $g_q(\cdot)$ représentera l'exponentielle d'une densité gaussienne conditionnellement à \mathbf{q} . La propriété de découplage repose sur le théorème T1 et sa conséquence fondamentale C1.

Dans toute la suite, l'opérateur \otimes désigne le *produit de Hadamard* de deux vecteurs. La composante de rang k du produit de

Hadamard de \mathbf{q} et \mathbf{a} , est égale au produit des composantes de rang k de chacun des deux vecteurs :

$$[\mathbf{q} \otimes \mathbf{a}]_k = [\mathbf{q}]_k [\mathbf{a}]_k$$

Théorème T1. [8]

Sous les hypothèses suivantes :

- H1 $\mathbf{p}_w = \mathbf{O}_w \mathbf{s} + \mathbf{b}$, où $\mathbf{s} = \mathbf{q} \otimes \mathbf{a}$,
- H2 \mathbf{b} est blanc gaussien de matrice de covariance $\sigma_b^2 \mathbf{I}$;
- H3 \mathbf{a} est blanc gaussien de matrice de covariance $\sigma_a^2 \mathbf{I}$;
- H4 \mathbf{q} est un vecteur blanc de Bernoulli de covariance $\lambda(1 - \lambda) \mathbf{I}$;
- H5 $\{\mathbf{q}, \mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ sont mutuellement indépendants;

et compte tenu des conventions (19) (20) (23) et (24), alors :

$$\mathcal{V}_C(\mathbf{q}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi^{(N_F+Q)/2}} \frac{1}{\sigma_b^{N_F}} \frac{1}{\sigma_Q} g_q(\mathbf{p}_w) f(\mathbf{q}) g_q(\mathbf{s} - \hat{\mathbf{s}}) \quad (25)$$

$$\mathcal{V}_C(\mathbf{q}, \mathbf{s}) = \mathcal{V}_M(\mathbf{q}) \frac{1}{2\pi^{Q/2}} \frac{\det^{1/2}(\Gamma)}{\sigma_Q \sigma_b^{N_F}} g_q(\mathbf{s} - \hat{\mathbf{s}}) \quad (26)$$

Il est rappelé que Q désigne le nombre de composantes non nulles de \mathbf{q} .

Preuve de T1.

La démonstration de T1 repose sur la formule de Bayes relative à des densités conjointes :

$$f_q(\mathbf{p}_w, \mathbf{s}) = f_q(\mathbf{s} | \mathbf{p}_w) f_q(\mathbf{p}_w) = f_q(\mathbf{p}_w | \mathbf{s}) f_q(\mathbf{s}) \quad (27)$$

écrite dans le cas gaussien selon nos conventions :

$$c_q(\mathbf{p}_w) c_q(\mathbf{s} | \mathbf{p}_w) g_q(\mathbf{p}_w) g_q(\mathbf{s} - E_q[\mathbf{s} | \mathbf{p}_w]) = \\ c_q(\mathbf{p}_w | \mathbf{s}) c_q(\mathbf{s}) g_q(\mathbf{p}_w - E_q[\mathbf{p}_w | \mathbf{s}]) g_q(\mathbf{s}) \quad (28)$$

En partant de (19), on établit la formule (25) si l'on conserve le membre de gauche de (28) où l'on remarque, d'une part que l'espérance conditionnelle $E_q[\mathbf{s} | \mathbf{p}_w]$ n'est autre que $\hat{\mathbf{s}}$, voir [19], et d'autre part que :

$$c_q(\mathbf{p}_w) c_q(\mathbf{s} | \mathbf{p}_w) = c_q(\mathbf{p}_w | \mathbf{s}) c_q(\mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi^{(N_F+Q)/2}} \frac{1}{\sigma_b^{N_F}} \frac{1}{\sigma_Q} \quad (29)$$

La formule (26) est une conséquence de (25), de la définition de $\mathcal{V}_M(\mathbf{q})$, voir (20), et de la forme explicite de la densité d'une gaussienne [19].

Conséquence fondamentale C1.

Toujours sous les hypothèses $H1 H2 H3 H4 H5$, $\mathcal{V}_C(\mathbf{q}, \hat{s})$ est indépendant de \hat{s} et s'écrit :

$$\mathcal{V}_C(\mathbf{q}, \hat{s}) = \frac{1}{2\pi^{(N_F+Q)/2}} \frac{1}{\sigma_b^{N_F}} \frac{1}{\sigma^Q} g_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}_w) f(\mathbf{q}) \quad (30)$$

On a, de plus :

$$\mathcal{V}_C(\mathbf{q}, \hat{s}) = \mathcal{V}_M(\mathbf{q}) \frac{1}{2\pi^{Q/2}} \frac{\det^{1/2}(\Gamma)}{\sigma^Q \sigma_b^{N_F}} \quad (31)$$

On déduit (30) et (31) de (25) et (26), en notant que $g(\boldsymbol{\theta}) = 1$.

La **propriété de découplage** s'énonce alors en ces termes, compte tenu de T1 et C1 :

SYNTHÈSE

La maximisation de la vraisemblance conjointe $\mathcal{V}_C(\mathbf{q}, s)$ peut se scinder en deux opérations, de détection d'une part et d'estimation d'autre part. La détection est obtenue en maximisant la **vraisemblance de détection conjointe**, indépendante de \hat{s} :

$$\mathcal{V}_C(\mathbf{q}, \hat{s}) = \frac{1}{2\pi^{(N_F+Q)/2}} \frac{1}{\sigma_b^{N_F}} \frac{1}{\sigma^Q} g_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}_w) f(\mathbf{q}) \quad (32)$$

L'estimation afférente consiste à maximiser la **vraisemblance d'estimation** conditionnellement à une détection $\hat{\mathbf{q}}$:

$$\mathcal{V}_C(s, \hat{\mathbf{q}}) = f_{\hat{\mathbf{q}}}(\mathbf{p}_w | s) f_{\hat{\mathbf{q}}}(s) \quad (33)$$

ce qui conduit à la relation (23). Les **stratégies conjointes et marginales ne diffèrent que par leurs détections respectives dont les vraisemblances sont reliées, par l'identité** :

$$\mathcal{V}_C(\mathbf{q}, \hat{s}) = \mathcal{V}_M(\mathbf{q}) \frac{1}{2\pi^{Q/2}} \frac{\det^{1/2}(\Gamma)}{\sigma^Q \sigma_b^{N_F}} \quad (34)$$

Remarque R2.

Un résultat analogue à la formule (34) a été obtenu dans [16] selon une démarche fondée sur des calculs algébriques. Le théorème T1 s'affranchit, par conséquent, de tous ces développements. Cette formule s'avère d'autant plus importante qu'elle préside en partie à l'élaboration des algorithmes itératifs de déconvolution impulsionnelle [16], comme il sera vu au § 3.23.

3.2.2. EXPULSE Récurrent EXPRE

3.2.2.1. Considérations générales, notations

La nature récurrente de l'algorithme recherché exige de progresser dans l'identification de s ou de \mathbf{q} de proche en proche, en partant d'une détection-estimation réalisée dans un canal fréquentiel de rang $k-1$, par exemple, puis de prendre en compte l'information contenue dans la valeur du périodogramme dans le canal k pour

détecter et estimer au sein même de ce canal, etc. Les notations suivantes s'avèrent commodes : $\hat{s}_{k/k}$ représente le vecteur-signal estimé jusqu'au canal k , $0 \leq k \leq N_F - 1$, connaissant les échantillons $\Pi_w[i] : 0 \leq i \leq k$ du périodogramme; \mathbf{p}_w^k est le vecteur de taille $k+1$ contenant les $\Pi_w[i], 0 \leq i \leq k$; \mathbf{q}_k est le vecteur de taille N_F dont les $k+1$ premières composantes sont les $\beta[i], 0 \leq i \leq k$ et dont les dernières composantes sont nulles; en d'autres termes, on a :

$$\mathbf{q}_k = \mathbf{q}_{k-1} + \beta[k] \mathbf{I}_k \quad (35)$$

où \mathbf{I}_k n'est autre que le vecteur de taille N_F dont la seule composante non nulle, de rang k , vaut 1; $\hat{\mathbf{q}}_k$ est l'estimée de \mathbf{q}_k . La propriété de découplage va jouer, mais à chaque récurrence de l'algorithme : détection et estimation au sein du canal k vont s'effectuer de manière séparée, dans l'esprit décrit par T1 et C1, sous réserve d'introduire des *approximations récurrentes des vraisemblances de détection conjointe* pour (30) ou *marginale*, voir (20) et de la *vraisemblance d'estimation*, donnée par (33). Les approximations récurrentes des vraisemblances de détection *conjointe* et *marginale* sont respectivement appelées vraisemblances récurrentes *a posteriori* MAP et du *maximum de vraisemblance* MV. Eu égard à la récurrence sous-jacente, la détection dans le canal k ne remet pas en cause celles émanant des canaux précédents. Plus précisément $\hat{\mathbf{q}}_k$ concatène l'estimée $\hat{\beta}[k]$ à $\hat{\mathbf{q}}_{k-1}$, ce qui s'écrit, en accord avec (35) :

$$\hat{\mathbf{q}}_k = \hat{\mathbf{q}}_{k-1} + \hat{\beta}[k] \mathbf{I}_k \quad (36)$$

3.2.2.2. Approximation récurrente de la vraisemblance d'estimation par filtrage de Kalman

Remarquons d'emblée, d'après la propriété de découplage, que l'estimation se réalise toujours conditionnellement à la détection. En conséquence, il est équivalent, d'estimer le « vecteur signal » s ou le « vecteur amplitude », à proprement parler : \mathbf{a} , contenant les $\xi[k], 0 \leq k \leq N_F - 1$, c'est pourquoi il n'a été et il ne sera seulement question que de s et non de \mathbf{a} . Conditionnellement à \mathbf{q} , c'est-à-dire somme toute à la détection, toutes les lois étant *conjecturées* gaussiennes, l'approximation récurrente de la vraisemblance d'estimation s'obtient de manière optimale par un filtrage de Kalman, [8]. Sa mise en œuvre repose sur une reformulation de (10) à partir d'une équation d'état et d'une équation d'observation, donc du choix d'un vecteur d'état \mathbf{x} contenant s . La réécriture en question se fonde sur une représentation d'état MA dégénérée qui consiste à introduire un vecteur d'état invariant, en reportant la dynamique sur la réponse du filtre. La forme MA dégénérée est décrite par :

$$\text{Un vecteur d'état constant : } \mathbf{x} \quad (37)$$

Une équation d'observation relative au canal fréquentiel k :

$$\Pi_w[k] = \mathbf{o}_{wk}^T \mathbf{x} + b[k] \quad (38)$$

$$\text{où : } \mathbf{x} \triangleq [0 \dots 0 s[0] s[1] \dots s[N_F - 1]]^T \quad (39)$$

$$\text{et : } \mathbf{o}_{wk} \triangleq [0 \dots 0 o_w[L-1] o_w[L-2] \dots o_w[0] 0 \dots 0]^T \quad (40)$$

Les vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{o}_{wk} sont tous deux de taille $N_F + L - 1$; $L - 1$ zéros précèdent $s[0]$ dans \mathbf{x} et $\mathbf{o}_w[0]$ occupe le rang $k + L$ dans \mathbf{o}_{wk} , ceci pour : $0 \leq k \leq N_F - 1$. On suppose le système stationnaire, c'est-à-dire l'ondelette invariante. La dynamique consiste à écrire :

$$\mathbf{o}_{wk+1} = \mathbf{D} \mathbf{o}_{wk} \quad (41)$$

où \mathbf{D} est une matrice carrée de décalage à $N_F + L - 1$ lignes et colonnes, dont tous les termes sont nuls, sauf ceux de la diagonale située en-dessous de la diagonale principale, tous égaux à 1. Si l'on appelle d_{ij} le terme situé à l'intersection de la ligne de rang i et de la colonne de rang j , on a :

$$d_{ij} = \delta[i - j - 1]$$

où $\delta[n]$ désigne la séquence de Kronecker. D'après la structure générale d'un filtre de Kalman d'estimation [8], \mathbf{x} peut donc être calculé de façon récurrente selon les relations de mise à jour suivantes :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k/k} = \hat{\mathbf{x}}_{k-1/k-1} + \mathbf{g}_k (\Pi_w[k] - \mathbf{o}_{wk}^T \hat{\mathbf{x}}_{k-1/k-1}) \quad (42)$$

$$\varepsilon_k = \mathbf{o}_{wk}^T \mathbf{P}_{k-1/k-1} \mathbf{o}_{wk} + \sigma_b^2 \quad (43)$$

$$\mathbf{g}_k = \mathbf{P}_{k-1/k-1} \mathbf{o}_{wk} \varepsilon_k^{-1} \quad (44)$$

$$\mathbf{P}_{k/k} = \mathbf{P}_{k-1/k-1} + \mathbf{g}_k \mathbf{g}_k^T \varepsilon_k \quad (45)$$

$$\mathbf{o}_{wk+1} = \mathbf{D} \mathbf{o}_{wk}$$

avec les conditions initiales :

$$\mathbf{x}_{-1/-1} = \mathbf{0} \quad (46)$$

$$\mathbf{P}_{-1/-1} = \sigma^2 \mathbf{I} \quad (47)$$

$$\mathbf{o}_{w0} = [o_w[L-1] o_w[L-2] \dots o_w[0] 0 \dots 0]^T \quad (48)$$

Remarque R3.

À la différence de [16], un filtre de Kalman d'estimation et non de prédiction a été utilisé ici. De même, les initialisations sont distinctes de celles suggérées dans [16], car ici le canal zéro existe et doit faire l'objet d'une détection-estimation à part entière.

3.2.2.3. Approximations récurrentes des vraisemblances de détection conjointe MAP et marginale MV

La détection par MAP revient à approximer la vraisemblance conjointe :

$$f(\mathbf{p}_w, \mathbf{s} | \mathbf{q}) f(\mathbf{q})$$

Compte tenu de (36) la détection MAP dans le canal k , i.e., l'estimation de $\beta[k]$, consiste à maximiser par rapport à $\beta[k]$, la vraisemblance :

$$\mathcal{V}_{MAP}(\beta[k], m) \triangleq f(\hat{\mathbf{s}}_{k-1|k-1}, \mathbf{p}_w^{k+m} | \beta[k] \hat{\mathbf{q}}_{k-1}) f(\beta[k] \hat{\mathbf{q}}_{k-1}) \quad (49)$$

m entier positif ou nul caractérise un lissage éventuel qui augmente la fiabilité de la détection, dans la mesure où lorsque

m est non nul, la prise de décision s'appuie sur un ensemble d'échantillons du périodogramme issus, non seulement des canaux précédents ou égaux à k , mais aussi des m suivants. La quantité $\hat{\mathbf{s}}_{k-1|k-1}$ émane de $\hat{\mathbf{q}}_{k-1}$, ainsi que de la sortie précédente du filtre de Kalman, à savoir : $\hat{\mathbf{x}}_{k-1/k-1}$. Le détecteur par MV construit une approximation récurrente du critère marginal :

$$f(\mathbf{p}_w | \mathbf{q}) f(\mathbf{q})$$

sous forme d'une recherche, toujours par rapport à $\beta[k]$, des maxima de la vraisemblance :

$$\mathcal{V}_{MV}(\beta[k], m) \triangleq f(\mathbf{p}_w^{k+m} | \beta[k] \hat{\mathbf{q}}_{k-1}) f(\beta[k] \hat{\mathbf{q}}_{k-1}) \quad (50)$$

Ceci écarte du problème les amplitudes des événements. Les expressions des vraisemblances (49) et (50) sont semblables : celle du détecteur MV comporte un terme de plus par rapport au détecteur MAP, qui représente la matrice de covariance du vecteur d'état. Cela permet d'interpréter ce détecteur comme un test adaptatif sur le vecteur pseudo-innovation, puisque cette matrice est mise à jour à chaque récursion et ne peut atteindre une valeur asymptotique en raison de la non-stationnarité du processus à restaurer. Cette méthode récurrente est très attrayante par son faible volume de calcul et son implantation aisée. Les deux stratégies de détection récurrente, MAP ou MV, présentent néanmoins l'inconvénient majeur de ne pas remettre en cause les décisions prises dans le passé, voir (36). Dans ces conditions, une accumulation de décisions erronées peut rapidement provoquer des instabilités. Cette principale limitation peut être palliée cependant par une approche de maximisation itérative des critères, en excluant tout traitement en ligne des données.

3.2.3. EXPULSE Itératif EXIT

3.2.3.1. Considérations générales

S'affranchir partiellement des travers des algorithmes récurrents revient à fonder le processus de détection-estimation sur l'ensemble de données le plus complet possible, c'est-à-dire en utilisant le vecteur \mathbf{p}_w dans son intégralité, plutôt que quelques-unes de ses composantes. Les traitements consomment alors les données par blocs et deviennent itératifs. En ce qui concerne l'estimation, cela se limite à appliquer la formule (23), une fois la détection accomplie. En ce qui concerne la détection, l'identité (34) de la propriété de découplage conduit à de nouvelles vraisemblances de détection conjointe $\mathcal{X}_C(\mathbf{q})$ et marginale $\mathcal{X}_M(\mathbf{q})$, après : détermination du logarithme népérien \ln , suppression de tous les termes ne dépendant pas de \mathbf{q} , écriture explicite des exponentielles $g(\cdot)$ des différentes gaussiennes, voir (24), et prise en compte de la relation :

$$f(\mathbf{q}) = \lambda^Q (1 - \lambda)^{N_F - Q} \quad (51)$$

On obtient finalement :

$$\mathcal{X}_C(\mathbf{q}) = -\mathbf{p}_w^T \Gamma^{-1} \mathbf{p}_w - Q \left\{ \ln(2\pi\sigma^2) + 2 \ln \left(\frac{1 - \lambda}{\lambda} \right) \right\} \quad (52)$$

équivalente à (30) pour la stratégie conjointe et :

$$\mathcal{X}_M(\mathbf{q}) = -\mathbf{p}_w^T \Gamma^{-1} \mathbf{p}_w - 2Q \ln \left(\frac{1-\lambda}{\lambda} \right) - \ln(\det(\Gamma)) \quad (53)$$

équivalente à (20) pour la stratégie marginale. Un résultat analogue à l'expression (52) est donné dans [16], mais issu d'une approche fondée sur des calculs algébriques. La propriété de découplage évite, par conséquent, ces développements. Que l'on envisage les stratégies de détection *conjointe* ou *marginale*, la recherche des maxima par rapport à \mathbf{q} de $\mathcal{X}_C(\mathbf{q})$ ou $\mathcal{X}_M(\mathbf{q})$ conduirait à calculer chacune de ces grandeurs pour 2^{N_F} valeurs possibles du vecteur \mathbf{q} , ce qui s'avère complètement rédhibitoire. Le paragraphe suivant détaille une solution de coût calculatoire plus faible.

3.2.3.2. Étapes fondamentales de l'algorithme EXPULSE itératif EXIT

De façon à éviter toute ambiguïté, empressons-nous de préciser que les conventions d'écriture présentées maintenant concernent uniquement l'algorithme itératif et donc ne sont utilisables qu'au sein du § 3.232. A cet effet, \mathbf{q}_0 désigne un vecteur de Bernoulli « pivot » (il s'agit tout simplement d'un vecteur d'initialisation) et \mathbf{q}_k un vecteur ne différant du vecteur \mathbf{q}_0 que par la composante de rang k . Plus généralement, toute grandeur, matrice, vecteur, scalaire, affublée de l'indice zéro, sera représentative du vecteur-pivot, cependant que la même quantité portant l'indice k émanera de \mathbf{q}_k . On appelle *voisinage d'un vecteur-pivot* $\mathcal{U}(\mathbf{q}_0)$ l'ensemble des vecteurs de Bernoulli se déduisant du vecteur-pivot par modification d'au plus une de ses composantes. Le vecteur \mathbf{q}_k appartient donc à $\mathcal{U}(\mathbf{q}_0)$. Un vecteur-pivot étant fixé, on retient le vecteur qui maximise les vraisemblances de détection (*conjointe* ou *marginale*) à l'intérieur du voisinage $\mathcal{U}(\mathbf{q}_0)$. Le vecteur choisi devient à son tour vecteur-pivot et l'opération se renouvelle, etc. Le parcours d'une itération de l'algorithme, i.e., le choix d'un vecteur dans le voisinage d'un pivot n'est pas trop fastidieux si l'on sait calculer les vraisemblances de tous les vecteurs d'un voisinage à partir de la vraisemblance du pivot. Pour ce faire, on considère les entités suivantes :

$$\mathbf{A} \triangleq \mathbf{O}_w^T \Gamma^{-1} \mathbf{O}_w \quad (54)$$

$$\rho_k \triangleq \sigma^{-2} \varepsilon_k^{-1} + \mathbf{I}_k^T \mathbf{A}_0 \mathbf{I}_k \quad (55)$$

$$\mathbf{z} \triangleq \mathbf{O}_w^T \Gamma^{-1} \mathbf{p}_w \quad (56)$$

D'après (56) et (23), on note que \mathbf{z} est relié à l'estimateur du vecteur signal \mathbf{s} par la relation :

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{R} \mathbf{z} \quad (57)$$

où \mathbf{R} désigne, en continuité avec nos conventions, la matrice de covariance de \mathbf{s} conditionnellement à \mathbf{q} . ε_k vaut ± 1 selon la différence existant entre la composante de rang k de \mathbf{q}_k et celle du vecteur-pivot. On a dans ces conditions :

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{R}_0 + \sigma^2 \varepsilon_k \mathbf{I}_k \mathbf{I}_k^T \quad (58)$$

$$\Gamma_k = \Gamma_0 + \sigma^2 \varepsilon_k \mathbf{O}_w \mathbf{I}_k \mathbf{I}_k^T \mathbf{O}_w^T \quad (59)$$

Eu égard à la similitude des vraisemblances (52) et (53), on introduit la vraisemblance *générique* $\mathcal{X}_Y(\mathbf{q})$ dont l'indice Y est égal à C ou M qui revêt la forme :

$$\mathcal{X}_Y(\mathbf{q}) = -\mathbf{p}_w^T \Gamma^{-1} \mathbf{p}_w + \mathcal{W}_Y(\mathbf{q}) \quad (60)$$

où $\mathcal{W}_Y(\mathbf{q})$ est un terme complémentaire dont l'identification ne pose aucune difficulté à partir de (60), (52) et (53). Le lemme d'inversion matricielle, [8], appliqué à (59), la prise en charge des relations (54, 55, 56, 58, 60) conduisent aux étapes constitutives d'EXPULSE itératif EXIT :

$$\mathbf{c}_k \triangleq \mathbf{A}_0 \mathbf{I}_k \quad \text{Exit 1}$$

$$\rho_k \triangleq \sigma^{-2} \varepsilon_k^{-1} + \mathbf{I}_k^T \mathbf{c}_k \quad \text{Exit 2}$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{z}_0 - \mathbf{c}_k \rho_k^{-1} (\mathbf{I}_k^T \mathbf{z}_0) \quad \text{Exit 3}$$

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{A}_0 - \mathbf{c}_k \rho_k^{-1} \mathbf{c}_k^T \quad \text{Exit 4}$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{X}_Y(\mathbf{q}_k) &= \mathcal{X}_Y(\mathbf{q}_0) + \mathbf{z}_0^T \mathbf{I}_k \rho_k^{-1} \mathbf{I}_k^T \mathbf{z}_0 \\ &\quad + \mathcal{W}_Y(\mathbf{q}_k) - \mathcal{W}_Y(\mathbf{q}_0) \end{aligned} \right\} \text{Exit 5}$$

La mise à jour de $\mathcal{W}_C(\mathbf{q}_k)$ est immédiate à partir de (53); celle de $\mathcal{W}_M(\mathbf{q}_k)$ s'avère plus délicate : elle repose sur l'identité :

$$\left. \begin{aligned} \det(\Gamma_k) &= \det(\Gamma_0) \sigma^2 \varepsilon_k \rho_k = \det(\Gamma_0) (1 + \sigma^2 \varepsilon_k \rho_k') \\ \text{où } \rho_k' &= \mathbf{I}_k^T \mathbf{c}_k \end{aligned} \right\} \text{Exit 6}$$

La relation Exit 6 est démontrée dans l'annexe A1.

4. Simulations

L'objectif des présentes simulations est double. Il s'agit tout d'abord de mettre en exergue le comportement d'EXPULSE itératif EXIT, au fur et à mesure que le rapport signal sur bruit se dégrade, de façon à repérer un seuil empirique de « décrochement » de l'algorithme, dans un cadre de travail bien défini, comparable au seuil bien connu des algorithmes fondés sur la décomposition en valeurs singulières, MUSIC, la Norme minimale etc, [8]. La seconde motivation de ce paragraphe est de rendre compte du fonctionnement d'EXPULSE récurrent EXPRE.

Les résultats des simulations relatives à EXIT figurent sur les planches 1 à 9. Les données se composent de 2 sinus noyés dans un bruit blanc gaussien additif. Les couples (fréquence-réduite, puissance) des 2 raies sont les suivants : (46/256, $\sqrt{2}$) et (47/256, 1). 64 échantillons temporels sont disponibles; il y a donc, au sens de la remarque R1, 64 canaux de résolution de Fourier notés : $q/64, 0 \leq q \leq 63$. Cela signifie qu'aucune des deux raies n'est située sur un canal de résolution de Fourier. Le cercle trigonométrique est échantillonné sur 256 canaux fréquentiels, toujours au sens de R1, tant pour la fonction discriminante

pseudo-spectrale de MUSIC que pour EXIT. Chaque planche représente : 1) le périodogramme non lissé, calculé sur les 64 échantillons temporels multipliés par une fenêtre rectangulaire qui sert de point de départ à EXIT, 2) MUSIC dont la fonction discriminante résulte d'un échantillonnage fréquentiel sur 256 points, 3) EXIT. Le rapport signal sur bruit est défini par : $10 \log_{10}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 / \sigma_B^2)$ où σ_1^2 et σ_2^2 sont les puissances des 2 raies et σ_B^2 la puissance du bruit additif. Entre les planches 1 et 9 le RSB varie de 20 à -1 dB. On note le bon comportement d'EXIT qui sépare correctement les raies jusqu'à -0.25 dB, alors que MUSIC décroche autour de 3 dB, ce qui correspond d'ailleurs au seuil habituel [10]. La planche 10 fait état du comportement moins satisfaisant de la version récurrente EXPRE, qui présente néanmoins l'intérêt évident, il a été construit pour cela, de fournir une analyse au gré du balayage des différents canaux fréquentiels, ce qui s'avère crucial voire stratégique dans les contextes Radar ou Sonar par exemple. Testé dans les mêmes conditions de travail qu'EXIT, mêmes sinusoides, etc, et pour 3 valeurs du RSB : 20, 7, 2 dB, EXPRE « décroche » autour de 7 dB, voir planche 10.

Indications concernant la calibration des courbes.

La puissance moyenne de la fenêtre rectangulaire utilisée vaut 1, ce qui permet théoriquement d'évaluer la puissance des sinusoides par calcul de l'aire sous le pic qui leur correspond dans le périodogramme [8]. D'autre part, il est rappelé que les valeurs de la fonction discriminante déterminée lors de la mise en œuvre de l'algorithme MUSIC n'ont pas d'interprétation particulière en relation avec les amplitudes des raies inconnues [8] : il s'agit seulement d'une fonction de localisation des fréquences; l'estimation des amplitudes repose ensuite sur une approche par moindres carrés, à partir du modèle (1); cette fonction ne requiert donc aucune calibration. Le graphe relatif à EXPULSE pour finir, restitué des impulsions aux fréquences estimées dont les amplitudes sont compatibles avec les hypothèses : puissances des raies égales à 1 et $\sqrt{2}$.

5. Conclusion

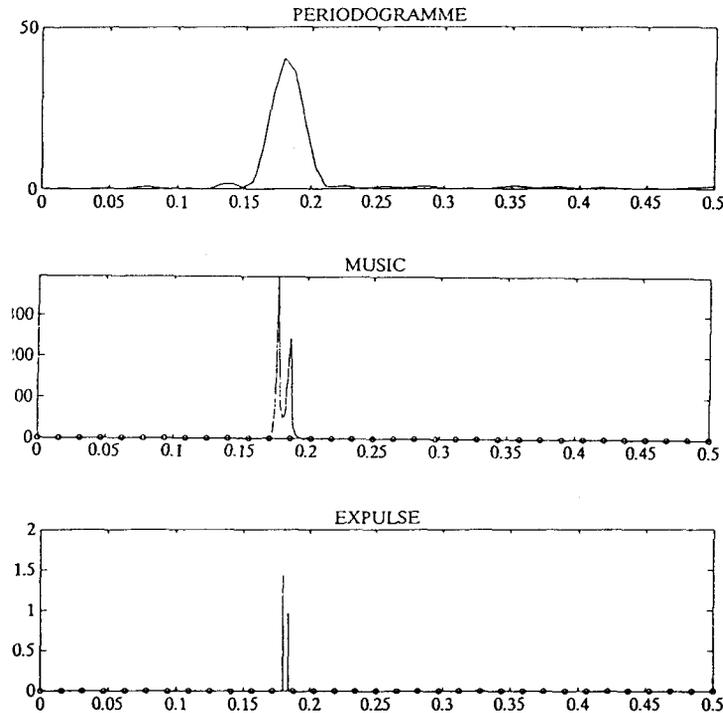
La méthode EXPULSE introduit de nouveaux principes en analyse paramétrique de sinusoides : les informations a priori indispensables à l'atteinte d'une haute résolution, sans augmenter considérablement le nombre d'échantillons mesurés, sont directement introduites dans l'espace-fréquence. En présence de sinusoides, le périodogramme est modélisé comme un opérateur de convolution bruité agissant sur la densité spectrale estimée, considérée comme un processus stochastique Bernoulli-gaussien. Cette démarche apparaît comme le pendant du *prolongement temporel* d'un signal. Elle se qualifie de *comblement fréquentiel*, puisqu'elle est mise en application dans l'espace conjugué de

l'espace-temps par transformée de Fourier. Les canaux fréquentiels où le processus de Bernoulli prend la valeur 1 sont candidats à l'accueil des raies inconnues, les amplitudes se trouvent contenues dans la composante gaussienne. EXPULSE réalise donc *conjointement* la *détection* du processus de Bernoulli et *l'estimation* de la partie gaussienne par déconvolution du périodogramme. A cet égard, il pallie la principale limitation de l'analyse spectrale à haute résolution traditionnelle : la faible robustesse vis à vis d'une méconnaissance de la dimension de l'espace signal.

La déconvolution a lieu dans des conditions particulièrement favorables dans la mesure où l'ondelette, issue de la *calibration* du périodogramme est parfaitement connue. La propriété de *découplage* établie à l'aide d'*arguments probabilistes directs* scinde l'optimalité globale en deux tâches complémentaires et séquentielles de détection et d'estimation. Inspirées des algorithmes utilisés en sismique, les versions *récurrentes* EXPRE et *itératives* EXIT d'EXPULSE exhibent des comportements distincts. Fondé sur un traitement par bloc des données, EXIT présente naturellement de meilleures performances qu'EXPRE. Le seuil de décrochement d'EXIT, en dessous duquel la séparation de 2 raies n'est plus possible est de 0 dB. A titre indicatif, celui de MUSIC jouxte 5 dB. EXPRE, destiné à la consommation en ligne des canaux fréquentiels présente un intérêt important en Radar-Sonar. Sur un plan pratique et à la différence de MUSIC, de la Norme minimale, de Matrix-Pencil et de Bresler, l'algorithme EXPULSE respecte strictement la *structure* des dispositifs classiques *opérationnels* d'analyse spectrale (*appareils de mesure*) et spatiale (*Radar-Sonar*) [21] [22] fondés sur le périodogramme, en se mettant en œuvre en aval de ce dernier. Il doit donc être considéré comme une option supplémentaire à « insérer » afin d'améliorer la résolution lorsque le nombre d'échantillons temporels, en analyse spectrale, et le nombre de capteurs, en traitement d'antenne, se sont avérés somme toute, a posteriori, insuffisants [23]. Une version d'EXIT adaptée aux fluctuations de la loi de répartition des raies, selon les bandes de fréquence du périodogramme, fondée sur une régularisation par un processus Bernoulli-gaussien non uniforme, asservi à une statistique de Fermi-Dirac, a d'ores et déjà été développée [8]; robustesse et régime transitoire de l'algorithme s'en trouvent considérablement améliorés. Pour finir, EXIT a été appliqué avec succès à l'estimation de fréquences instantanées en étendant les idées du présent article au spectrogramme [24].

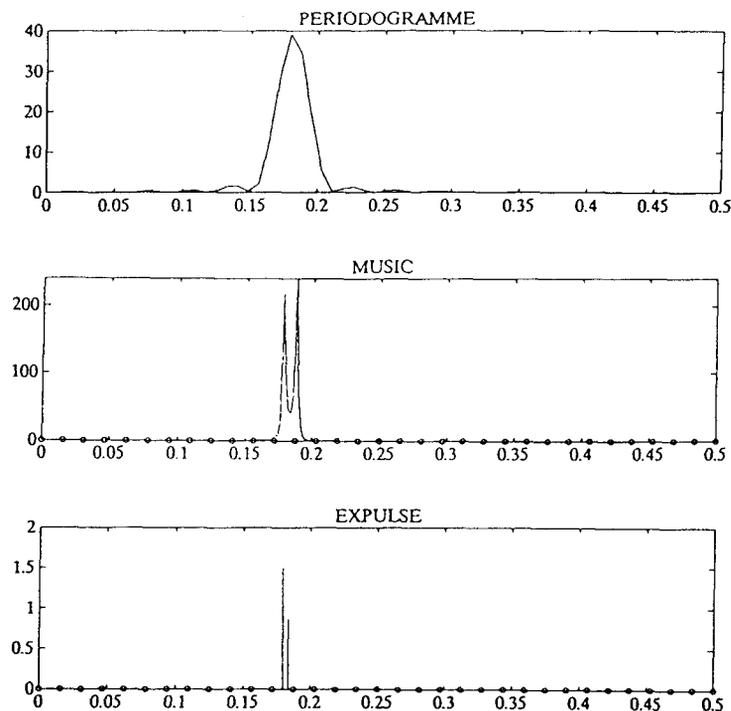
Pour se rapprocher du théorème (3), déconvoluer le périodogramme lissé serait plus judicieux. D'autre part, la même idée d'ajout d'information dans l'espace fréquence pourrait être appliquée à la déconvolution de la transformée de Fourier des données plutôt que celle du périodogramme. L'information phase se trouve maintenue dans cet espace de représentation, ce qui n'est pas le cas pour le périodogramme! Des travaux ont été entrepris dans ce sens là.

Planche 1. – RSB = 20 dB. 2 raies : (position, puissance) = $(46/256, \sqrt{2})$ et $(47/256, 1)$ aucune des deux raies n'est située sur un canal de résolution de Fourier. Nombre d'échantillons temporels : $N = 64$. Canaux de résolution de Fourier : $q/64, 0 \leq q \leq 63$. Canaux fréquentiels (MUSIC & EXPULSE Itératif EXIT) : $k/256, 0 \leq k \leq 255$.



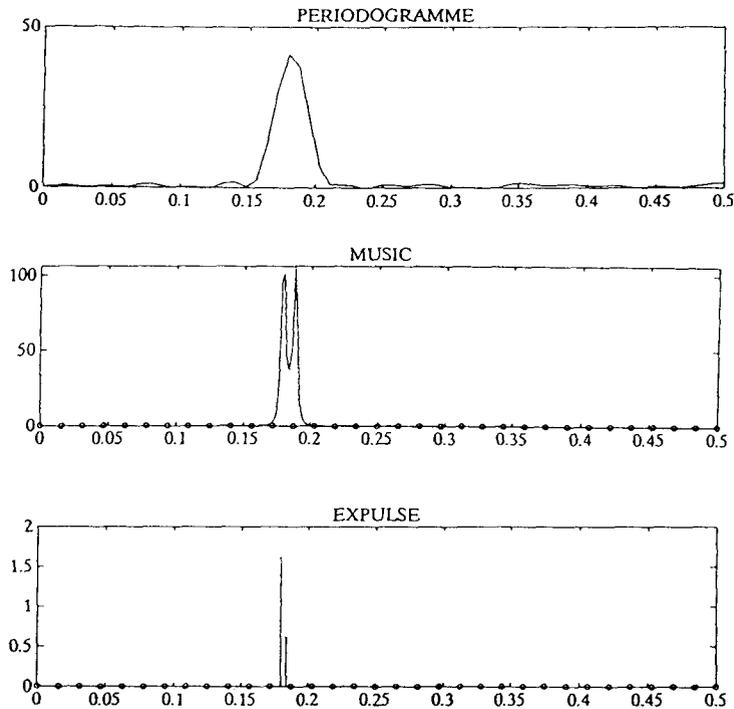
Note : Sur les représentations de MUSIC et EXPULSE Itératif les repères qui ponctuent les axes fréquentiels symbolisent les canaux de résolution de Fourier.

Planche 2. – RSB = 10 dB. 2 raies : (position, puissance) = $(46/256, \sqrt{2})$ et $(47/256, 1)$ aucune des deux raies n'est située sur un canal de résolution de Fourier. Nombre d'échantillons temporels : $N = 64$. Canaux de résolution de Fourier : $q/64, 0 \leq q \leq 63$. Canaux fréquentiels (MUSIC & EXPULSE Itératif EXIT) : $k/256, 0 \leq k \leq 255$.



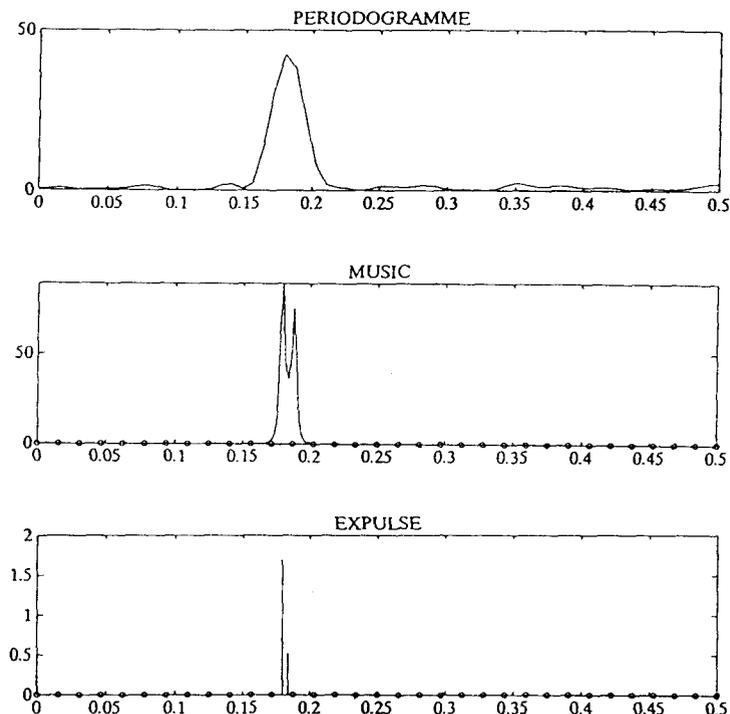
Note : Sur les représentations de MUSIC et EXPULSE Itératif les repères qui ponctuent les axes fréquentiels symbolisent les canaux de résolution de Fourier.

Planche 3. – RSB = 7 dB. 2 raies : (position, puissance) = $(46/256, \sqrt{2})$ et $(47/256, 1)$ aucune des deux raies n'est située sur un canal de résolution de Fourier. Nombre d'échantillons temporels : $N = 64$. Canaux de résolution de Fourier : $q/64, 0 \leq q \leq 63$. Canaux fréquentiels (MUSIC & EXPULSE Itératif EXIT) : $k/256, 0 \leq k \leq 255$.



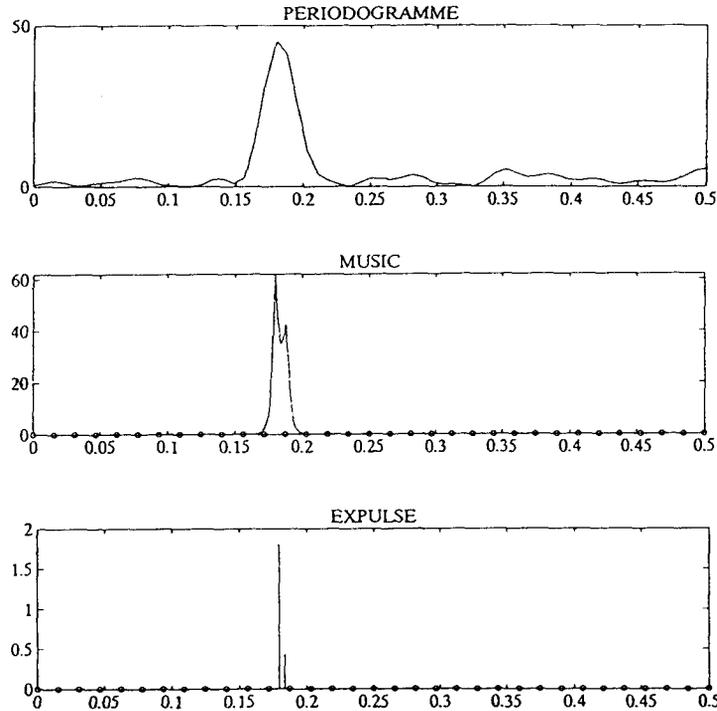
Note : Sur les représentations de MUSIC et EXPULSE Itératif les repères qui ponctuent les axes fréquentiels symbolisent les canaux de résolution de Fourier.

Planche 4. – RSB = 5 dB. 2 raies : (position, puissance) = $(46/256, \sqrt{2})$ et $(47/256, 1)$ aucune des deux raies n'est située sur un canal de résolution de Fourier. Nombre d'échantillons temporels : $N = 64$. Canaux de résolution de Fourier : $q/64, 0 \leq q \leq 63$. Canaux fréquentiels (MUSIC & EXPULSE Itératif EXIT) : $k/256, 0 \leq k \leq 255$.



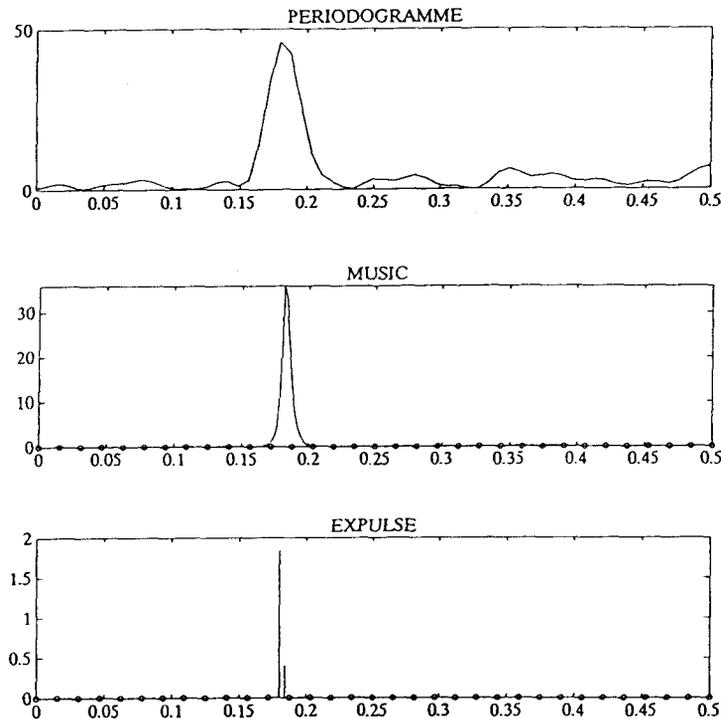
Note : Sur les représentations de MUSIC et EXPULSE Itératif les repères qui ponctuent les axes fréquentiels symbolisent les canaux de résolution de Fourier.

Planche 5. – RSB = 2 dB. 2 raies : (position, puissance) = $(46/256, \sqrt{2})$ et $(47/256, 1)$ aucune des deux raies n'est située sur un canal de résolution de Fourier.
 Nombre d'échantillons temporels : $N = 64$. Canaux de résolution de Fourier : $q/64, 0 \leq q \leq 63$. Canaux fréquentiels (MUSIC & EXPULSE Itératif EXIT) : $k/256, 0 \leq k \leq 255$.



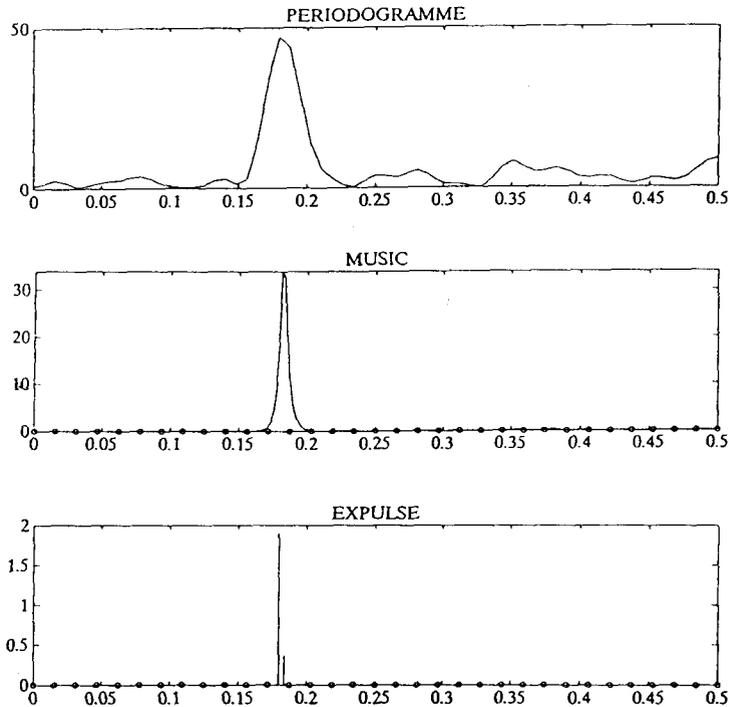
Note : Sur les représentations de MUSIC et EXPULSE Itératif les repères qui ponctuent les axes fréquentiels symbolisent les canaux de résolution de Fourier.

Planche 6. – RSB = 1 dB. 2 raies : (position, puissance) = $(46/256, \sqrt{2})$ et $(47/256, 1)$ aucune des deux raies n'est située sur un canal de résolution de Fourier.
 Nombre d'échantillons temporels : $N = 64$. Canaux de résolution de Fourier : $q/64, 0 \leq q \leq 63$. Canaux fréquentiels (MUSIC & EXPULSE Itératif EXIT) : $k/256, 0 \leq k \leq 255$.



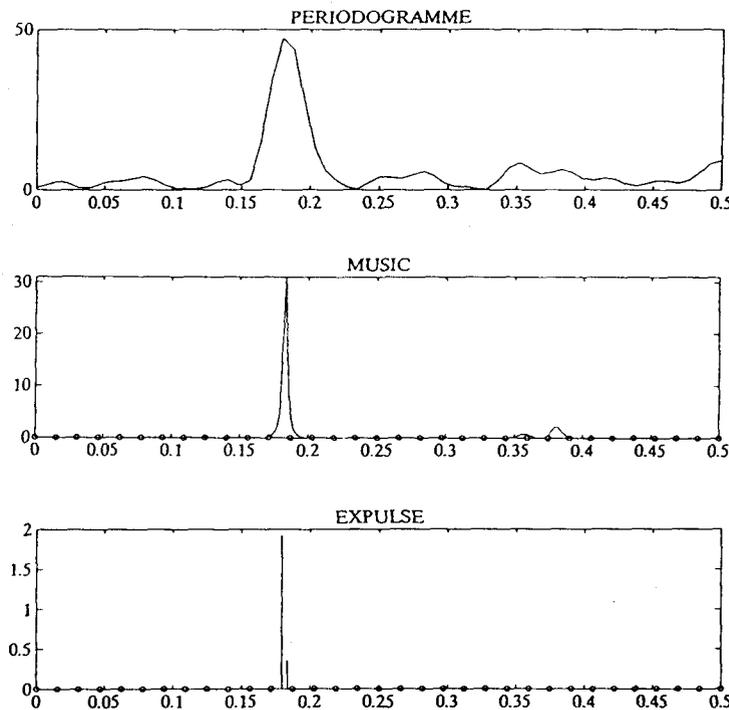
Note : Sur les représentations de MUSIC et EXPULSE Itératif les repères qui ponctuent les axes fréquentiels symbolisent les canaux de résolution de Fourier.

Planche 7. – RSB = 0 dB. 2 raies : (position, puissance) = $(46/256, \sqrt{2})$ et $(47/256, 1)$ aucune des deux raies n'est située sur un canal de résolution de Fourier.
 Nombre d'échantillons temporels : $N = 64$. Canaux de résolution de Fourier : $q/64, 0 \leq q \leq 63$. Canaux fréquentiels (MUSIC & EXPULSE Itératif EXIT) : $k/256, 0 \leq k \leq 255$.



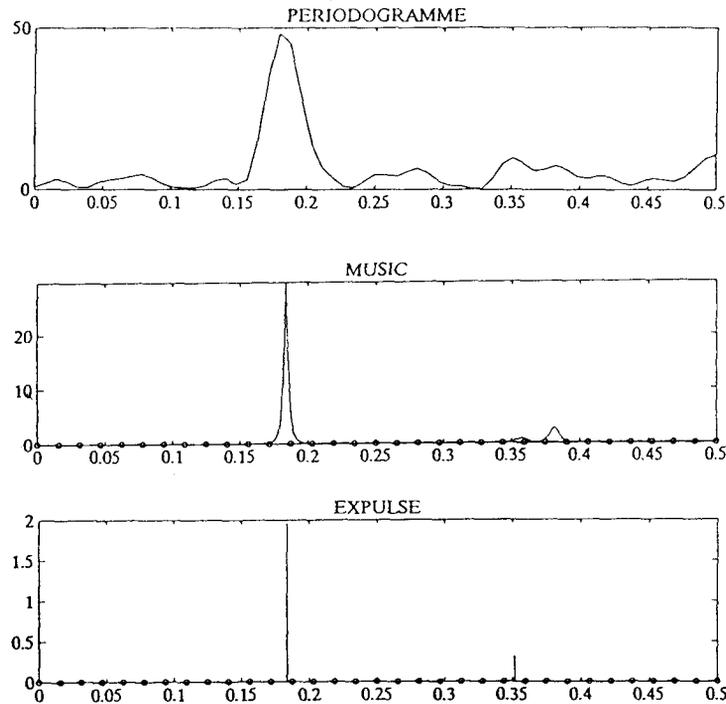
Note : Sur les représentations de MUSIC et EXPULSE Itératif les repères qui ponctuent les axes fréquentiels symbolisent les canaux de résolution de Fourier.

Planche 8. – RSB = 0.25 dB. 2 raies : (position, puissance) = $(46/256, \sqrt{2})$ et $(47/256, 1)$ aucune des deux raies n'est située sur un canal de résolution de Fourier.
 Nombre d'échantillons temporels : $N = 64$. Canaux de résolution de Fourier : $q/64, 0 \leq q \leq 63$. Canaux fréquentiels (MUSIC & EXPULSE Itératif EXIT) : $k/256, 0 \leq k \leq 255$.



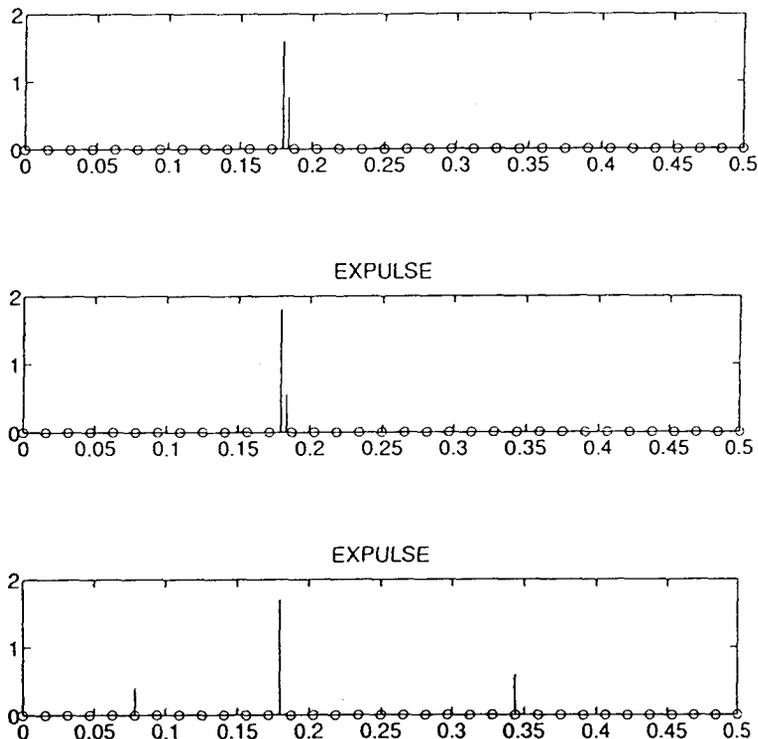
Note : Sur les représentations de MUSIC et EXPULSE Itératif les repères qui ponctuent les axes fréquentiels symbolisent les canaux de résolution de Fourier.

Planche 9. – RSB = -1 dB. 2 raies : (position, puissance) = $(46/256, \sqrt{2})$ et $(47/256, 1)$ aucune des deux raies n'est située sur un canal de résolution de Fourier. Nombre d'échantillons temporels : $N = 64$. Canaux de résolution de Fourier : $q/64, 0 \leq q \leq 63$. Canaux fréquentiels (MUSIC & EXPULSE Itératif EXIT) : $k/256, 0 \leq k \leq 255$.



Note : Sur les représentations de MUSIC et EXPULSE Itératif les repères qui ponctuent les axes fréquentiels symbolisent les canaux de résolution de Fourier.

Planche 10. – Expulse recurrent : Expre. 2 raies : (position, puissance) = $(46/256, \sqrt{2})$ et $(47/256, 1)$ de haut en bas le RSB vaut : 20 dB, 7dB, 2dB. Nombre d'échantillons temporels : $N = 64$. Canaux de résolution de Fourier : $q/64, 0 \leq q \leq 63$. Canaux fréquentiels : $k/256, 0 \leq k \leq 255$.



Note : Sur les représentations de MUSIC et EXPULSE Itératif les repères qui ponctuent les axes fréquentiels symbolisent les canaux de résolution de Fourier.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R.O. SCHMIDT, A Signal Subspace Approach to Multiple Emitter Location and Spectral estimation, *Ph. D. Dissertation*, Stanford University, 1981.
- [2] R. KUMARESAN, « On the zeros of the linear prediction error filter for deterministic signals », *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Proc.*, Vol-ASSP-32, 1983, pp. 217-220.
- [3] Y. HUA, « Matrix pencil method and its performance », *Proc. of ICASSP-88*, April 1988.
- [4] Y. BRESLER, « Exact maximum Likelihood Estimation of Superimposed Exponential Signals in Noise », *Int. Conf. Acoust. Speech Signal Proc.*, Tampa, Fla., 1985, pp. 1824-1827.
- [5] C. VAN TREES, *Detection, Estimation and Modulation Theory*, Wiley, Part 1, New York, 1968.
- [6] B. LEVINE, *Fondements de la Radiotechnique Statistique*, Editions de Moscou, Tome 2, 1973.
- [7] B. PICINBONO, *Random Signals and Systems*, Prentice Hall, 1993.
- [8] P. DUVAUT, *Traitement du Signal : Concepts et Applications*, Editions Hermès, Paris, deuxième édition, juin 1994.
- [9] M. AKAIKE, « A new look at Statistical Model Identification », *IEEE Trans. Aut. Control*, AC-19, December 1974, pp. 716-723.
- [10] S. KAY, *Modern Spectral estimation Theory and Applications*, Prentice Hall, New York, 1987.
- [11] HERO and KIM, « Simultaneous Detection and Classification Under a False Alarm constraint », *Proc. of ICASSP*, Albuquerque, 1990, pp. 2759-2762.
- [12] MIDDLETON and AI, « Simultaneous Detection and estimation under Multiple Hypotheses », *IEEE trans. on Inf. Theory*, September 1972, Vol. IT-18, N°5, pp. 607-614.
- [13] G. DEMOMENT, « Déconvolution de Signaux », *Rapport Interne L2S 20/84 et Notes de Cours 3086/85*, École Supérieure d'Électricité, 1985.
- [14] P.D. WELCH, « The use of Fast Fourier Transform for Estimation of the Power Spectra : method based on Time Averaging over Short Modified Periodograms », *IEEE Trans. Audio Electroacoust.*, June 1967, Vol. AU-15, pp. 70-73.
- [15] J. KORMYLO and J. MENDEL, « Maximum Likelihood Detection and Estimation of Bernoulli-Gaussian Processes », *IEEE Trans. on Information Theory*, May 1982, IT-28, N°3, pp. 482-488.
- [16] Y. GOUSSARD, *Déconvolution de processus aléatoires non-gaussiens par maximisation de vraisemblances*, *Thèse de Doctorat*, Université d'Orsay, 1989.
- [17] Y. GOUSSARD et G. DEMOMENT, « Détection-estimation récursive rapide de séquences Bernoulli-gaussiennes », *Revue Traitement du Signal*, 1987, Vol. 4, N°5, pp. 377-388.
- [18] Y. GOUSSARD, G. DEMOMENT et J. IDIER, « A new algorithm for iterative deconvolution of sparse spike trains », *Proc. of ICASSP*, 1990, pp. 1547-1550.
- [19] P. BREMAUD, *Introduction aux Probabilités*, Springer Verlag, Berlin, 1984.
- [20] J.C. RADIX, *Filtrage et Lissage Statistiques Optimaux Linéaires*, Cepadues Éditions, Paris, 1984.
- [21] F. le CHEVALIER, *Principes de Traitement des Signaux Radar et Sonar*, Masson, Paris, 1989.
- [22] M. BOUVET, « Tendances en traitements Sonar », *Revue Traitement du Signal*, 1993, Vol. 10, N°2, pp. 139-151.
- [23] P. DUVAUT, T. DOLIGEZ, D. GARREAU, « Amélioration de la résolution d'une antenne par déconvolution de la fonction d'ambiguïté », *Rapport interne THOMSON-DEM*, Société KURTOSIS pour THOMSON-DEM, juin 1994.

[24] P. DUVAUT, D. DUBLANCHET, C. JORAND, « Méthodes Bayésiennes dans le plan temps-fréquence », *rapport interne ETIS*, septembre 1994.

6. Annexes

A.1. DÉMONSTRATION DU RÉSULTAT EXIT 6

Exit 6 s'obtient en notant dans un premier temps et à partir de (59) que :

$$\Gamma_k = \Gamma_0(\mathbf{I} + \Gamma_0^{-1}\mathbf{w}\mathbf{w}^T) \quad (\text{A.1})$$

sous réserve que Γ_0 soit inversible et où :

$$\mathbf{w} = \sigma\sqrt{\varepsilon_k}\mathbf{O}_w\mathbf{I}_k \quad (\text{A.2})$$

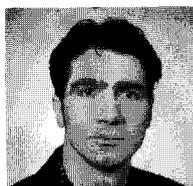
On remarque ensuite que la matrice $\Gamma_0^{-1}\mathbf{w}\mathbf{w}^T$ est de rang 1, de valeur propre non nulle : $\mathbf{w}^T\Gamma_0^{-1}\mathbf{w}$ car :

$$(\Gamma_0^{-1}\mathbf{w}\mathbf{w}^T)^2 = (\mathbf{w}^T\Gamma_0^{-1}\mathbf{w})\Gamma_0^{-1}\mathbf{w}\mathbf{w}^T \quad (\text{A.3})$$

La dernière étape qui conduit à exit 6 tient compte du fait que le déterminant d'une matrice diagonalisable est égal au produit de ses valeurs propres.

LES AUTEURS

Patrick DUVAUT



Ancien élève de l'ENS de Cachan, agrégé de Sciences Physiques en 1981, Docteur en Sciences de la Faculté d'Orsay en 1987, Habilité à diriger des Recherches en 1991, Patrick DUVAUT est professeur des Universités à l'ENSEA. Il est responsable du DEA TIS de Cergy et co-responsable de l'équipe ETIS. Ses principaux thèmes de recherche concernent les statistiques d'ordre élevé, les méthodes bayésiennes appliquées à l'analyse spectrale, le Traitement d'Antenne, le filtrage non linéaire et l'estimation de fréquences instantanées.

animées.

Animateur du Conseil Scientifique de la société Kurtosis, il co-dirige la collection TS des éditions Hermès.

Frédéric DUBLANCHET



Frédéric Dublanche est diplômé de l'École Nationale Supérieure de l'Électronique et de ses Applications (ENSEA), spécialité Analyse et Traitement du Signal, promotion 1992. Après validation en 1993 du DEA Automatique et Traitement du Signal de l'Université de Paris-Sud, il prépare actuellement une thèse de doctorat sur la contribution des approches bayésiennes inverses à l'analyse spectrale et au traitement d'antenne.

Manuscrit reçu le 12 janvier 1994.